

贵州省铜仁市 2023-2024 学年高一上学期 1 月期末质量监测

数学试题

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

1. 已知集合 $A = \{x | x > -1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $[0, 1]$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $(-1, +\infty)$

【答案】B

【解析】因为集合 $A = \{x | x > -1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 所以 $A \cap B = \{0, 1\}$.

故选：B.

2. $\cos 300^\circ =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】A

【解析】 $\cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

故选：A.

3. 命题 $p: \forall x \in [-1, 4], x^2 - 3x - 4 \leq 0$, 则 $\neg p$ 为 ()

- A. $\forall x \in [-1, 4], x^2 - 3x - 4 > 0$ B. $\exists x \in [-1, 4], x^2 - 3x - 4 \leq 0$
C. $\exists x \in [-1, 4], x^2 - 3x - 4 > 0$ D. $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty), x^2 - 3x - 4 > 0$

【答案】C

【解析】因为命题 $p: \forall x \in [-1, 4], x^2 - 3x - 4 \leq 0$,

所以根据含有一个量词的否定可知 $\neg p: \exists x \in [-1, 4], x^2 - 3x - 4 > 0$.

故选：C.

4. 已知 $a = 3^{0.5}$, $b = \log_3 0.5$, $c = \log_3 0.9$, 则它们的大小关系为 ()

- A. $a < c < b$ B. $b < a < c$ C. $a < b < c$ D. $b < c < a$

【答案】D

【解析】易知 $y = \log_3 x$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $b < c$,

高级中学名校试卷

又 $y = 3^x$ 也在定义域 $\mathbf{R}$ 单调递增, 所以 $a = 3^{0.5} > 3^0 = 1 = \log_3 3 > \log_3 0.9 = c$,

所以 $b < c < a$.

故选: D.

5. 已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 下列说法正确的是 ()

A. $f(x) = \sqrt{x}$

B. $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$

C. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数

D. $f(x)$ 为奇函数

【答案】C

【解析】设幂函数 $f(x) = x^\alpha$, 由 $f(2) = 2^\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $\alpha = -\frac{1}{2}$,

由 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, A 选项错误;

$f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, B 选项错误;

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, C 选项正确;

由定义域可知, 函数 $f(x)$ 为非奇非偶, D 选项错误.

故选: C.

6. 设函数 $f(x) = \ln|x| - \frac{1}{x^2}$, 则使得 $f(2x) > f(x-3)$ 成立的 x 的取值范围是 ()

A. $(-3, +\infty)$

B. $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

C. $(-3, 1)$

D. $(-\infty, -3)$

【答案】B

【解析】函数 $f(x) = \ln|x| - \frac{1}{x^2}$, 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

$$f(-x) = \ln|-x| - \frac{1}{(-x)^2} = \ln|x| - \frac{1}{x^2} = f(x), \text{ 函数为偶函数,}$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) = \ln x - \frac{1}{x^2},$$

由函数 $y = \ln x$ 和 $y = -\frac{1}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上都单调递增, 得 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

高级中学名校试卷

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

由 $f(2x) > f(x-3)$, 得 $|2x| > |x-3|$, 即 $(2x)^2 > (x-3)^2$, 解得 $x < -3$ 或 $x > 1$,

所以 x 的取值范围是 $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

故选: B.

7. 设函数 $f(x) = \sin \omega x$, 若函数 $g(x) = f(x) - 1$ 在 $[0, \pi]$ 上恰有 3 个零点, 则正实数 ω 的取值范围是 ()

- A. $\left(\frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$ B. $\left[\frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$ C. $\left(\frac{13}{2}, \frac{17}{2}\right)$ D. $\left[\frac{13}{2}, \frac{17}{2}\right)$

【答案】B

【解析】由题意可知 $g(x) = f(x) - 1 = 0$, 即 $\sin \omega x = 1$ 在 $[0, \pi]$ 上恰有 3 个解,

因为 $x \in [0, \pi] \Rightarrow \omega x \in [0, \omega\pi]$,

所以由正弦函数的图象与性质可知: $\omega\pi \in \left[\frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}\right) \Rightarrow \omega \in \left[\frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$.

故选: B.

8. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 不等式 $2kx^2 - kx - \frac{3}{8} < 0$ 恒成立, 则 k 的取值范围是 ()

- A. $(-3, 0)$ B. $[-3, 0)$ C. $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$ D. $\left(-3, \frac{1}{8}\right]$

【答案】D

【解析】当 $x \in (-1, 1)$ 时, 不等式 $2kx^2 - kx - \frac{3}{8} < 0$ 恒成立,

当 $k = 0$ 时, 满足不等式恒成立;

当 $k \neq 0$ 时, 令 $f(x) = 2kx^2 - kx - \frac{3}{8}$, 则 $f(x) < 0$ 在 $(-1, 1)$ 上恒成立,

函数 $f(x)$ 的图像抛物线对称轴为 $x = \frac{1}{4}$,

$k > 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(-1, \frac{1}{4}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ 上单调递增,

$$\text{则有 } \begin{cases} f(-1) = 2k + k - \frac{3}{8} \leq 0 \\ f(1) = 2k - k - \frac{3}{8} \leq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } 0 < k \leq \frac{1}{8};$$

$k < 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(-1, \frac{1}{4}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ 上单调递减,

则有 $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2k}{16} - \frac{k}{4} - \frac{3}{8} < 0$, 解得 $-3 < k < 0$,

综上所述, k 的取值范围是 $\left(-3, \frac{1}{8}\right]$.

故选: D.

二、多项选择题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.)

9. 下列函数为偶函数的是 ()

A. $f(x) = x^4 + \cos x$

B. $f(x) = x^5 + a \sin x$

C. $f(x) = \frac{1}{x^2} + x$

D. $f(x) = x^2 + |x| + 2$

【答案】AD

【解析】对于 A 选项, $f(x) = x^4 + \cos x$ 定义域为 $\mathbf{R}$, 关于原点对称,

$f(-x) = (-x)^4 + \cos(-x) = x^4 + \cos x$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, 故 A 正确;

对于 B 选项, $f(x) = x^5 + a \sin x$ 定义域为 $\mathbf{R}$, 关于原点对称,

$f(-x) = (-x)^5 + a \sin(-x) = -x^5 - a \sin x = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数, 故 B 错误;

对于 C 选项, $f(x) = \frac{1}{x^2} + x$ 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 关于原点对称,

$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} + (-x) = \frac{1}{x^2} - x$, 所以 $f(x)$ 为非奇非偶函数, 故 C 错误;

对于 D 选项, $f(x) = x^2 + |x| + 2$ 定义域为 $\mathbf{R}$, 关于原点对称,

$f(-x) = (-x)^2 + |-x| + 2 = x^2 + |x| + 2 = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, 故 D 正确.

故选: AD.

10. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则 ()

A. $ab \leq \frac{1}{4}$

B. $\log_2 a + \log_2 b \leq -2$

C. $a^2 + b^2 \geq 1$

D. $2^a + 2^b \geq 2\sqrt{2}$

高级中学名校试卷

【答案】 ABD

【解析】 已知 $a > 0, b > 0$ ，且 $a + b = 1$ ，

$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ，当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 等号成立，A 选项正确；

$\log_2 a + \log_2 b = \log_2 ab \leq \log_2 \frac{1}{4} = -2$ ，当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 等号成立，B 选项正确；

$1 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2 + b^2)$ ， $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ ，当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 等号成立，

C 选项错误；

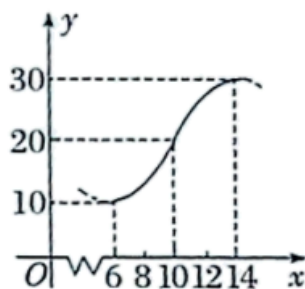
$2^a + 2^b \geq 2\sqrt{2^a \times 2^b} = 2\sqrt{2^{a+b}} = 2\sqrt{2}$ ，当且仅当 $2^a = 2^b$ ，即 $a = b = \frac{1}{2}$ 等号成立，

D 选项正确.

故选：ABD.

11. 如图某地一天从 6 时到 14 时的温度变化曲线近似满足函数

$y = A\cos(\omega x + \varphi) + b (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi)$ ，则 ()



A. $\omega = \frac{\pi}{8}$

B. $A = 20$

C. $\varphi = \frac{\pi}{4}$

D. 这段曲线的【解析】式是

$$y = 20\cos\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{4}\right) + 10$$

【答案】 AC

【解析】 依题意有 $\begin{cases} A+b=30 \\ -A+b=10 \end{cases}$ ，解得 $A=10, b=20$ ，B 选项错误；

函数最小正周期 $T = 2(14-6) = 16 = \frac{2\pi}{\omega}$ ，得 $\omega = \frac{\pi}{8}$ ，A 选项正确；

$x=6$ 时, $10\cos\left(6\times\frac{\pi}{8}+\varphi\right)+20=10$, 则 $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right)=-1$,

得 $\frac{3\pi}{4}+\varphi=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$, 由 $|\varphi|<\pi$, 得 $\varphi=\frac{\pi}{4}$, C 选项正确;

所以这段曲线的〔解析〕式是 $y=10\cos\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4}\right)+20$, D 选项错误.

