2023-2024 学年福建省厦门市高三上学期期末教学质量数学模拟试题

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若复数 $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则 $z-\overline{z}=$（　　）

A. 2　　　　B. $-2\mathrm{i}$　　　　C. -2　　　　D. $2\mathrm{i}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据条件，利用复数的运算即可求出结果.

【详解】因为 $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1+\mathrm{i}$，所以 $\overline{z}=1-\mathrm{i}$，故 $z-\overline{z}=2\mathrm{i}$，

故选：D.

2. 已知集合 $A=\left\{x\middle|x^2-6x+8>0\right\}$，$B=\left\{x\middle|x-3<0\right\}$，则 $A\bigcap B=$（　　）

A. $(2,3)$　　　　B. $(-\infty,3)$　　　　C. $(-\infty,2)$　　　　D. $(4,+\infty)$

【答案】C

【解析】

【分析】解一元二次不等式化简集合 *A*，结合交集的概念即可得解.

【详解】因为 $A=\left\{x\middle|x>4\text{或}x<2\right\}$，$B=\left\{x\middle|x<3\right\}$，所以 $A\cap B=\left\{x\middle|x<2\right\}$.

故选：C.

3. 已知向量 $\vec{a}=(3,5)$，$\vec{b}=(m-1,2m+1)$，若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $m=$（　　）

A. 8　　　　B. -8　　　　C. $-\dfrac{2}{13}$　　　　D. $-\dfrac{8}{7}$

【答案】B

【解析】

【分析】由平面向量平行的充要条件即可得解.

【详解】因为 $\vec{a}//\vec{b}$，所以 $3(2m+1)=5(m-1)$，所以 $m=-8$.

故选：B.

4. 已知 $a=\log_{0.3}2$，$b=3^{0.2}$，$c=0.2^{0.3}$，则（　　）

A. $b>c>a$　　B. $b>a>c$　　C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

【答案】A

【解析】

【分析】引入中间量，利用函数的单调性，进行大小的比较.

【详解】因为 $a=\log_{0.3}2<\log_{0.3}1=0$，$b=3^{0.2}>3^{0}=1$，$c=0.2^{0.3}\in(0,1)$，所以 $b>c>a$.

故选：A

5. 已知函数 $f\left(x\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$，要得到函数 $g(x)=\sin 2x-2\cos^{2}x+1$ 的图象，只需将 $f(x)$ 的图象（　　）

A. 向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度　　B. 向左平移 $\frac{3\pi}{4}$ 个单位长度

C. 向右平移 $\frac{3\pi}{4}$ 个单位长度　　D. 向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度

【答案】D

【解析】

【分析】先把 $f\left(x\right)$，$g\left(x\right)$ 的解析式都化成 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 或 $y=A\cos\left(\omega x+\varphi\right)$ 的形式，再用图象的平移解决问题.

【详解】

$f\left(x\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=\sqrt{2}\cos 2x$，

$g\left(x\right)=\sin 2x-2\cos^{2}x+1=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$，

故将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度可得 $y=\sqrt{2}\cos 2\left(x-\frac{3\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$，

即为 $g(x)$ 的图象.

故选：C

6. 抛物线$C: y^2 = 2px(p>0)$的焦点为F，M是抛物线C上的点，O为坐标原点，若$\triangle OFM$的外接圆与抛物线C的准线相切，且该圆的面积为36π，则$p=$（　　）

A. 4　　B. 8　　C. 6　　D. 10

【答案】B

【解析】

【分析】综合应用三角形外接圆的性质和抛物线的性质即得答案.

【详解】因为$\triangle OFM$的外接圆与抛物线C的准线相切，

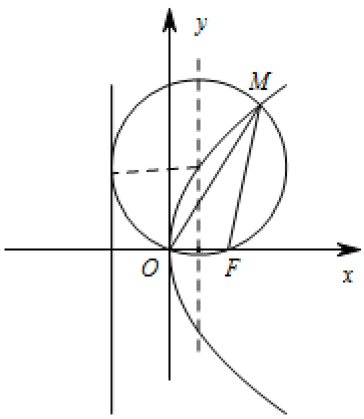
所以$\triangle OFM$的外接圆的圆心到准线的距离等于圆的半径.

因为圆的面积为36π，所以圆的半径为6，

又因为圆心在OF的垂直平分线上，$|OF|=\frac{p}{2}$，

所以$\triangle OFM$的外接圆的圆心到准线的距离$\frac{p}{2}+\frac{p}{4}=6$，可得$p=8$.

故选：B.



