# 专题 1.3　根的判别式【十大题型】

**【苏科版】**

## ▶ 题型梳理



## ▶ 举一反三

**【知识点　一元二次方程根的判别式】**

一元二次方程根的判别式：$\Delta=b^2-4ac$.

①当$\Delta=b^2-4ac>0$时，原方程有两个不等的实数根；

②当$\Delta=b^2-4ac=0$时，原方程有两个相等的实数根；

③当$\Delta=b^2-4ac<0$时，原方程没有实数根.

**【题型 1　判断不含字母的一元二次方程的根的情况】**

【例 1】（2023 春·山东青岛·九年级统考期末）下列方程中，有两个相等实数根的是（　）

A．$x^2-2x+1=0$　B．$x^2+1=0$　C．$x^2-2x-3=0$　D．$x^2-2x=0$

【答案】A

【分析】根据各选项中各方程的系数，利用根的判别式$\Delta=b^2-4ac$可求出各方程的根的判别式Δ的值，根据当$\Delta=0$时，方程有两个相等的实数根即可得出结论.

【详解】解：A．$\because a=1$，$b=-2$，$c=1$，

$\therefore\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times1=0$，

∴方程有两个相等实数根，故选项符合题意；

B．$\because a=1$，$b=0$，$c=1$，

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0 - 4 < 0$，

∴方程无实数根，故选项不符合题意；

C．$\because a = 1$，$b = -2$，$c = -3$，

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$，

∴方程有两个不相等的实数根，故选项不符合题意；

D．$\because a = 1$，$b = -2$，$c = 0$，

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 0 = 4 > 0$，

∴方程有两个不相等实数根，故选项不符合题意；

故选：A．

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式，牢记"①当$\Delta > 0$时，方程有两个不相等的实数根；②当$\Delta = 0$时，方程有两个相等的实数根；③当$\Delta < 0$时，方程无实数根"是解题的关键．

【变式 1-1】（2023 春·九年级课时练习）一元二次方程 $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$ 的实数根的个数是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．无法判断 1

【答案】B

【详解】试题解析：$\because \Delta = b^2 - 4ac = 8 - 8 = 0$，

∴方程有两个相等的实数根；

故选 B.

【变式 1-2】（2023 春·江西·九年级统考阶段练习）下列一元二次方程没有实数根的是（　）

A．$x^2 + 1 = 0$　　B．$x^2 + 2x + 1 = 0$　　C．$x^2 = 4$　　D．$x^2 + x - 2 = 0$

【分析】根据一元二次方程的系数及根的判别式，逐一求出选项中一元二次方程的根的判别式△的值，△<0的选项即为答案.

【详解】解：A 选项：∵△=$0^2$－4×1×1=－4<0，

∴方程$x^2 + 1 = 0$没有实数根，

∴A 选项符合题意.

B 选项：∵△=$2^2$－4×1×1=0，

∴方程$x^2 + 2x + 1 = 0$有两个相等实数根，

∴B 选项不符合题意.

C 选项：∵△=$0^2$－4×1×（－4）=16>0，

∴方程$x^2 = 4$有两个不相等实数根，

∴C 选项不符合题意.

D 选项：∵△=$1^2$－4×1×（－2）=9＞0，

∴方程$x^2+x-2=0$有两个不相等实数根，

∴D 选项不符合题意.

故答案选：A

【点睛】本题考查了根的判别式，熟记"当△＜0，一元二次方程没有实数根"是解题的关键.

【变式 1-3】（2023 春·上海长宁·九年级上海市延安初级中学校考期中）在下列方程中，有实数根的是（　）

A．$x^2+2x+3=0$　　B．$\sqrt{4x+1}+1=0$

C．$\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x-1}$　　D．$x^3+8=0$

【答案】D

【分析】根据一元二次方程根的判别式，即可判断 A；根据二次根式有意义的条件，即可判断 B；根据分式有意义的条件，即可判断 C；根据立方根的定义，即可判断 D.

