

数学试题

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号框涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号框. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后, 将答题卡交回.

一、选择题: 本大题共 8 个题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 z 满足 $z = (z+2) \cdot i$ (其中 i 是虚数单位), 则 $|z| =$ ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 2

【答案】B

【解析】

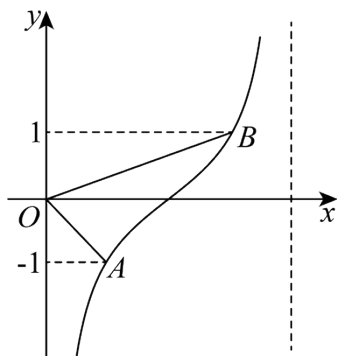
【分析】先由已知条件解出 $z = \frac{2i}{1-i}$, 再计算 z 的模长.

【详解】由已知有 $z = (z+2) \cdot i = i \cdot z + 2i$, 故 $z = \frac{2i}{1-i}$.

$$\text{所以 } |z| = \left| \frac{2i}{1-i} \right| = \frac{|2i|}{|1-i|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

故选: B.

2. 函数 $y = \tan\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示, 则 $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB}$ 的值为 ()



- A. -4 B. 4 C. -8 D. 8

【答案】D

【解析】

【分析】根据图像结合函数解析式，求得 A, B 两点的坐标，再计算数量积即可.

【详解】函数 $y = \tan\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right)$,

当 $y = 1$ 时，有 $\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，解得 $x = 3 + 4k (k \in \mathbb{Z})$ ，

当 $y = -1$ 时，有 $\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，解得 $x = 1 + 4k (k \in \mathbb{Z})$ ，

当 $k = 0$ 时，结合图象可得 $A(1, -1)$ ， $B(3, 1)$ ，则 $\vec{OA} = (1, -1)$ ， $\vec{OB} = (3, 1)$ ， $\vec{AB} = (2, 2)$ ，

所以 $(\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot \vec{AB} = (4, 0) \cdot (2, 2) = 8$.

故选：D.

3. 已知某圆台体积为 52π ，其上下底面圆半径分别为 2 和 5，则其母线长为 ()

A. $\frac{10}{3}$

B. 4

C. 5

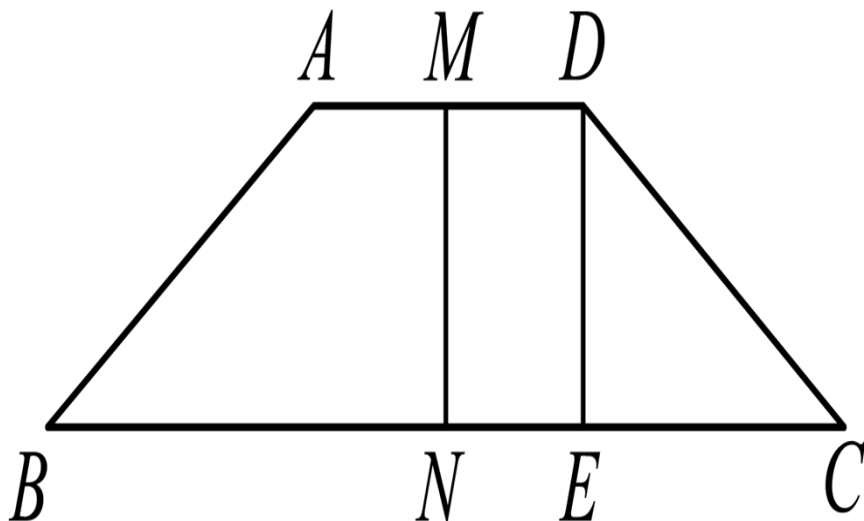
D. $\frac{25}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】由体积公式列方程先求出圆柱的高，然后求出 EC ，结合勾股定理即可求解.

【详解】作出圆台的轴截面如图所示：



M, N 是上下底面圆心， AB, CD 是母线， $DE = MN$ ，即 DE 可视为圆柱体的高，

由题意 $\frac{1}{3}(\pi \cdot 2^2 + \pi \cdot 5^2 + \sqrt{\pi \cdot 2^2 \cdot \pi \cdot 5^2}) \cdot DE = 52\pi$ ，解得 $DE = 4$ ，

而 $EC = 5 - 2 = 3$ ，所以由勾股定理有 $DC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

故所求母线长为 5.

