关　　系

- 关系的概念
- 关系性质
- 复合关系与逆关系
- 关系的闭包
- 等价关系与集合的划分
- 偏序关系与偏序集
- 函数
- 复合函数与逆函数

关系的闭包

定理1 $r(R) = R \cup I_A$

定理2 $s(R) = R \cup R^{-1}$

定理3 $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$

定理4 $t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$

例题1：A={1, 2, 3, 4, 5}

R ={<1, 2>, <2, 1>, <2, 4>, <3, 4>, <3, 5>}

求解: $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$, 用三种方法。（集合，矩阵，关系图）

解:

$r(R)=R \cup I_A$={<1,1>,<1, 2>, <2, 1>, <2,2>,<2, 4>, <3,3>,<3, 4>, <3, 5>,<4,4>,<5,5>}

关系的闭包

$s(R)=R \cup R^{-1}=\{<1, 2>, <2, 1>, <2, 4>, <3, 4>, <3, 5>,<4,2>,<4,3>,<5,3>\}$

$R^2= R \circ R=\{\mathbf{<1, 2>, <2, 1>, <2, 4>, <3, 4>, <3, 5>}\} \circ \{\mathbf{<1, 2>, <2, 1>, <2, 4>, <3, 4>, <3, 5>}\} =\{<1,1>,<1,4>,<2,2>\}$

$R^3= R^2 \circ R=\{\mathbf{<1,1>,<1,4>,<2,2>}\} \circ \{\mathbf{<1, 2>, <2, 1>, <2, 4>, <3, 4>, <3, 5>}\}$

$=\{<1, 2>,<2, 1>, <2, 4> \}$

关系的闭包

$R^4 = R^3 \circ R = \{<1, 2>, <2, 1>, <2, 4>\} \circ \{<1, 2>, <2, 1>, <2, 4>, <3, 4>, <3, 5>\} = \{<1,1>, <1,4>, <2,2>\} = R^2$

$R^5 = R^4 \circ R = R^2 \circ R = R^3$

$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup R^5 = R \cup R^2 \cup R^3$

$= \{<1,1>, <1, 2>, <1,4>, <2, 1>, <2,2>, <2, 4>, <3, 4>, <3, 5>\}$

关系的闭包

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M_{r(R)}=M_R\vee M_{I_A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\1&1&0&1&0\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

关系的闭包

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M_{s(R)}=M_R\vee M_R^T=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0\\0&0&0&1&1\\0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

关系的闭包

$$M_{t(R)}=M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} \vee M_{R^4} \vee M_{R^5}$$

$$M_R^n = M_{R^n}$$

关系复合的矩阵表示可以转换为关系矩阵的逻辑乘

$$M_{t(R)} = M_R \vee M_R^2 \vee M_R^3 \vee M_R^4 \vee M_R^5$$

$$M_R^2 = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

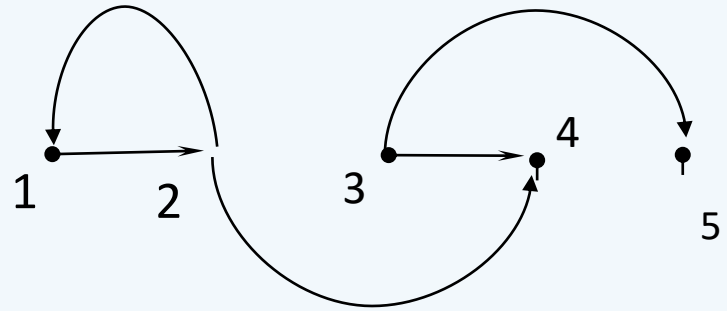
$$M_R^3 = M_R^2 \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R^4 = M_R^3 \odot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_R^2$$

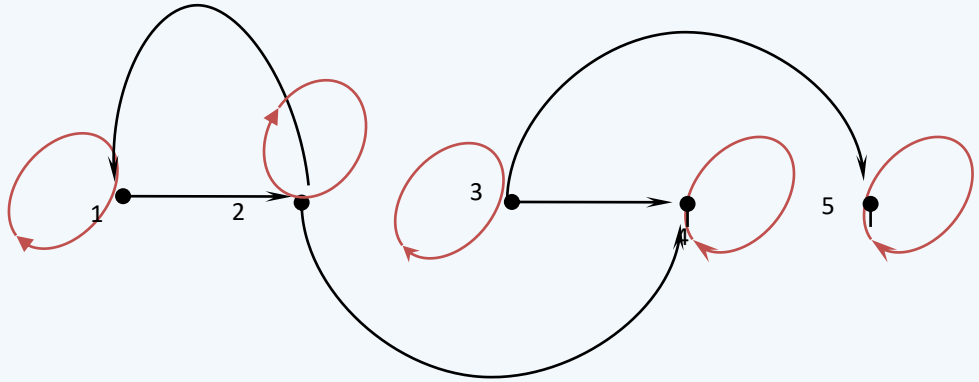
$$M_R^5 = M_R^4 \odot M_R = M_R^2 \odot M_R = M_R^3$$