【详解】解：A、∵$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times3=-8<0$，∴该方程无实数根，不符合题意；

B、移项，得：$\sqrt{4x+1}=-1$，∵$\sqrt{4x+1}\geq0$，∴该方程无实数根，不符合题意；

C、去分母，得：$x=1$，当$x=1$时，$x-1=0$，∴该方程无实数根，不符合题意；

D、移项，得：$x^3=-8$，解得：$x=-2$，∴该方程有实数根，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程根的判别式；二次根式有意义的条件；分式有意义的条件；立方根的定义；解题的关键是熟练掌握相关知识点，并灵活运用.

**【题型 2　判断含字母的一元二次方程的根的情况】**

【例 2】（2023 春·安徽合肥·九年级统考期中）已知关于 $x$ 的方程$ax^2-(1-a)x-1=0$，下列说法正确的是（　　）

A．当$a=0$时，方程无实数解　　B．当$a\neq0$时，方程有两个相等的实数解

C．当$a=-1$时，方程有两个不相等的实数解　D．当$a=-1$时，方程有两个相等的实数解

【答案】D

【分析】直接利用一元二次方程根的判别式分析求出即可.

【详解】解：A、当$a=0$时，方程为$x-1=0$，

解得$x=1$，

故当$a=0$时，方程有一个实数根，故 A 不符合题意；

B、当$a\neq 0$时，关于$x$的方程$ax^2-(1-a)x-1=0$为一元二次方程，

∴ $\Delta=(1-a)^2+4a=(1+a)^2\geq 0$，

∴当$a\neq 0$时，方程有相等的实数根，故 B 不符合题意，

CD、当$a=-1$时，关于$x$的方程为$-x^2+2x-1=0$为一元二次方程，

∵ $\Delta=4-4=0$，

∴当$a=-1$时，方程有两个相等的实数根，故 C 不符合题意，D 符合题意．

故选：D．

【点睛】此题主要考查了一元二次方程的定义，根的判别式，正确把握其定义是解题关键．

【变式 2-1】（2023·河北邯郸·统考一模）已知 $a$、$c$ 互为相反数，则关于 $x$ 的方程$ax^2+5x+c=0(a\neq 0)$根的情况（　）

A．有两个不相等的实数根　　B．有两个相等的实数根

C．无实数根　　D．有一根为 5

【答案】A

【分析】由一元二次方程根的判别式即可得到答案．

【详解】解：关于$x$的方程$ax^2+5x+c=0(a\neq 0)$根的判别式为$25-4ac$，

∵$a$、$c$互为相反数

∴$ac<0$

∴$25-4ac>0$．

故选：A．

【点睛】本题考查从根的判别式判断方程根的情况，熟练掌握相关知识是解题的关键．

【变式 2-2】（2023·全国·九年级专题练习）已知关于 x 的方程 $x^2-2x-m=0$ 没有实数根，试判断关于 x 的方程 $x^2+2mx+m(m+1)=0$ 的根的情况．

【答案】方程 $x^2+2mx+m(m+1)=0$ 有两个不相等的实数根，理由见解析

【分析】首先根据已知方程无实根可得 $\Delta_1<0$，可求出 m 的取值范围，再计算新方程的判别式，结合 m 的取值范围确定新方程判别式 $\Delta_2$ 的情况，进而得出新方程根的情况即可．

【详解】∵$x^2-2x-m=0$ 没有实数根，

∴$\Delta_1=(-2)^2-4\cdot(-m)=4+4m<0$，即 $m<-1$．

对于方程 $x^2+2mx+m(m+1)=0$，

$\Delta_2=(2m)^2-4m(m+1)=-4m>4$，

∴方程 $x^2+2mx+m(m+1)=0$ 有两个不相等的实数根．

【点睛】本题考查了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的根的判别式$\Delta=b^2-4ac$：当△＞0，方程有两个不相等的实数根；当△=0，方程有两个相等的实数根；当△＜0，方程没有实数根．