故选: AC.

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-3, & x\leq 0, \\ \ln x, & x>0, \end{cases}$ 设 $f(x)=k$ 的实数解个数为 t , 则 ()

A. 当 $t=1$ 时, $k\in(-\infty,-4]$

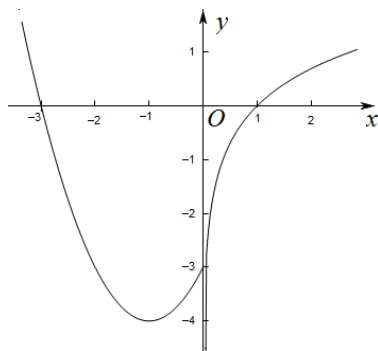
B. 当 $t=2$ 时, $k\in(-3,+\infty)$

C. 当 $t=3$ 时, $k\in(-4,-3]$

D. 函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$

〔答案〕CD

〔解析〕利用二次函数和对数函数的图像和性质, 作出 $f(x)$ 的函数图像, 如图所示,



$f(-1)=-4$, $f(0)=-3$,

由函数图像可知, 当 $t=1$ 时, $k\in(-\infty,-4)$, A 选项错误;

当 $t=2$ 时, $k\in(-3,+\infty)\cup\{-4\}$, B 选项错误;

当 $t=3$ 时, $k\in(-4,-3]$, C 选项正确;

函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, D 选项正确.

故选: CD.

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 已知 $\cos(\alpha-45^\circ)=\frac{4}{5}$, 则 $\sin(45^\circ+\alpha)=$ _____.

高级中学名校试卷

【答案】 $\frac{4}{5}$

【解析】 因为 $\cos(\alpha - 45^\circ) = \frac{4}{5}$, $(45^\circ + \alpha) - (\alpha - 45^\circ) = 90^\circ$,

所以 $\sin(45^\circ + \alpha) = \sin[90^\circ + (\alpha - 45^\circ)] = \cos(\alpha - 45^\circ) = \frac{4}{5}$.

故【答案】为: $\frac{4}{5}$.

14. 函数 $y = \frac{x}{x^2 - 2x + 4}$ ($x > 0$) 的最大值为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $x > 0$ 时, $\frac{x^2 - 2x + 4}{x} = x - 2 + \frac{4}{x} \geq -2 + 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 2$,

当且仅当 $x = \frac{4}{x}$, 即 $x = 2$ 时等号成立, 则有 $\frac{x}{x^2 - 2x + 4} \leq \frac{1}{2}$,

所以当 $x = 2$ 时, 函数 $y = \frac{x}{x^2 - 2x + 4}$ ($x > 0$) 的最大值为 $\frac{1}{2}$.

故【答案】为: $\frac{1}{2}$.

15. 将函数 $y = 2\cos(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位, 再将横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 则函数 $g(x)$ 的【解析】式是_____.

【答案】 $g(x) = 2\cos(x - \frac{\pi}{6})$ (【答案】不唯一, 如 $g(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})$)

【解析】 将函数 $y = 2\cos(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位,

得函数 $y = 2\cos[2(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{3}] = 2\cos(2x - \frac{\pi}{6})$ 的图象,

再把所得图象上各点横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 得 $y = 2\cos(x - \frac{\pi}{6})$ 的图象,

所以函数 $g(x)$ 的【解析】式是 $g(x) = 2\cos(x - \frac{\pi}{6})$.

故【答案】为: $g(x) = 2\cos(x - \frac{\pi}{6})$ (【答案】不唯一, 如 $g(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})$).

16. 我们知道, 函数 $y = f(x)$ 的图象关于坐标原点成中心对称图形的充要条件是函数

高级中学名校试卷

$y=f(x)$ 为奇函数, 有同学发现可以将其推广为: 函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $P(a,b)$ 成中心对称图形的充要条件是函数 $y=f(x+a)-b$ 为奇函数, 函数 $f(x)=x^3-6x^2$ 图象的对称中心为_____.

