

专题十五 导数与函数的最值及在实际生活中的应用

【高频考点解读】

1. 会求闭区间上函数的最大值、最小值(其中多项式函数一般不超过三次).
2. 会利用导数解决某些实际问题.

【热点题型】

题型一 函数的最值与导数

例1、已知 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = \frac{a}{x} + \ln x - 1$.

- (1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程;
- (2) 求 $f(x)$ 在区间 $(0, e]$ 上的最小值.

【解析】(1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x - 1, x \in (0, +\infty)$,

所以 $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}, x \in (0, +\infty)$.

因此 $f'(2) = \frac{1}{4}$, 即曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线斜率为 $\frac{1}{4}$.

又 $f(2) = \ln 2 - \frac{1}{2}$,

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y - (\ln 2 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(x-2)$, 即 $x - 4y + 4\ln 2 - 4 = 0$.

(2) 因为 $f(x) = \frac{a}{x} + \ln x - 1$, 所以 $f'(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-a}{x^2}$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x=a$.

① 若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在区间 $(0, e]$ 上单调递增, 此时函数 $f(x)$ 无最小值.

② 若 $0 < a < e$, 当 $x \in (0, a)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, a)$ 上单调递减, 当 $x \in (a, e)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(a, e]$ 上单调递增,

所以当 $x=a$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最小值 $\ln a$.

③ 若 $a \geq e$, 则当 $x \in (0, e)$ 时, $f'(x) \leq 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, e]$ 上单调递减,

所以当 $x=e$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最小值 $\frac{a}{e}$.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, e]$ 上无最小值;

当 $0 < a < e$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, e]$ 上的最小值为 $\ln a$;

当 $a \geq e$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, e]$ 上的最小值为 $\frac{a}{e}$.

【提分秘籍】

1. 极值只能在定义域内部取得，而最值却可以在区间的端点取得，有极值的未必有最值，有最值的未必有极值；极值有可能成为最值，最值只要不在端点必定是极值。

2.

求给定区间上的函数的最值关键是判断函数在此区间上的单调性，但要注意极值点不一定是最值点，还要与端点值比较，对于含参数的函数最值，要注意分类讨论。

【举一反三】

已知函数 $f(x) = ax - \frac{2}{x} - 3\ln x$ ，其中 a 为常数。

(1) 当函数 $f(x)$ 的图象在点 $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ 处的切线的斜率为 1 时，求函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$

上的最小值；

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上既有极大值又有极小值，求 a 的取值范围；

解析：(1) 由题意可知 $f'\left(\frac{2}{3}\right) = 1$ ，解得 $a = 1$ 。

故 $f(x) = x - \frac{2}{x} - 3\ln x$ ， $\therefore f'(x) = \frac{x-1x-2}{x^2}$ ，由 $f'(x) = 0$ ，得 $x = 2$ 。

于是可得下表：

x	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}, 2\right)$	2	$(2, 3)$	3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$			$1 - 3\ln 2$		

$\therefore f(x)_{\min} = f(2) = 1 - 3\ln 2$ 。

(2) $f'(x) = a + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} = \frac{ax^2 - 3x + 2}{x^2} (x > 0)$ ，

由题意可得方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 有两个不等的正实根，不妨设这两个根为 x_1, x_2 ，并令 $h(x) = ax^2 - 3x + 2$ ，

2,

$$\text{则} \begin{cases} \Delta = 9 - 8a > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{3}{a} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{2}{a} > 0 \end{cases} \quad (\text{也可以为} \begin{cases} \Delta = 9 - 8a > 0 \\ -\frac{3}{2a} > 0 \\ h(0) > 0 \end{cases}),$$

解得 $0 < a < \frac{9}{8}$ 。

【热点题型】

题型二 生活中的优化问题

例2、某商场根据调查，估计家电商品从年初(1月)开始的 x 个月内累计的需求量 $p(x)$

(单位：百件)满足 $p(x) = \frac{x}{2}(39x - 2x^2 + 41)$ ($1 \leq x \leq 12$ 且 $x \in \mathbb{N}^*$).

(1) 求第 x 个月的需求量 $f(x)$ 的表达式；

(2) 若第 x 个月的销售量满足 $g(x) = \begin{cases} f(x) - 21x & 1 \leq x < 7, x \in \mathbb{N}^* \\ \frac{x^2}{e^x} \left(\frac{1}{3}x^2 - 10x + 96 \right) & 7 \leq x \leq 12, x \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

(单位：百件)，每件利润 $q(x) = 100e^{x-6}$ 元，求该商场销售该商品，第几个月的月利润达到最大值，最大是多少？(e^6 取值为 403)

【解析】 (1) 当 $x \geq 2$ 时， $f(x) = p(x) - p(x-1) = -3x^2 + 42x$ ，

当 $x=1$ 时， $p(x)=39$ ，也满足上式，

$\therefore f(x) = -3x^2 + 42x$ ($1 \leq x \leq 12$ 且 $x \in \mathbb{N}^*$).

(2) 设该商场第 x 个月的月利润为 $\omega(x)$ 元，则

① 当 $1 \leq x < 7$ ， $x \in \mathbb{N}^*$ 时， $\omega(x) = (-3x^2 + 42x - 21x) \cdot \frac{10\,000e^{x-6}}{x} = 30\,000(7-x)e^{x-6}$ ，

$\omega'(x) = 30\,000(6-x)e^{x-6}$ ，令 $\omega'(x) = 0$ ，得 $x=6$ 。则 $\omega(x)$ 在 $[1, 6]$ 上单调递增，在 $[6, 7)$ 上单调递减，

$\therefore \omega(x)_{\max} = \omega(6) = 30\,000$ 。

② 当 $7 \leq x \leq 12$ ， $x \in \mathbb{N}^*$ 时， $\omega(x) = \frac{x^2}{e^x} \left(\frac{1}{3}x^2 - 10x + 96 \right) \cdot \frac{10\,000e^{x-6}}{x} = 10\,000 \left(\frac{1}{3}x^3 - 10x^2 + 96x \right) e^{-6}$ ，

$\omega'(x) = 10\,000(x-12)(x-8)e^{-6}$ ， $\therefore \omega(x)$ 在 $[7, 8]$ 上单调递增，在 $[8, 12]$ 上单调递减，

$\omega(x)_{\max} = \omega(8) < 30\,000$ 。

综上所述，第 6 个月的月利润最大，是 30 000 元。

【提分秘籍】 利用导数解决生活中优化问题的一般步骤

(1) 分析实际问题中各量之间的关系，列出实际问题的数学模型，写出实际问题中变量之间的函数关系 $y = f(x)$ ，根据实际意义确定定义域；

(2) 求函数 $y = f(x)$ 的导数 $f'(x)$ ，解方程 $f'(x) = 0$ 得出定义域内的实根，确定极值点；

(3) 比较函数在区间端点和极值点处的函数值大小，获得所求的最大(小)值；

(4) 还原到原实际问题中作答。

【举一反三】

某玩具厂生产一种儿童智力玩具，每个玩具的材料成本为 20 元，加工费为 t 元 (t 为常数，且 $2 \leq t \leq 5$)，出厂价为 x 元 ($25 \leq x \leq 40$)。根据市场调查知，日销售量 q (单位：个) 与 e^x 成反比，且当每个玩具的出厂价为 30 元时，日销售量为 100 个。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/816033205034010225>