7. 已知$\triangle ABC$是边长为8的正三角形，D是AC的中点，沿BD将$\triangle BCD$折起使得二面角$A-BD-C$为$\frac{\pi}{3}$，则三棱锥$C-ABD$外接球的表面积为（　　）

A. 52π　　B. $\frac{52}{3}\pi$　　C. $\frac{208}{3}\pi$　　D. $\frac{103}{3}\pi$

【答案】C

【解析】

【分析】根据给定条件，结合球的截面圆性质确定球心位置，再求出球半径即得.

【详解】在三棱锥$C-ABD$中，$BD\perp AD,BD\perp CD,AD\bigcap CD=D,AD,CD\subset$平面$ACD$，

由二面角$A-BD-C$为$\frac{\pi}{3}$，$AD=CD=4$，得$\triangle ACD$是正三角形，令其外接圆圆心为O'，

则$O'D=\frac{2}{3}AD\sin\frac{\pi}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，令三棱锥$C-ABD$外接球的球心为$O$，球半径为$R$，

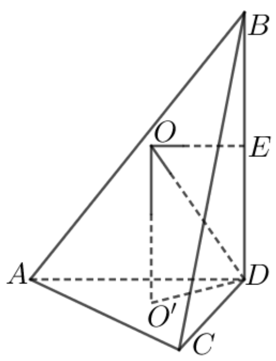
则$OO'\perp$平面ACD，即有$OO'//BD$，显然球心O在线段BD的中垂面上，令线段BD的中垂面交BD于E，

则$OE\perp BD$，显然$O'D\perp BD$，于是$OE//O'D$，四边形$OEDO'$是平行四边形，且是矩形，

而$DE=\frac{1}{2}BD=2\sqrt{3}$，因此$R^2=OD^2=OE^2+DE^2=(\frac{4\sqrt{3}}{3})^2+(2\sqrt{3})^2=\frac{52}{3}$，

所以三棱锥$C-ABD$外接球的表面积$S=4\pi R^2=\frac{208}{3}\pi$.

故选：C



8. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，且$a_na_{n+1}=n$，当$n\geq 2$时，$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leq a_n+a_{n+1}-2^{\lambda}$，则实数$\lambda$的取值范围为（　　）

A. $(-\infty,1]$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $(0,1]$　　D. $(-\infty,4]$

【答案】A

【解析】

【分析】先根据递推关系得到$\frac{1}{a_n}=a_{n+1}-a_{n-1}$，把条件转化为$2^{\lambda}\le 2$，从而可得答案.

【详解】因为$a_na_{n+1}=n$，$a_1=1$，所以$a_2=1$，且当$n\ge 2$时，$a_{n-1}a_n=n-1$，

所以$a_na_{n+1}-a_{n-1}a_n=1$，所以$\frac{1}{a_n}=a_{n+1}-a_{n-1}$，

所以$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=a_3-a_1+a_4-a_2+a_5-a_3+\cdots+a_{n+1}-a_{n-1}=$

$-a_1-a_2+a_n+a_{n+1}=a_n+a_{n+1}-2$.

因为$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}\le a_n+a_{n+1}-2^{\lambda}$，

所以$a_n+a_{n+1}-2\le a_n+a_{n+1}-2^{\lambda}$，所以$2^{\lambda}\le 2$，故$\lambda\le 1$.

故选：A.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列结论正确的是（　　）

A. 若$a<b<0$，则$a^2>ab>b^2$

B. 若$x\in\mathbf{R}$，则$x^2+2+\frac{1}{x^2+2}$的最小值为 2

C. 若$a+b=2$，则a^2+b^2的最大值为 2

D. 若$x\in(0,2)$，则$\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}\ge 2$

【答案】AD

【解析】

【分析】利用作差法比较大小判断 A，利用基本（均值）不等式判断 BCD，要注意“一正二定三相等”.

【详解】因为$a^2-ab=a(a-b)>0$，所以$a^2>ab$，

因为$ab-b^2=b(a-b)>0$，所以$ab>b^2$，所以$a^2>ab>b^2$，故 A 正确；

因为$x^2+2+\frac{1}{x^2+2}\geq 2$的等号成立条件$x^2+2=\frac{1}{x^2+2}$不成立，所以 B 错误；

因为$\frac{a^2+b^2}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=1$，所以$a^2+b^2\geq 2$，故 C 错误；

因为$\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}(x+2-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}\right)=\frac{1}{2}\left(2+\frac{2-x}{x}+\frac{x}{2-x}\right)\geq\frac{1}{2}(2+2)=2$，

当且仅当$\frac{1}{x}=\frac{1}{2-x}$，即$x=1$时，等号成立，所以 D 正确.