【答案】 $(2,-16)$

【解析】 根据题意, 设 $f(x)=x^3-6x^2$ 的对称中心为 (a,b) ,

则由函数 $y=f(x+a)-b$ 为奇函数可得 $f(-x+a)-b=-f(x+a)+b$,

变形可得 $f(-x+a)+f(x+a)=2b$,

即 $(-x+a)^3-6(-x+a)^2+(x+a)^3-6(x+a)^2=2b$;

整理可得 $(6a-12)x^2+2a^3-12a^2=2b$, 所以 $\begin{cases} 6a-12=0 \\ 2a^3-12a^2=2b \end{cases}$;

解得 $a=2, b=-16$, 所以其对称中心为 $(2,-16)$.

故【答案】为: $(2,-16)$.

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. 已知集合 $A=\{x|1\leq x\leq 5\}$, 集合 $B=\{x|1+m\leq x\leq 2-m\}$.

(1) 若 $m=-1$, 求 $A\cup \complement_{\mathbb{R}} B$;

(2) 若集合 A, B 满足条件: ① $A\cup B=B$; ② $A\cap B=A$; ③ $x\in A$ 是 $x\in B$ 的必要条件. 从以上三个条件中任选一个, 求实数 m 的取值范围.

解: (1) 由 $m=-1$, 得 $B=\{x|0\leq x\leq 3\}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}} B=\{x|x<0 \text{ 或 } x>3\}$,

所以 $A\cup \complement_{\mathbb{R}} B=\{x|x<0 \text{ 或 } x\geq 1\}$.

(2) 选择①, 因为 $A\cup B=B$, 所以 $A\subseteq B$,

则有 $\begin{cases} 1+m\leq 1 \\ 2-m\geq 5 \end{cases}$, 解得 $m\leq -3$, 所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -3]$.

选择②, 因为 $A\cap B=A$, 所以 $A\subseteq B$,

则有 $\begin{cases} 1+m \leq 1 \\ 2-m \geq 5 \end{cases}$, 解得 $m \leq -3$, 所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -3]$.

选择③, 因为 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的必要条件, 所以 $B \subseteq A$,

当 $B = \emptyset$ 时, 有 $1+m > 2-m$, 解得 $m > \frac{1}{2}$, 此时符合 $B \subseteq A$;

当 $B \neq \emptyset$ 时, 由 $B \subseteq A$, 有 $1 \leq 1+m \leq 2-m \leq 5$, 解得 $0 \leq m \leq \frac{1}{2}$,

所以实数 m 的取值范围为 $[0, +\infty)$.

18. (1) 计算 $\left(2\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}} - (\sqrt[3]{5})^{-3} + \log_2 \sqrt[3]{2} + e^{\ln 3}$.

(2) 某工厂生产一种溶液, 按市场要求杂质含量不得超过 0.1%, 而这种溶液最初的杂质含量为 3%, 现进行过滤, 已知每过滤一次杂质含量减少 $\frac{1}{3}$, 求使产品达到市场要求的过滤的最少次数 (参考数据: $\lg 2 \approx 0.301, \lg 3 \approx 0.477$).

解: (1) $\left(2\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}} - (\sqrt[3]{5})^{-3} + \log_2 \sqrt[3]{2} + e^{\ln 3} = \left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{-3} + \log_2 2^{\frac{1}{3}} + e^{\ln 3}$
 $= \frac{5}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 3 = \frac{24}{5}$.

(2) 设经过 n 次过滤, 产品达到市场要求,

则 $\frac{3}{100} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{1}{1000}$, 即 $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{1}{30}$,

所以 $n \lg \frac{2}{3} \leq -\lg 30$, 即 $n(\lg 2 - \lg 3) \leq -(1 + \lg 3)$,

即 $n \geq \frac{1 + \lg 3}{\lg 3 - \lg 2} \approx \frac{1.477}{0.176} \approx 8.4$,

所以使产品达到市场要求的过滤的最少次数为 9 次.

19. (1) 计算 $\tan 70^\circ \cos 10^\circ (\sqrt{3} \tan 20^\circ - 1)$.

(2) 已知 $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{11}{14}$, 且 $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 求 β 的值.

解: (1) $\tan 70^\circ \cos 10^\circ (\sqrt{3} \tan 20^\circ - 1) = \frac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ} \times \cos 10^\circ \left(\frac{\sqrt{3} \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} - 1\right)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ} \times \cos 10^\circ \left(\frac{\sqrt{3} \sin 20^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} \right) \\
 &= \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} \times \cos 10^\circ \left(\frac{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 20^\circ - \frac{1}{2} \cos 20^\circ \right)}{\cos 20^\circ} \right) \\
 &= -\frac{2 \cos 10^\circ \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} = -1.
 \end{aligned}$$

(2) 因为 $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{11}{14}$,

所以 $\alpha + \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 所以 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{5\sqrt{3}}{14},$$

所以 $\cos \beta = \cos[(\alpha + \beta) - \alpha] = \cos(\alpha + \beta) \cos \alpha + \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha$

$$= \left(-\frac{11}{14}\right) \times \frac{1}{7} + \frac{5\sqrt{3}}{14} \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{1}{2},$$

又因为 $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $\beta = \frac{\pi}{3}$.

