第19章 四边形

专题12 特殊平行四边形的动点问题

名师点金

特殊平行四边形的动点问题是一类常见的几何动态问题，它结合了平行四边形的性质与动点的运动规律.解决这类问题通常需要利用平行四边形的性质（如对角线互相平分、对边平行且相等）以及动点的运动轨迹或速度来建立方程或不等式进行求解.

温馨提示：点击 进入讲评

答案呈现

1

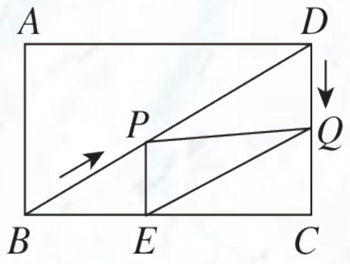
2

3

4 B

5

类型1 矩形中的动点问题



1.[2024莆田期中] 如图，矩形$ABCD$中，$CD=4$，$\angle CBD=30^{\circ}$.一动点P从B点出发沿对角线BD方向以每秒2个单位长度的速度向点D匀速运动，同时另一动点Q从D点出发沿DC方向以每秒1个单位长度的速度向点C匀速运动，当其中一个点到达终点时，另一个点也随之停止运动.设点P，Q运动的时间为t秒$(t>0)$.过点P作$PE\perp BC$于点E，连接EQ，PQ.

(1) 求证：$PE=DQ$.

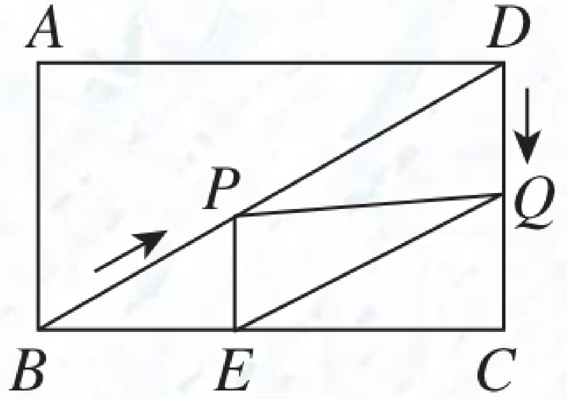
【证明】$\because PE\perp BC$, $\therefore \angle BEP=90°$.

在Rt△BEP中，由题意可知$BP=2t$，

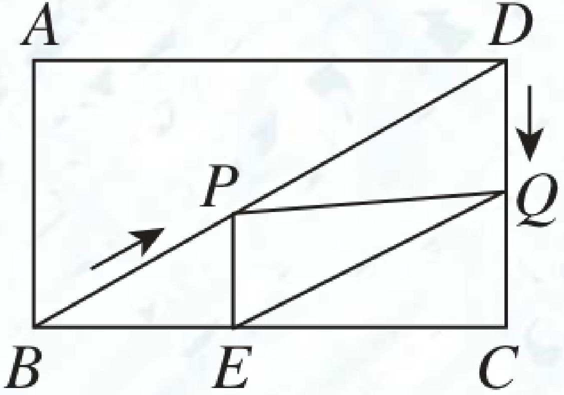
$\angle CBD=30°$,

$\therefore PE=t$.

又易知$DQ=t$，$\therefore PE=DQ$.



（2）当t为何值时，$\triangle PQE$为直角三角形？请说明理由.



【解】当$t=2$或$\frac{16}{5}$时，$\triangle PQE$为直角三角形.