【变式 2-3】（2023 春·福建厦门·九年级厦门市松柏中学校考期末）关于 $x$ 的一元二次方程$x^2-5x+c=0$，当$c=t_0$时，方程有两个相等的实数根：若将 $c$ 的值在$t_0$的基础上增大，则此时方程根的情况是（　　）

A．没有实数根　　B．两个相等的实数根

C．两个不相等的实数根　　D．一个实数根

【答案】A

【分析】先求解$t_0=\frac{25}{4}$，再判断当$c=t>t_0=\frac{25}{4}$，方程$x^2-5x+t=0$的根的判别式的值的情况，从而可得答案．

【详解】解：∵关于 $x$ 的一元二次方程$x^2-5x+c=0$，当$c=t_0$时，方程有两个相等的实数根，

∴$x^2-5x+t_0=0$有两个相等的实数根，

∴ $\Delta=(-5)^2-4t_0=0$，

解得：$t_0=\frac{25}{4}$，

当$c=t>t_0=\frac{25}{4}$，方程化为$x^2-5x+t=0$，

∴ $\Delta=(-5)^2-4t=25-4t$，

由$t>\frac{25}{4}$，则$4t>25$，

∴$25-4t<0$，

∴此时方程没有实数根．

故选 A

【点睛】本题考查的是一元二次方程根的判别式，熟记根的判别式的含义是解本题的关键．

**【题型 3　由方程根的情况确定字母的值或取值范围】**

【例 3】(2023 春·浙江舟山·九年级校联考期中）在实数范围内，存在 2 个不同的$x$的值，使代数式$x^2-3x+c$与代数式$x+2$值相等，则$c$的取值范围是_________．

【答案】$c<6$

【分析】根据题意可得方程$x^2-3x+c=x+2$有两个不相等的根，即判别式$\Delta>0$，即可求解．

【详解】解：由题意得，方程$x^2-3x+c=x+2$有两个不相等的根，

$x^2-3x+c=x+2$整理得$x^2-4x+c-2=0$，

$\therefore \Delta=(-4)^2-4\times1\times(c-2)>0$，

解得：$c<6$，

故答案为：$c<6$．

【点睛】本题考查了根据一元二次方程根的情况求参数，熟练掌握一元二次方程的判别式与根的关系是解题的关键．

【变式 3-1】（2023 春·北京西城·九年级北京市第三十五中学校考期中）已知关于 $x$ 的方程$mx^2-3x+1=0$无实数解，则 $m$ 取到的最小正整数值是______．