20. 已知函数 $f(x) = \sin x \cos x + \sqrt{3} \sin^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及单调递减区间;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值、最小值.

解: (1) $f(x) = \sin x \cos x + \sqrt{3} \sin^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),$

所以, 函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$,

由 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 得 $k\pi + \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{11\pi}{12} (k \in \mathbf{Z})$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi + \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{11\pi}{12}\right] (k \in \mathbf{Z})$.

(2) 由 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, 得 $-\frac{5\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6}$, 则 $-1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2}$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值是 $\frac{1}{2}$, 最小值是 -1 .

21. 已知 $f(x) = 2^x + b \cdot 2^{-x}$ 是奇函数, $g(x) = \ln(e^x + 1) - ax$ 是偶函数.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 若不等式 $f(g(x)) > f(m-x)$ 恒成立, 求 $x \in [0, +\infty)$ 时实数 m 的取值范围.

解: (1) 因为 $f(x) = 2^x + b \cdot 2^{-x}$ 是奇函数, 所以 $f(x) = -f(-x)$,

$$2^x + b \cdot 2^{-x} = -(2^{-x} + b \cdot 2^x), (b+1)(2^{-x} + 2^x) = 0, \text{ 所以 } b = -1,$$

因为 $g(x) = \ln(e^x + 1) - ax$ 是偶函数, 所以 $g(x) = g(-x)$,

$$\text{即: } \ln(e^x + 1) - ax = \ln(e^{-x} + 1) + ax, \text{ 得 } \ln(e^x + 1) - \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right) = 2ax,$$

所以 $\ln e^x = 2ax$, 得 $x = 2ax$, 解得 $a = \frac{1}{2}$.

(2) 由 (1) 知 $f(x) = 2^x - 2^{-x}$,

因为 $y = 2^x$ 为增函数, $y = 2^{-x}$ 为减函数, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

不等式 $f(g(x)) > f(m-x)$ 恒成立, 只需 $g(x) > m-x$,

$$\text{即 } \ln(e^x + 1) - \frac{1}{2}x > m-x, \text{ 所以 } m < \ln(e^x + 1) + \frac{1}{2}x,$$

因为函数 $y = e^x + 1, y = \ln x, y = \frac{1}{2}x$ 在定义域内都单调递增,

所以 $y = \ln(e^x + 1) + \frac{1}{2}x$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{所以 } \ln(e^x + 1) + \frac{1}{2}x \geq \ln 2,$$

所以 $m < \ln 2$, 即实数 m 的取值范围为 $(-\infty, \ln 2)$.

22. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

(1) 求 $f(0)$ 的值, 并证明函数 $f(x)$ 是偶函数;

(2) 判断函数 $f(x)$ 是否为周期函数并说明理由, 求出 $f(-2024)+f(2024)$ 的值.

解: (1) 令 $x=\frac{1}{2}, y=0$, 则 $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2f(0)f\left(\frac{1}{2}\right)$,

因为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, 所以 $f(0)=1$,

令 $x=0$, 则 $f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)$,

因为 $f(0)=1$, 所以 $f(y)=f(-y)$,

即: $f(x)=f(-x)$, 所以函数 $f(x)$ 是偶函数.

(2) $f(x)$ 是周期函数, 理由如下:

令 $y=\frac{1}{2}$, 则 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)f(x)$,

即 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)=f(x)$, 所以 $f(1+x)+f(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)$,

所以 $f(1+x)=-f\left(x-\frac{1}{2}\right)$, 所以 $f\left(\frac{3}{2}+x\right)=-f(x)$,

所以 $f(3+x)=-f\left(\frac{3}{2}+x\right)=f(x)$,

所以函数 $f(x)$ 是周期为 3 的周期函数,

所以 $f(2024)=f(674\times 3+2)=f(2)=f(-1)$,

因为 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$, 令 $x=y=\frac{1}{2}$, 得 $f(1)+f(0)=2f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)$,

所以 $f(1)=-\frac{1}{2}$,

因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/815241330331011134>