理由：①当$\angle EPQ=90^\circ$ 时，$\because$ 四边形$ABCD$是矩形，

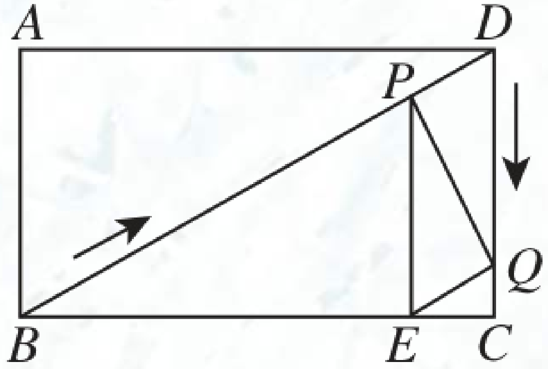
$\therefore \angle C=90^\circ$，

$\because PE\perp BC,\angle EPQ=90^\circ$，

$\therefore$ 四边形$EPQC$为矩形，$\therefore PE=QC$，

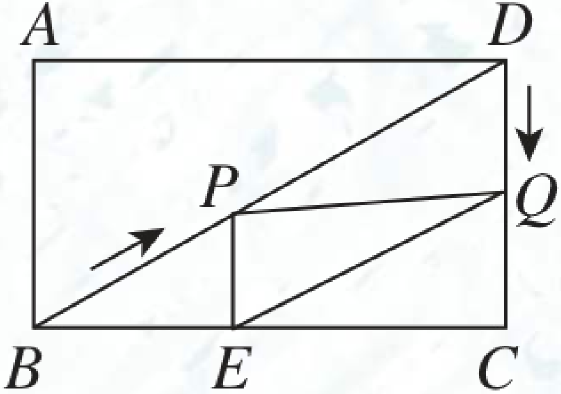
$\because$ 易知$PE=t$，$QC=4-t$，

$\therefore t=4-t$，即$t=2$.



②如图，当$\angle PQE=90^{\circ}$时，$\because \angle BEP=90^{\circ}=\angle C$，

$\therefore PE//DC$，$\therefore \angle DPQ=\angle PQE=90^{\circ}$，



在Rt$\triangle DPQ$中，易知$\angle PQD=30^{\circ}$，

$\therefore DQ=2DP$,

$\because$ 易知$DQ=t$，$DP=8-2t$，$\therefore t=2(8-2t)$，即$t=\frac{16}{5}$.

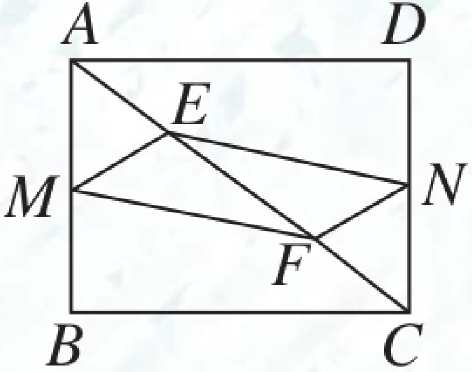
③当$\angle PEQ=90^{\circ}$ 时，此种情况不存在.

综上所述，当$t=2$或$\frac{16}{5}$时，$\triangle PQE$为直角三角形.

返回

2.[2024扬州期中] 在矩形$ABCD$中，$AB=3$，$BC=4$，E，F是直线AC上的两个动点，分别从A，C同时出发相向而行，速度均为每秒1个单位长度，运动时间为t秒$(0 \leq t \leq 7)$.

（1）如图①，M，N分别是AB，DC的中点，当t为何值时，四边形$EMFN$是矩形;

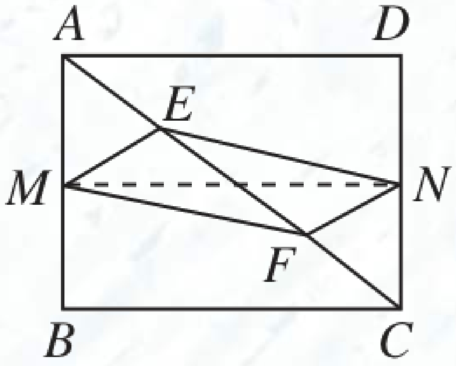


①

【解】如图①，连接MN,

$\because$ 四边形$ABCD$是矩形,

$\therefore \angle B = 90°$ ，$AB//CD, AB = CD$.