【答案】3

【分析】根据一元二次方程的定义，一元二次方程根的判别式列出不等式，即可求解．

【详解】解：∵关于 $x$ 的方程$mx^2-3x+1=0$无实数解，

当$m=0$时，原方程为一元一次方程，有解，

当$m\neq0$时，原方程为一元二次方程，

$\therefore\Delta=b^2-4ac=9-4m<0$，

解得：$m>\frac{9}{4}$，

∴则 $m$ 取到的最小正整数值是3，

故答案为：3．

【点睛】本题考查了一元二次方程的定义，一元二次方程根的判别式，熟练掌握一元二次方程根的判别式的意义是解题的关键．

【变式 3-2】（2023 春·广西梧州·九年级校考期中）关于 $x$ 的方程$x^2+2(m-2)x+m^2-3m+3=0$．

(1)有两个不相等的实数根，求 $m$ 的取值范围；

(2)若方程有实数根，而且 $m$ 为非负整数，求方程的根．

【答案】(1)$m<1$

(2)$x=3$或$x=1$

【分析】（1）根据一元二次方程根的判别式，即可求解；

（2）首先根据$m<1$且 $m$ 为非负整数，可求得$m=0$，再解方程即可求解．

【详解】（1）解：∵关于 $x$ 的方程$x^2+2(m-2)x+m^2-3m+3=0$有两个不相等的实数根，

$\therefore \Delta=[2(m-2)]^2-4\times1\times(m^2-3m+3)>0$，

解得$m < 1$，

故 $m$ 的取值范围为$m < 1$；

（2）解：∵关于 $x$ 的方程$x^2 + 2(m-2)x + m^2 - 3m + 3 = 0$有实数根，

$\therefore \Delta = [2(m-2)]^2 - 4 \times 1 \times (m^2 - 3m + 3) \geq 0$，

解得$m \leq 1$，

$\because m$为非负整数，

$\therefore m = 0$或$m = 1$，

当$m = 0$时，原方程化为$x^2 - 4x + 3 = 0$，

解得$x_1 = 3$，$x_2 = 1$；

当$m = 1$时，原方程化为$x^2 - 2x + 1 = 0$，

解得$x_3 = x_4 = 1$，

所以，原方程的解为$x = 3$或$x = 1$.

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式及解法，熟练掌握和运用一元二次方程根的判别式及解法是解决本题的关键.

【变式 3-3】（2023 春·北京平谷·九年级统考期末）关于 $x$ 的一元二次方程$ax^2 - 2ax + b + 1 = 0$（$ab≠0$）有两个相等的实数根$k$，则下列选项成立的是（　）

A．若﹣1＜$a$＜0，则$\frac{k}{a} > \frac{k}{b}$　　　　B．若$\frac{k}{a} > \frac{k}{b}$，则 0＜$a$＜1

C．若 0＜$a$＜1，则$\frac{k}{a} < \frac{k}{b}$　　　　D．若$\frac{k}{a} < \frac{k}{b}$，则-1＜$a$＜0

【答案】B

【分析】根据一元二次方程的根的情况利用判别式求得 $a$ 与 $b$ 的数量关系，再代入方程求 $k$ 的值，然后结合 $a$ 的取值范围和分式加减法运算法则计算求解.

【详解】解：∵关于 $x$ 的一元二次方程$ax^2 - 2ax + b + 1 = 0$（$ab≠0$）有两个相等的实数根 $k$，

$\therefore\ \Delta = (-2a)^2 - 4a(b + 1) = 0$，

$4a^2 - 4ab - 4a = 0$，

又$\because ab \neq 0$，

$\therefore a-b-1=0$，即 $a=b+1$，

$\therefore ax^2-2ax+a=0$，

解得：$x_1=x_2=1$，

∴$k$=1，

$\frac{k}{a}-\frac{k}{b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a-1}=-\frac{1}{a(a-1)}$

当$\frac{k}{a}>\frac{k}{b}$时，即$\frac{k}{a}-\frac{k}{b}>0$，

即$-\frac{1}{a(a-1)}>0$，

∴$a$（$a$-1）<0，

即$\begin{cases}a<0\\a-1>0\end{cases}$或$\begin{cases}a>0\\a-1<0\end{cases}$

解得 0<$a$<1

当$\frac{k}{a}<\frac{k}{b}$时，即$\frac{k}{a}-\frac{k}{b}<0$，

即$-\frac{1}{a(a-1)}<0$，

∴$a$（$a$-1）>0，

即$\begin{cases}a>0\\a-1>0\end{cases}$或$\begin{cases}a<0\\a-1<0\end{cases}$

解得：$a$>1 或 $a$<0.

故选：B.

【点睛】本题考查一元二次方程的根的判别式，根据一元二次方程根的情况求得 $a$ 与 $b$ 之间的等量关系是解题关键.

**【题型 4　应用根的判别式证明方程根的情况】**

【例 4】（2023 春·广东珠海·九年级统考期末）已知关于 $x$ 的一元二次方程$x^2-2mx+m^2-1=0$.

(1)求证：方程总有两个实数根；

(2)若方程的一根大于 2，一根小于 1，求 $m$ 的取值范围.

【答案】(1)见解析

(2)$1<m<2$

【分析】（1）表示出Δ，根据Δ的数值判断即可；

（2）利用公式求出两根，根据两根及其条件列出不等式，并解不等式即可.