$$M_{t(R)} = M_R \vee M_R^2 \vee M_R^3 \vee M_R^4 \vee M_R^5 = M_R \vee M_R^2 \vee M_R^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

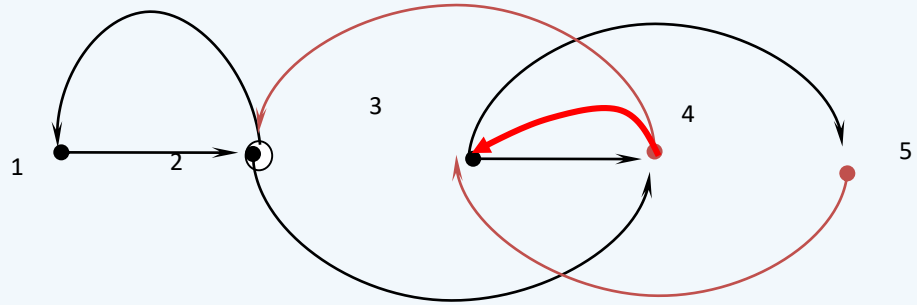
关系的闭包



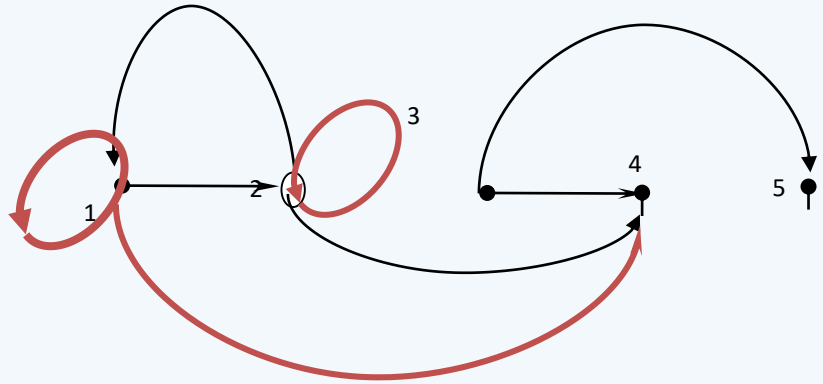
(1) R



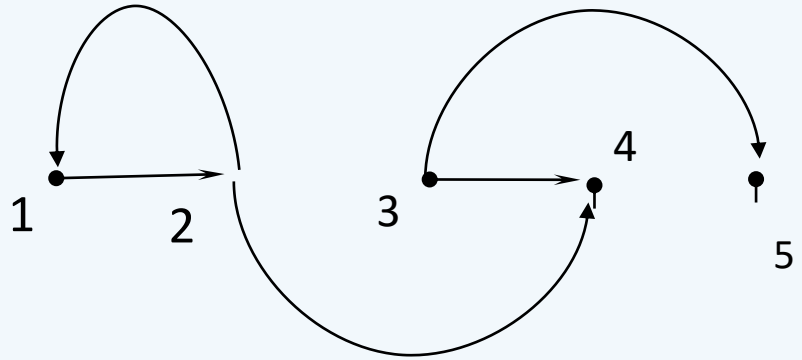
(2) r(R)



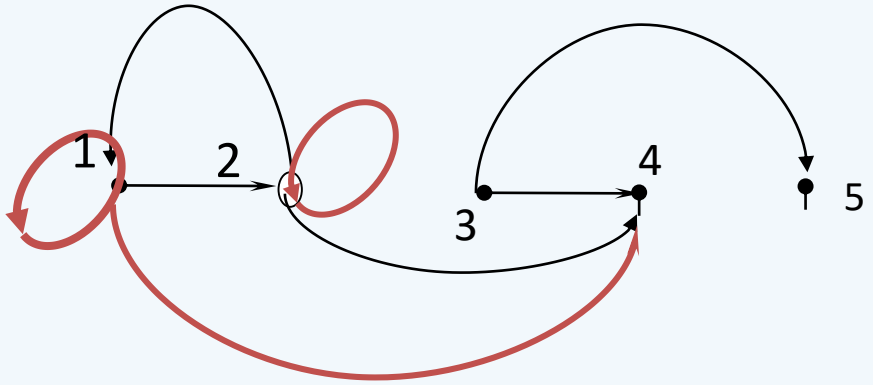
(3) s(R)