①

$\therefore \angle MAE = \angle NCF.$

$\because M$，N分别是AB,DC的中点，

$\therefore AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD = CN, AM // CN.$

$\because E$，F是直线AC上的两个动点，分别从A,C同时出发相向而行，速度均为每秒1个单位长度，运动时间为t秒，

$\therefore AE = CF = t, \therefore \triangle AEM \cong \triangle CFN.$

$\therefore ME = FN, \angle AEM = \angle CFN, \therefore \angle FEM = \angle EFN.$

$\therefore ME//FN$,$\therefore$ 四边形$EMFN$为平行四边形.

$\therefore$ 当$EF=MN$时，四边形$EMFN$为矩形.

$\because AM=CN$，$AM//CN$,$\therefore BM=CN$，$BM//CN$，$\therefore$ 四边形$BCNM$是平行四边形，

$\because \angle B=90°$ ，$\therefore$ 四边形$BCNM$是矩形，$\therefore MN=BC=4$,

$\therefore EF=MN=4$.

在Rt$\triangle ABC$中，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$,

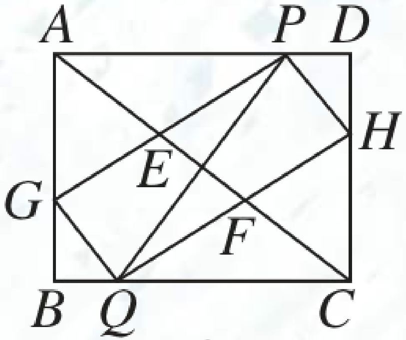
$\therefore AE=CF=\frac{1}{2}(AC-EF)=\frac{1}{2}\times(5-4)=\frac{1}{2}$或

$AE=CF=\frac{1}{2}(AC+EF)=\frac{1}{2}\times(5+4)=\frac{9}{2}$，$\therefore t=\frac{1}{2}$或$\frac{9}{2}$.

综上所述，当t为$\frac{1}{2}$或$\frac{9}{2}$时，四边形$EMFN$是矩形.

（2）若在点E，F运动的同时，点G以每秒1个单位长度的速度从A出发，沿折线$A—B—C$运动，点H以每秒1个单位长度的速度从C出发，沿折线$C—D—A$运动.

①如图②，作AC的垂直平分线分别交AD，BC于点P，Q，当四边形$PGQH$的面积是矩形$ABCD$面积的一半时，t的值为$\underline{\frac{27}{19}}$；

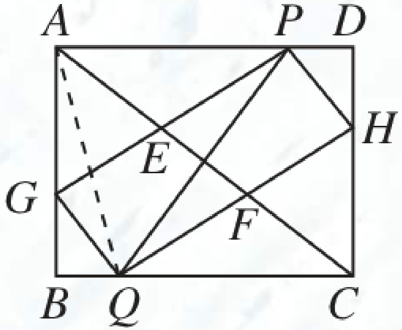


②

【点拨】如图②，连接AQ,∵ 四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore \angle B=\angle PAG=\angle QCH=90^{\circ}$ ，$AB // CD, AB=CD.$

$\therefore \angle GAE=\angle HCF.$



②

$\because PQ$垂直平分AC, $\therefore AQ = CQ$,

在Rt$\triangle ABQ$中，$AB^2 + BQ^2 = AQ^2$,

$\therefore 3^2 + BQ^2 = (4 - BQ)^2$.

解得$BQ = \frac{7}{8}$，$\therefore CQ = 4 - \frac{7}{8} = \frac{25}{8}$.

根据题意得$AG = CH = t, AE = CF$,

$\therefore \triangle AEG \cong \triangle CFH$.