【详解】（1）解：依题意，得

∵$\Delta=(-2m)^2-4\times1\times(m^2-1)=4m^2-4m^2+4=4>0$

∴方程总有两个实数根；

（2）解：方程$x^2-2mx+m^2-1=0$

由（1）得$\Delta=4$

$\therefore x=\frac{-(-2m)\pm\sqrt{4}}{2\times1}=m\pm1$，$\therefore x_1=m+1$，$x_2=m-1$，

$\because$方程的一根大于 2，一根小于 1，$m+1>m-1$

$\therefore\begin{cases}m+1>2\\m-1<1\end{cases}$

$\therefore 1<m<2$.

$\therefore m$ 的取值范围是$1<m<2$.

【点睛】本题考查了一元二次方程，相关知识点有：根的判别式、解一元二次方程等，熟悉一元二次方程的知识点是解题关键.

【变式 4-1】（2023 春·九年级课时练习）已知关于 $x$ 的一元二次方程$2x^2+2mx+m-1=0$，求证：不论$m$为什么实数，这个方程总有两个不相等实数根.

【答案】见解析

【分析】根据一元二次方程根的判别式的意义计算证明即可.

【详解】证明：$\triangle=b^2-4ac=(2m)^2-4\times2\times(m-1)=4m^2-8m+8=4(m-1)^2+4$，

$\because 4(m-1)^2\geq0$，

$\therefore 4(m-1)^2+4>0$，即$\triangle>0$，

$\therefore$不论$m$为什么实数，这个方程总有两个不相等的实数根.

【点睛】本题主要考查根的判别式，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的根与 $\Delta=b^2-4ac$ 有如下关系：①当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；②当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根；③当 $\Delta<0$ 时，方程无实数根.

【变式 4-2】（2023 春·九年级课时练习）已知关于 $x$ 的一元二次方程$x^2-3x+2=m(x-1)$.

(1)求证：方程总有两个实数根；

(2)若方程两个根的差是 2，求实数$m$的值.

【答案】(1)见详解

(2)1 或$-3$

【分析】（1）将方程化为一般形式，计算判别式即可；

（2）由因式分解法求出方程的解，根据两个根的差是 2 方程即可求出 $m$.

（1）证明：$x^2-(m+3)x+m+2=0$，$\because\Delta=(m+3)^2-4(m+2)=(m+1)^2\geq 0$，$\therefore$方程总有两个实数根；

（2）解：$x^2-(m+3)x+m+2=0$，$\therefore$（$x$-1）（$x$-$m$-2）=0，$\therefore x_1=1$，$x_2=m+2$，$\because$方程两个根的差是 2，$\therefore$若 $m+2-1=2$，则$m=1$；若$1-(m+2)=2$，则$m=-3$．$\therefore$实数$m$的值为 1 或$-3$．

【点睛】此题考查了一元二次方程根的判别式得到方程的根的情况，解一元二次方程，正确掌握一元二次方程的知识是解题的关键．

【变式 4-3】（2023 春·九年级课时练习）已知关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2$ -（$m$ - 2）$x$+2$m$ - 8＝0．

(1)求证：方程总有两个实数根．

(2)若方程有一个根是负整数，求正整数 $m$ 的值．

【答案】(1)见解析

(2)1 或 2 或 3

【分析】（1）先计算根的判别式的值得到 $\Delta$=（$m$-6）$^2\geq 0$，然后根据根的判别式的意义得到结论；

（2）利用求根公式得到 $x_1=m-4$，$x_2=2$，则 $m-4<0$，从而得到正整数 $m$ 的值．

【详解】（1）解：证明：$\because\Delta$=（$m$-2）$^2$-4（2$m$-8）

$=m^2-12m+36$

=（$m$-6）$^2\geq 0$，

$\therefore$方程总有两个实数根；

（2）$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{m-2\pm|m-6|}{2}$，

$\therefore x_1=m-4$，$x_2=2$，

$\because$方程有一个根是负整数，

$\therefore m-4<0$，

$\therefore$正整数 $m$ 的值为 1 或 2 或 3．

【点睛】本题考查了根的判别式：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的根与 $\Delta=b^2-4ac$ 有如下关系：当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta<0$ 时，方程无实数根．