故选：AD

10.《黄帝内经》中的十二时辰养生法认为：子时（23 点到次日凌晨 1 点）的睡眠对一天至关重要.相关数据表明，入睡时间越晚，沉睡时间越少，睡眠指数也就越低.根据某次的抽样数据，对早睡群体和晚睡群体的睡眠指数各取 10 个.如下表：

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
早睡群体睡眠指数	65	68	75	85	85	85	88	92	92	95
晚睡群体睡眠指数	35	40	55	55	55	66	68	74	82	90

根据样本数据，下列说法正确的是（　　）

A. 早睡群体的睡眠指数一定比晚睡群体的睡眠指数高

B. 早睡群体的睡眠指数的众数为 85

C. 晚睡群体的睡眠指数的第 60 百分位数为 66

D. 早睡群体的睡眠指数的方差比晚睡群体的睡眠指数的方差小

【答案】BD

【解析】

【分析】由样本数据可判断 A；样本数据的集中程度可判断 D；由众数的概念可判断 B；由百分位数的概念可判断 C.

【详解】因为早睡群体的睡眠指数不一定比晚睡群体的睡眠指数高，所以 A 错误；

因为早睡群体的睡眠指数的 10 个样本数据中 85 出现次数最多，所以 B 正确；

因为晚睡群体的睡眠指数的第 60 百分位数为 $\frac{66+68}{2}=67$，所以 C 错误；

由样本数据可知，早睡群体的睡眠指数相对比较稳定，所以方差小，故 D 正确.

故选：BD.

11. 已知点 $A\left(0,5\right)$，$B\left(-5,0\right)$，动点 P 在圆 C：$\left(x+3\right)^2+\left(y-4\right)^2=8$ 上，则（　　）

A. 直线 AB 截圆 C 所得的弦长为 $\sqrt{6}$

B. $\triangle PAB$ 的面积的最大值为 15

C. 满足到直线 AB 的距离为 $\sqrt{2}$ 的 P 点位置共有 3 个

D. $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围为 $\left[-2-4\sqrt{5},-2+4\sqrt{5}\right]$

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据点到直线的距离公式，结合勾股定理即可求解弦长判断 A，根据三角形的面积公式，结合圆的性质即可求解 B，根据圆上的点到直线的距离的范围，即可求解 C，根据向量的数量积的运算量，结合坐标运算即可求解 D.

【详解】对于 A，因为 $A\left(0,5\right)$，$B\left(-5,0\right)$，所以直线 AB 的方程为 $x-y+5=0$，圆心 $C\left(-3,4\right)$ 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{\left|-3-4+5\right|}{\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2}}=\sqrt{2}$，又因为圆 C 的半径 $r=2\sqrt{2}$，

所以直线 AB 截圆 C 所得的弦长为 $2\times\sqrt{8-\left(\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{6}$，A 错误.

对于 B，易知 $\left|AB\right|=5\sqrt{2}$，要想 $\triangle PAB$ 的面积最大，只需点 P 到直线 AB 的距离最大，而点 P 到直线 AB 的距离的最大值为 $r+d=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，

所以 $\triangle PAB$ 的面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times5\sqrt{2}=15$，B 正确.

对于 C，当点 P 在直线 AB 上方时，点 P 到直线 AB 的距离的范围是 $\left(0,r+\sqrt{2}\right)$，即 $\left(0,3\sqrt{2}\right)$，由对称性可知，此时满足到直线 AB 的距离为 $\sqrt{2}$ 的 P 点位置有 2 个.

当点 P 在直线 AB 下方时，点 P 到直线 AB 的距离的范围是 $\left(0,r-\sqrt{2}\right]$，即 $\left(0,\sqrt{2}\right]$，此时

满足到直线 AB 的距离为 $\sqrt{2}$ 的 P 点位置只有 1 个.

综上所述，满足到直线 AB 的距离为 $\sqrt{2}$ 的 P 点位置共有 3 个，C 正确.

对于 D，由题意知 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{PC}^{2}+\overrightarrow{PC}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

又因为 $A\left(0,5\right)$，$B\left(-5,0\right)$，$C\left(-3,4\right)$，所以 $\overrightarrow{CA}=\left(3,1\right)$，$\overrightarrow{CB}=\left(-2,-4\right)$，

故 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=3\times\left(-2\right)+1\times\left(-4\right)=-10$，$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\left(1,-3\right)$.