故选：C.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = \sqrt{3}, A = 60^\circ, B = 75^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 中最小的边长为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{6}$

【答案】C

【解析】

【分析】由大边对大角锁定所求即为 c 的值, 结合正弦定理即可求解.

【详解】因为 $a = \sqrt{3}, A = 60^\circ, B = 75^\circ$, 所以 $C = 45^\circ$ 是最小的角, 所以 $\triangle ABC$ 中最小的边长为 c ,

由正弦定理有 $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$, 即 $\frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, 解得 $c = \sqrt{2}$.

故选：C.

5. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, |\vec{a} + 2\vec{b}| = 2\vec{a} \cdot \vec{b}$, 则向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 ()

- A. 0 B. $\frac{2\pi}{3}$ C. 0 或 $\frac{\pi}{3}$ D. 0 或 $\frac{2\pi}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】由 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2\vec{a} \cdot \vec{b}$, 两边同时平方, 利用向量数量积和向量的模, 求向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角.

【详解】向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$, 设向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 θ , $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$,

$|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$, 则 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta + 4|\vec{b}|^2 = (2\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 4|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta$,

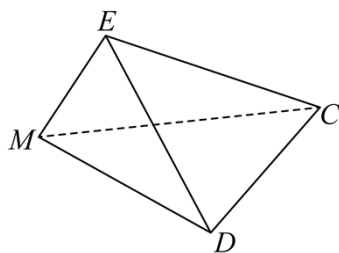
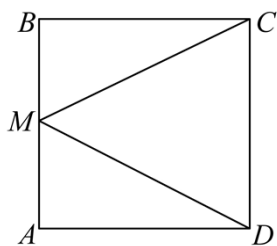
得 $2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$, 有 $\cos\theta = 1$ 或 $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ (舍去),

由 $\cos\theta = 1$, 得 $\theta = 0$.

故选：A.

6. 学校组织学生去工厂参加社会实践活动, 任务是利用一块正方形的铁皮制作簸箕, 方法如下: 取正方形 $ABCD$ 边 AB 的中点 M , 沿 MC 、 MD 折叠, 将 MA 、 MB 用胶水粘起来, 使得点 A 、 B 重合于点 E , 这样就做成了一个簸箕 $E-MCD$, 如果这个簸箕的容量为 $576\sqrt{3}\text{cm}^3$, 则原正方形铁皮的边长是多少

()



A. 12cm

B. 24cm

C. $12\sqrt{3}$ cm

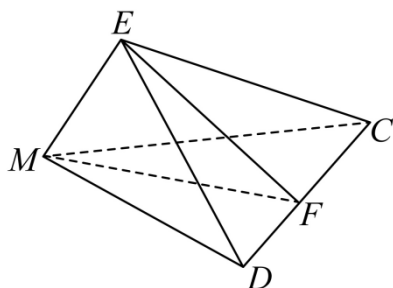
D. $24\sqrt{3}$ cm

【答案】B

【解析】

【分析】设正方形 $ABCD$ 边长为 $2a$ ，由三棱锥 $E-MCD$ 的体积，求出 a 的值即可.

【详解】三棱锥 $E-MCD$ 中， F 为 CD 中点，连接 EF, MF ，



$MC = MD, EC = ED$ ，则 $EF \perp CD, MF \perp CD$ ，

$EF, MF \subset$ 平面 MEF ， $EF \cap MF = F$ ，得 $CD \perp$ 平面 MEF ，

设正方形 $ABCD$ 边长为 $2a$ ，则有 $EC = ED = CD = 2a$ ， $EF = \sqrt{3}a$ ，

$MC = MD = \sqrt{5}a$ ， $MF = 2a$ ， $ME = a$ ，

有 $MF^2 = ME^2 + EF^2$ ，则 $ME \perp EF$ ， $S_{\triangle MEF} = \frac{1}{2}ME \cdot EF = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$ ，