**【题型 5　应用根的判别式求代数式的取值范围】**

【例 5】（2023 春·浙江温州·九年级校考期中）已知关于$x$的一元二次方程$x^2-2x+3m=0$有实数根，设此方程的一个实数根为$t$，令$y=t^2-2t+4m+1$，则$y$的取值范围为___________．

【答案】$y\leq 4$

【分析】由一元二次方程根的判别式先求解$m\leq 3$，根据一元二次方程的解的定义得出$t^2-2t=3m$代入代数

式，进而即可求解．

【详解】解：∵ 关于 $x$ 的一元二次方程$x^2-2x+3m=0$有实数根，

$\therefore \triangle=b^2-4ac=4-12m\geq 0$，

解得：$m\leq 3$，

设此方程的一个实数根为$t$，

$\therefore t^2-2t=-3m$

$\therefore\ y=t^2-2t+4m+1$

$=-3m+4m+1$

$=m+1$

$\because m\leq 3$

$\therefore m+1\leq 4$ 即$y\leq 4$

故答案为：$y\leq 4$．

【点睛】本题考查的是一元二次方程根的判别式，一元二次方程的解的定义，不等式的性质，熟练的运用一元二次方程根的判别式是解本题的关键．

【变式 5-1】（2023 春·安徽合肥·九年级统考期中）关于 $x$ 的一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有两个相等的实数根 $x_0$，则下列关于$2ax_0+b$的值判断正确的是（　　）

A．$2ax_0+b>0$　B．$2ax_0+b=0$　C．$2ax_0+b<0$　D．$2ax_0+b\leq 0$

【答案】B

【分析】根据方程有两个相等的实数根，得到根的判别式等于 0，表示出这个根，即可得到结论．

【详解】解：∵关于$x$的一元二次方程$ax^2+bx+c=0$有两个相等的实数根$x_0$，

$\therefore b^2-4ac=0$，且$x_0=\frac{-b}{2a}$，

则$2ax_0+b=2a\cdot\frac{-b}{2a}+b=-b+b=0$．

故选：B．

【点睛】此题考查了根的判别式，熟练掌握一元二次方程根的判别式的意义是解本题的关键．

【变式 5-2】（2023 春·浙江宁波·九年级统考期末）已知实数$m$,$n$满足$m^2-mn+n^2=3$，设$P=m^2+mn-n^2$，则$P$的最大值为（　）

A．3　B．4　C．5　D．6

【答案】C

【分析】由原式得，$P=2m^2-3$．将$m^2-mn+n^2=3$看成关于$n$的一元二次方程，根据方程有实数解，所以$\Delta=m^2-4(m^2-3)\geq 0$，可得$m^2\leq 4$，进而得出结论．

【详解】解：将两个等式相加得：$P+3=2m^2$，则$P=2m^2-3$．

要求$P$的最大值，只需求出$m^2$的最大值．

将$m^2-mn+n^2=3$看成关于$n$的一元二次方程，整理得：$n^2-mn+m^2-3=0$．

根据方程有实数解，所以$\Delta=m^2-4(m^2-3)\geq 0$．

可得$m^2\leq 4$，即$m^2$的最大值为4．

所以当$m^2=4$时，$P$的最大值为5．

故选：C

【点睛】本题考查等式性质，一元二次方程根的判别式，将含有多个参数的等式理解为含参数的一元二次方程，从而运用方程的知识解决问题是解题的关键．

【变式5-3】（2023春·浙江杭州·九年级校考期中）已知关于$x$的一元二次方程$x^2-2x+m=0$有两个不相等的实数根，设此方程的一个实数根为$b$，令$y=4b^2-8b+3m+2$，则（　）