$\therefore \angle AEG = \angle CFH, \angle EGA = \angle FHC$,

$\therefore \angle FEG=\angle EFH.$

$\therefore PG//QH$，$\triangle APG\cong\triangle CQH.\therefore PG=QH$，$AP=CQ=\frac{25}{8}.$

$\therefore$ 四边形$PGQH$是平行四边形，易得$\triangle PGQ\cong\triangle QHP$，

$\therefore S_{\square PGQH}=2S_{\triangle PGQ}.$

$\because$ 四边形$PGQH$的面积是矩形$ABCD$面积的一半，

$\therefore S_{\triangle PGQ}=\frac{1}{2}S_{\square PGQH}=\frac{1}{4}S_{矩形ABCD}=\frac{1}{4}\times 3\times 4=3.$

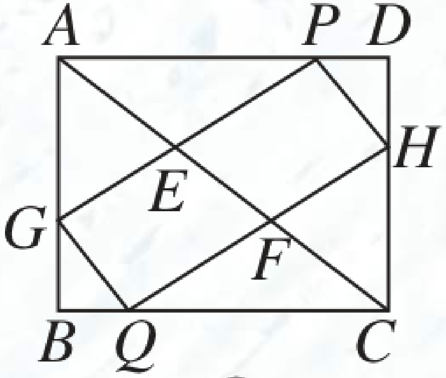
$\because S_{\triangle PGQ}=S_{梯形ABQP}-S_{\triangle PGA}-S_{\triangle BQG}$，

$\therefore \frac{1}{2}(BQ+AP)\cdot AB-\frac{1}{2}BG\cdot BQ-\frac{1}{2}AG\cdot AP=3.$

$\therefore$ 易得$\frac{1}{2}\times(\frac{7}{8}+\frac{25}{8})\times 3-\frac{1}{2}(3-t)\times\frac{7}{8}-\frac{1}{2}t\times\frac{25}{8}=3$，解得

$t=\frac{27}{19}.$

②如图③，在异于G，H所在矩形边上取P，Q，使得$PD=BQ$，顺次连接P，G，Q，H，则四边形$PGQH$周长的最小值是__10__.



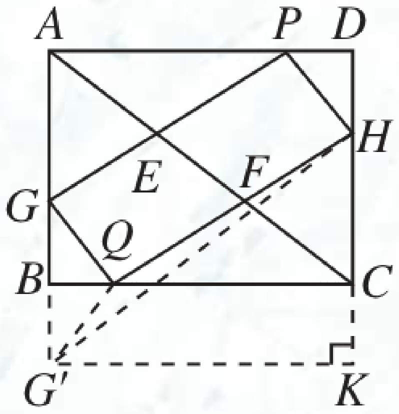
③

【点拨】如图，作点G关于BC的对称点G'，过点G'作$G'K \perp DC$交DC的延长线于K,连接$G'H,QG'$，易知$BG = BG' = CK,QG = QG'$，$G'K = BC = 4$,根据题意得$AG = CH$，

$\therefore HK = CH + CK = AG + BG = AB = 3.$

$\therefore$ 在Rt$\triangle G'HK$中，$G'H = \sqrt{G'K^2 + HK^2} = 5$，

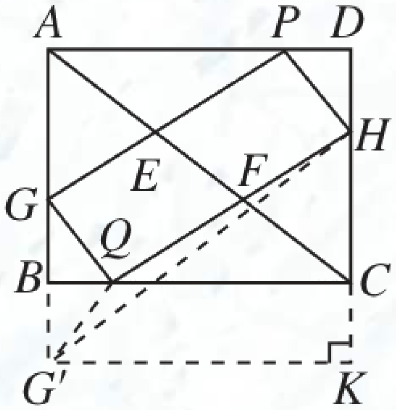
易得四边形$PGQH$是平行四边形，



$\therefore$ 四边形$PGQH$的周长为

$2QH+2GQ=2QH+2QG'\geq 2G'H$,

即当点G',Q,H三点共线时，四边形$PGQH$的周长最小，最小值为$2\times 5=10$.



返回