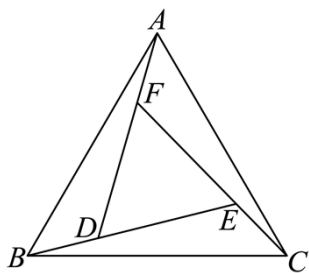
$V_{E-MCD} = \frac{1}{3}S_{\triangle MEF} \cdot CD = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}a^2}{2} \times 2a = \frac{\sqrt{3}a^3}{3} = 576\sqrt{3}$ ，得 $a^3 = 1728$ ，即 $a = 12$ 。

所以原正方形铁皮的边长是 24cm。

故选：B

7. 如图， $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，直线 AD, BE, CF 围成一个正三角形 DEF ，且 $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FA}$ ，

则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = (\quad)$



A. $-\frac{8}{13}$

B. $\frac{8}{13}$

C. $-\frac{12}{13}$

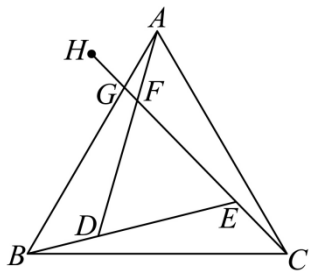
D. $\frac{12}{13}$

【答案】A

【解析】

【分析】首先得出 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EF} = \frac{2\pi}{3} - \theta$ ，然后结合余弦定理、同角三角函数关系分别求出 $\cos \theta, \sin \theta$ ，进一步结合两角差的余弦公式可得 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EF} = \frac{2\pi}{3} - \theta$ 的余弦值，从而结合数量积的定义即可运算求解。

【详解】如图所示：



延长射线 EF 交 AB 于点 G ，点 H 在射线 FG 上， $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EF} = \angle HGB = \angle AGF$ ，

设 $\angle BAD = \theta$ ，由题意 $\angle AFG = \angle DFE = \frac{\pi}{3}$ ，所以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EF} = \frac{2\pi}{3} - \theta$ ，

由题意可设 $BD = t > 0, AD = 3t$ ，在三角形 ADB 中， $\angle ADB = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ ， $AB = 2$ ，

由余弦定理有 $2^2 = t^2 + 9t^2 - 2t \cdot 3t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 13t^2$ ，解得 $t = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ ，

在三角形 ADB 中，由余弦定理有 $\cos \theta = \frac{2^2 + 9 \cdot \frac{4}{13} - \frac{4}{13}}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{13}}{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{26}$ ，所以 $\sin \theta = \frac{\sqrt{39}}{26}$ ，

从而 $\cos \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EF} = \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \theta \right) = -\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{7\sqrt{13}}{26} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{26} = -\frac{\sqrt{13}}{13}$ ，

由上述分析结合题意可知 $AB = 2, EF = 2t = \frac{4\sqrt{13}}{13}$ ， $\cos \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EF} = -\frac{\sqrt{13}}{13}$ ，

从而由数量积的定义可知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{EF}| \cdot \cos \angle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EF} = 2 \cdot \frac{4\sqrt{13}}{13} \cdot \left(-\frac{\sqrt{13}}{13}\right) = -\frac{8}{13}$.

故选: A.

8. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体对角线 BD_1 垂直于平面 α , 直线 l 与平面 α 所成角为 60° , 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 绕体对角线 BD_1 旋转的过程中, 记 BC 与直线 l 所成的最小角为 θ , 则 $\cos \theta =$ ()

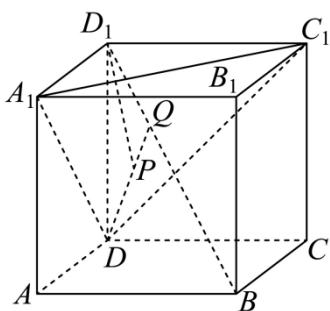
- A. $\frac{3-\sqrt{6}}{6}$ B. $\frac{3+\sqrt{6}}{6}$ C. $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据正方体的几何性质, 作出 $QD_1 \perp$ 平面 A_1C_1D , 找到线线角的平面角, 即可求解.

【详解】如图所示, 连接 BD_1 , 交平面 A_1C_1D 于点 Q .