A．$y>1$　　B．$y\geq 1$　　C．$y\leq 1$　　D．$y<1$

【答案】A

【分析】先根据一元二次方程根的判别式得到$m<1$，再根据一元二次方程解的定义求出$4b^2-8b=-4m$，进而推出$y=-m+2$，由此求解即可．

【详解】解：∵关于$x$的一元二次方程$x^2-2x+m=0$有两个不相等的实数根，

∴$\Delta=(-2)^2-4m>0$，

∴$m<1$，

∵此方程的一个实数根为$b$，

∴$b^2-2b+m=0$，

∴$b^2-2b=-m$，

∴$4b^2-8b=-4m$，

∴$y=4b^2-8b+3m+2=-4m+3m+2=-m+2$，

∵$m<1$，即$-m>-1$

∴$y=-m+2>1$，

故选A．

【点睛】本题主要考查了一元二次方程根的判别式和一元二次方程解的定义，对于一元二次方程$ax^2$

$+bx+c=0(a\neq 0)$，若$\Delta=b^2-4ac>0$，则方程有两个不相等的实数根，若$\Delta=b^2-4ac=0$，则方程有两个相等的实数根，若$\Delta=b^2-4ac<0$，则方程没有实数根.

**【题型 6　根的判别式与不等式、分式、函数等知识的综合】**

【例 6】（2023 春·重庆北碚·九年级西南大学附中校考期中）若关于 $x$ 的一元一次不等式组$\begin{cases}\frac{3x+8}{2}\leq x+6\\3x+a>4x-5\end{cases}$的解集为$x\leq 4$，关于 $x$ 的一元二次方程$(a-1)x^2+3x+1=0$有实数根，则所有满足条件的整数 $a$ 的值之和是________.

【答案】5

【分析】先求出不等式组中不等式的解集，根据不等式组的解集求出$a$的范围，再根据根的判别式得出$\Delta>0$，求出$a$的范围，最后取符合条件的整数$a$即可.

【详解】解：解不等式$\frac{3x+8}{2}\leq x+6$得：$x\leq 4$，

解不等式$3x+a>4x-5$得：$x<a+5$，

∵关于 $x$ 的一元一次不等式组$\begin{cases}\frac{3x+8}{2}\leq x+6\\3x+a>4x-5\end{cases}$的解集为$x\leq 4$，

∴$a+5>4$，解得$a>-1$，

∵关于 $x$ 的一元二次方程$(a-1)x^2+3x+1=0$有实数根，

∴$\Delta=3^2-4(a-1)\geq 0$，$a-1\neq 0$，

解得$a\leq\frac{13}{4}$且$a\neq 1$，

综上所述，$-1<a\leq 3\frac{1}{4}$且$a\neq 1$，

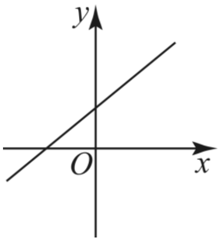
∴所有满足条件的整数 $a$ 的值是0、2、3，

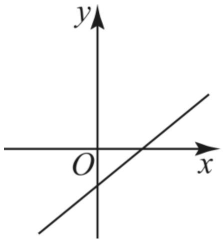
∴所有满足条件的整数 $a$ 的值之和是$0+2+3=5$，

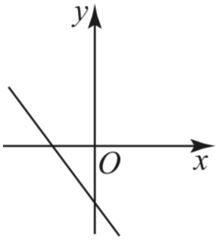
故答案为：5.

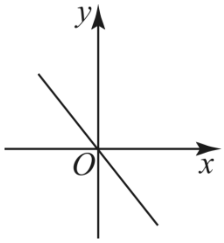
【点睛】本题考查了解一元一次不等式组和根的判别式，能求出 a 的取值范围是解此题的关键，特别注意$a\neq 1$.

【变式 6-1】（2023 春·安徽安庆·九年级安庆市第四中学校考期末）若关于 $x$ 的一元二次方程$x^2+2x+kb+1=0$有两个不相等的实数根，则一次函数$y=kx+b$的大致图象可能是（　　）

A. 