设点 $D\left(x_0,y_0\right)$ 满足 $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}$，

则 $\overrightarrow{CD}=\left(x_0+3,y_0-4\right)$，故 $\begin{cases}x_0+3=1,\\ y_0-4=-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=-2,\\ y_0=1,\end{cases}$ 即 $D\left(-2,1\right)$，$\left|\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{10}$.

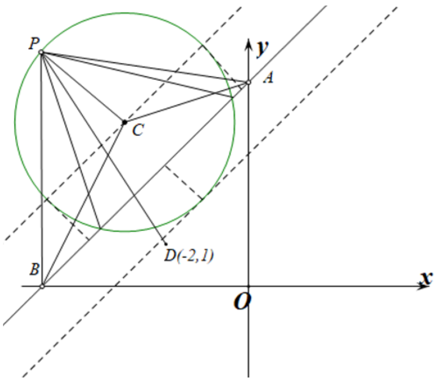
所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}^{2}+\overrightarrow{PC}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=8+\left|\overrightarrow{PC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|\cdot\cos\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CD}-10$

$=-2+2\sqrt{2}\times\sqrt{10}\cos\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CD}=-2+4\sqrt{5}\cos\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CD}$.

又因为 $4\sqrt{5}\cos\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CD}\in\left[-4\sqrt{5},4\sqrt{5}\right]$，

所以 $-2+4\sqrt{5}\cos\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CD}\in\left[-2-4\sqrt{5},-2+4\sqrt{5}\right]$，即 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围为 $[-2-4\sqrt{5}$，$-2+4\sqrt{5}]$，D 正确.

故选：BCD



12. 已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)+f(x)=f(2026)$，且 $f(x+1)-1$ 是奇函数. 则（　　）

A. $f(1)+f(3)=2$

B. $f(2023)+f(2025)=f(2024)$

C. $f(2023)$ 是 $f(2022)$ 与 $f(2024)$ 的等差中项

D. $\sum_{i=1}^{2024}f(i)=2024$

【答案】ACD

【解析】

【分析】由$f(x+2)+f(x)=f(2026)$，可推出$f(x)$的周期为4，由$f(x+1)-1$是奇函数可推出$f(1)=1$，通过赋值及函数的周期性可逐个判断各个选项.

【详解】因为$f(x+2)+f(x)=f(2026)$，

所以$f(x+4)+f(x+2)=f(2026)$，

两式相减得$f(x+4)=f(x)$，

所以$f(x)$的周期为4.

因为$f(x+1)-1$是奇函数，

所以$f(-x+1)-1=-f(x+1)+1$，所以$f(-x+1)+f(x+1)=2$，

即$f(-x)+f(x+2)=2$，

令$x=-1$，得$f(1)=1$.

因为$f(x+2)+f(x)=f(2026)=f(2)$，

令$x=2$，得$f(4)+f(2)=f(2)$，

所以$f(4)=0$，即$f(0)=0$.

因为$f(-x)+f(x+2)=2$，

令$x=0$，得$f(0)+f(2)=2$，

所以$f(2)=2$，

所以$f(x+2)+f(x)=2$，

所以$f(3)+f(1)=2$，故A正确.

因为$f(-x)+f(x+2)=2$，

所以$f(-1)+f(3)=2$，即$f(3)+f(3)=2$，所以$f(3)=1$.

因为$f(2023)+f(2025)=f(3)+f(1)=2$，$f(2024)=f(0)=0$，所以B错误.

因为$f(2022)+f(2024)=f(2)+f(0)=2$，$f(2023)=f(3)=1$，

所以$f(2022)+f(2024)=2f(2023)$，

所以$f(2023)$是$f(2022)$与$f(2024)$的等差中项，故C正确.

因为$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=\left(f(1)+f(3)\right)+f(2)+f(4)=2+2+0=4$，

所以$\sum\limits_{i=1}^{2024}f(i)=506[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]=506\times4=2024$，故D正确.

故选：ACD

【点睛】关键点睛：本题的关键是通过其奇偶性得到其周期性，再结合等差中项的含义以及赋值法一一分析选项即可.

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 若函数$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-ae^x$的图象在点$(0,f(0))$处的切线平行于$x$轴，则$a=$________.

【答案】-2

【解析】

【分析】求出函数的导数，根据导数的几何意义，即可求得答案.

【详解】由题意得$f'(x)=x-2-ae^x$，

由函数$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-ae^x$的图象在点$(0,f(0))$处的切线平行于$x$轴，

可得$f'(0)=-2-a=0$，得$a=-2$，

故答案为：-2

14. 如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=8$，$AD=6$，异面直线BD与AC_1所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{7}}{10}$，则$CC_1=$________.