设正方体的棱长为 a , 根据正方体的性质可得, $BD_1 \perp$ 平面 A_1C_1D ,

则平面 α 与平面 A_1C_1D 平行或重合, 在线段 DQ 上取点 P , 使 $\angle D_1PQ = 60^\circ$,

则 D_1P 为满足题意的其中一个直线 l ,

正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 绕体对角线 BD_1 旋转的过程可认为是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 不动, D_1P 绕体对角线 BD_1 旋转, $\angle PD_1Q = 30^\circ$,

$BC \parallel A_1D_1$, 所以 BC 与直线 l 所成的角即 A_1D_1 与直线 l 所成的角,

可得当 P 在线段 A_1Q 上时, A_1D_1 与直线 l 所成的角最小,

由正方体的性质可得 $D_1Q = \frac{1}{3}D_1B = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, 则 $\cos \angle A_1D_1Q = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin \angle A_1D_1Q = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

$$\text{所以 } \cos \theta = \cos(\angle A_1 D_1 Q - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \angle A_1 D_1 Q + \frac{1}{2} \sin \angle A_1 D_1 Q$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{3 + \sqrt{6}}{6}.$$

故选：B.

二、选择题:本大题共 3 个题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题自要求, 全部选对得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错得 0 分.

9. 在下列各组向量中, 可以作为基底的是 ()

A. $\vec{a} = (0, 0), \vec{b} = (1, 2)$

B. $\vec{a} = (0, 1), \vec{b} = (-2, 0)$

C. $\vec{a} = (1, -2), \vec{b} = (1, 2)$

D. $\vec{a} = (2, -3), \vec{b} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

【答案】BC

【解析】

【分析】只需判断各个选项所给向量是否共线即可求解.

【详解】对于 A, 因为 $\vec{b} = 0\vec{a}$, 所以 $\vec{a} = (0, 0), \vec{b} = (1, 2)$ 共线, 故 A 不符合题意,

对于 B, 因为关于实数 λ 的方程 $\vec{b} = \lambda\vec{a} (\lambda \in \mathbb{R})$ 无解, 所以 $\vec{a} = (0, 1), \vec{b} = (-2, 0)$ 不共线, 故 B 符合题意;

对于 C, 因为关于实数 λ 的方程 $\vec{b} = \lambda\vec{a} (\lambda \in \mathbb{R})$ 无解, 所以 $\vec{a} = (1, -2), \vec{b} = (1, 2)$ 不共线, 故 C 符合题意;

对于 D, 因为 $\vec{a} = 4\vec{b}$, 所以 $\vec{a} = (2, -3), \vec{b} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ 共线, 故 D 不符合题意.

故选: BC.

10. 已知复数 z_1, z_2, z_3 , 下列叙述中错误的是 ()

A. 若 $z_1 > z_2$, 则 $z_1 + z_3 > z_2 + z_3$

B. 若 $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_3$, 则 $z_1 = z_3$

C. 若 $|z_1|^2 = |z_2|^2$, 则 $|z_1| = |z_2|$

D. 若 $(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 = 0$, 则 $z_1 = z_2 = z_3$

【答案】ABD

【解析】

【分析】对于 ABD, 直接举出对应的反例即可判断; 对于 C, 对等式两边直接开方即可得解.

【详解】对于 A，取 $z_1 = 1 > z_2 = -2, z_3 = i$ ，满足 $z_1 > z_2$ ，但此时 $z_1 + z_3, z_2 + z_3$ 都不是实数，都不能比较大小，故 A 错误；

对于 B，取 $z_2 = 0, z_1 = 1, z_3 = 3$ ，满足 $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_3 = 0$ ，但此时 $z_1 \neq z_3$ ，故 B 错误；

对于 C，若 $|z_1|^2 = |z_2|^2$ ，而 $|z_1| > 0, |z_2| > 0$ ，则 $|z_1| = |z_2|$ ，故 C 正确；

对于 D，取 $z_1 = 1+i, z_2 = 0, z_3 = -1+i$ ，满足 $(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 = (1+i)^2 + (1-i)^2 = 2i - 2i = 0$ ，

但此时 z_1, z_2, z_3 两两互不相等，故 D 错误.

故选：ABD.