B. 


C. 

D. 


【答案】B

【分析】利用判别式的意义得到$\Delta=2^2-4(kb+1)>0$，则$kb<0$，然后根据一次函数的性质对各选项进行判断.

【详解】解：∵关于 $x$ 的一元二次方程$x^2+2x+kb+1=0$有两个不相等的实数根，

$\therefore \Delta=2^2-4(kb+1)>0$，

$\therefore kb<0$，

当$k>0$，$b<0$时，一次函数经过第一、三、四象限；

当$k<0$，$b>0$时，一次函数经过第一、二、四象限.

故选：B.

【点睛】本题主要考查了一元二次函数根的判别式，一次函数的图象和性质，解题的关键是掌握$\Delta=b^2-4ac>0$，则方程有两根不相等的实数根；$\Delta=b^2-4ac=0$，则方程有两根相等的实数根；$\Delta=b^2-4ac<0$，则方程有没有实数根.

【变式 6-2】（2023 春·九年级课时练习）要使关于 x 的一元二次方程$ax^2+2x-1=0$有两个实数根，且使关于 x 的分式方程$\frac{x}{x-4}+\frac{a+2}{4-x}=2$的解为非负数的所有整数$a$的个数为（　）

A．5 个　　B．6 个　　C．7 个　　D．8 个

【答案】B

【分析】根据一元二次方程根的情况得到$a\neq0$且$\Delta=2^2-4a\cdot(-1)\geq0$解得：$a\geq-1$且$a\neq0$，再把分式方程化简求值得：$x=-a+6$，因为解为非负数，$-a+6\geq0$且$-a+6\neq4$即$a\leq6$且$a\neq2$，所以$-1\leq a\leq6$且$a\neq0,a\neq2$，即可得出满足题意的整数解.

【详解】解：关于 x 的一元二次方程$ax^2+2x-1=0$有两个实数根

则$\begin{cases} a \neq 0 \\ \varDelta = 2^2 - 4a\cdot(-1) \gg 0 \end{cases}$

$\therefore a \geq -1$且$a \neq 0$

关于 x 的分式方程$\frac{x}{x-4} + \frac{a+2}{4-x} = 2$

去分母得：$x-(a+2) = 2(x-4)$

解得：$x = -a + 6$

$\because$ 分式方程的解为非负数

$\therefore -a + 6 \geq 0$且$-a + 6 \neq 4$即$a \leq 6$且$a \neq 2$

$\therefore -1 \leq a \leq 6$且$a \neq 0, a \neq 2$

$\therefore$ 满足题意的整数$a$的值为$-1,1,3,4,5,6$

故答案为：B．

【点睛】本题考查一元二次方程根的情况、分式方程的解，注意二次项系数不为 0 及分式方程的解要有意义，这是此题的易错点．

【变式 6-3】（2023·湖北武汉·校联考模拟预测）已知$a$，$b$为正整数，且满足$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \frac{4}{49}$，则$a + b$的值为（　）

A．4　　B．10　　C．12　　D．16

【答案】D

【分析】将已知方程整理为一元二次方程，结合方程根的情况，得出$k$的取值范围，再代入方程即可求解．

【详解】解：$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \frac{4}{49}$变形得，$49(a+b) = 4(a^2 + ab + b^2)$，

$\because a$，$b$为正整数，

$\therefore$存在正整数$k$，使得$a + b = 4k$①，

$\therefore a^2 + ab + b^2 = 49k$，即$(a+b)^2 - ab = 49k$，

$\therefore ab = (a+b)^2 - 49k = 16k^2 - 49k$②，

设$a$，$b$关于$x$的方程为$x^2 - 4kx + (16k^2 - 49k) = 0$③，方程有两个正整数解，

$\therefore \Delta = 16k^2 - 4(16k^2 - 49k) \geq 0$，

$\therefore 0 \leq k \leq \frac{49}{12}$，

$\because k$为正整数，