(4) t(R)



(1) R



(4) t(R)

“间接到达的直接到达”。

关系闭包的一般求解

ALGORITHM1 求解传递闭包的一般算法；依据定理4 利用关系的矩阵表示

$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{n} R^i$$

```
Procedure transitive closure M_R (n×n) 0-1 matrix
1.   A:= M_R
2.   B:=A
2.     FOR i=2,…, n DO
3.         begin
4.           A:=A ⊙ M_R 求取  M_R^n = M_{R^n}
5.           B:=B ∨ A     矩阵的逻辑加求闭包
6.         end {B is the 0-1 matrix for R*}
```

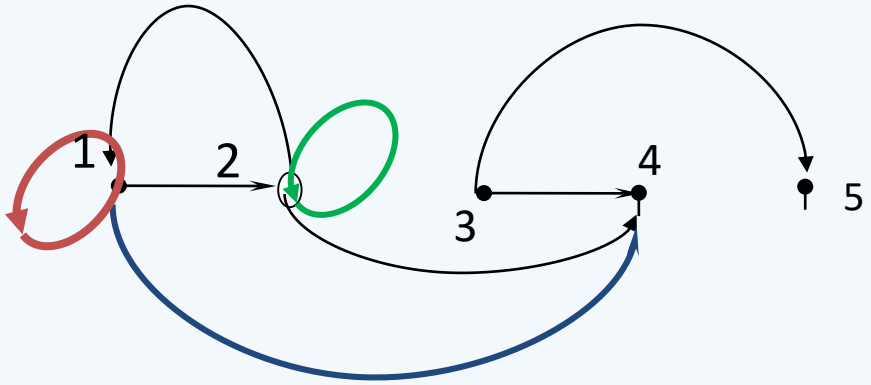
⊙:矩阵的逻辑乘； ∨：矩阵的逻辑加

矩阵乘算法的时间复杂度： O （ n^3 ）

计算闭包的时间复杂度： O（n^4）

关系的闭包-Warshall's Algorithm

算法思想分析



[0 1 0 0 0] *[0 1 0 0 0]

1到1 长度为2的通路<1,2>,<2,2>

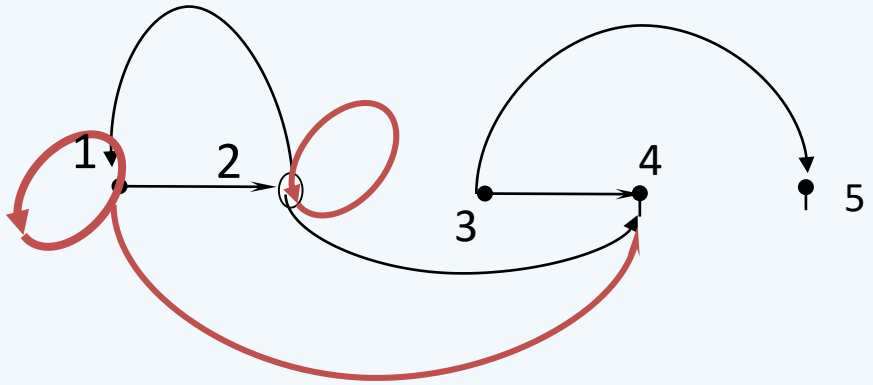
[0 1 0 0 0] *[0 1 1 0 0]

1到4 长度为2的通路<1,2>,<2,4>

三个1说明存在长度为2的通路有三条

$$M_R^{\,2} = M_R \circ M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

关系的闭包-Warshall's Algorithm



[0 1 0 0 0] *[1 0 0 0 0]

2到1 长度为3的通路
<2,2>,<2,2>,<2,1>

2到4 长度为3的通路
<2,1>,<1,1>,<1,4>

三个1说明存在长度为3的通路有三条

$$M_R^3 = M_R^2 \circ M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/816130220111010050