11. 正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB = 2\sqrt{3}, AA_1 = 2, D$ 为棱 B_1C_1 的中点， P 为线段 A_1D (不包括端点) 上一动点， M, N 分别为棱 AB, AC 上靠近点 A 的三等分点，过 BC 作三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的截面 α ，使得 α 垂直于 AP 且交 AP 于点 E ，下列结论正确的是 ()

A. $B_1C_1 //$ 截面 α

B. 存在点 P 使得平面 $A_1MN //$ 截面 α

C. 当 $A_1P = 2$ 时，截面 α 的面积为 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$

D. 三棱锥 $E - ABC$ 体积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】由线面平行的判定即可判断 A；证明出平面 $A_1MN //$ 平面 QBC ，由平面 $QBC \cap \alpha = BC$ ，即可判断 B；作出截面图即可判断 C；作出截面图，确定点 E 的位置即可判断 D.

【详解】对于 A，因为棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 为正三棱柱，所以 $B_1C_1 // BC$ ，

又 $BC \subset$ 平面 α ， $B_1C_1 \not\subset$ 平面 α ，所以 $B_1C_1 //$ 平面 α ，故 A 正确；

对于 B，取 $QD = 1$ ， BC 中点为 F ，连接 QF, QB, QC ， AF 交于 MN 于点 G ，则 $A_1Q = 2$ ，

因为 M, N 分别为棱 AB, AC 上靠近点 A 的三等分点，

所以 $MN // BC$ ， $AG = \frac{1}{3}AF = 1$ ，则 $GF = 2 = A_1Q$ ，

因为正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ ，所以平面 $ABC //$ 平面 $A_1B_1C_1$ ，

又平面 $A_1AFD \cap$ 平面 $ABC = AF$ ，平面 $A_1AFD \cap$ 平面 $A_1B_1C_1 = A_1D$ ，

所以 $AF // A_1D$ ，即 $A_1Q // GF$ ，

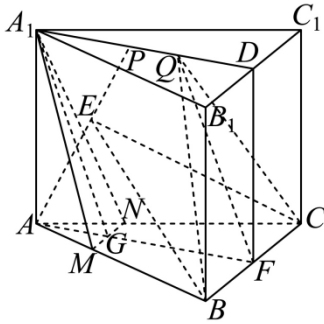
所以四边形 A_1GFQ 为平行四边形，所以 $A_1G \parallel QF$ ，

因为 $MN \parallel BC$ ，又 $MN \not\subset$ 平面 QBC ， $BC \subset$ 平面 QBC ，

所以 $MN \parallel$ 平面 QBC ，同理可得 $A_1G \parallel$ 平面 QBC ，

又 $MN \cap A_1G = G$ ，且 $MN, A_1G \subset$ 平面 A_1MN ，所以平面 $A_1MN \parallel$ 平面 QBC ，

因为平面 $QBC \cap \alpha = BC$ ，所以平面 A_1MN 与 α 不平行，故 B 错误；



对于 C，当 $A_1P = 2$ 时，作出截面图如图所示，

设 FE 延长线交 A_1D 于点 R ，则 $A_1P = AA_1 = 2$ ，

因为 $\angle AA_1P = 90^\circ$ ，所以 $\angle A_1PA = \angle A_1AP = 45^\circ$ ，所以 $\angle DFR = \angle DRF = 45^\circ$ ，

所以 $DR = DF = 2$ ，则 $A_1R = 1$ ， $RF = 2\sqrt{2}$ ，

过点 R 作 $ST \parallel B_1C_1$ ，交 A_1B_1, A_1C_1 于点 S, T ，连接 SB, TC ，

则 $ST = \frac{1}{3}B_1C_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，且 $ST \parallel B_1C_1$ ，

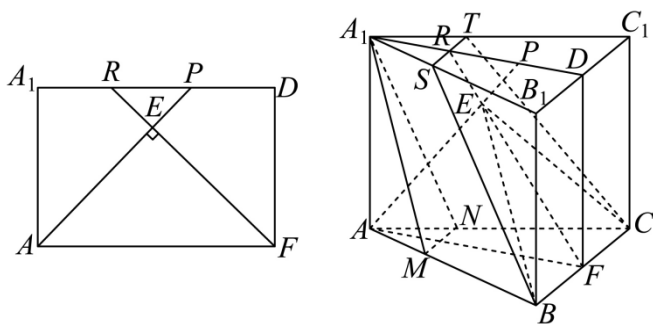
因为 $B_1C_1 \parallel BC$ ，所以 $ST \parallel BC$ ，

在 $\text{Rt}\triangle B_1BS$ 中，由勾股定理得 $SB = \frac{2\sqrt{21}}{3}$ ，同理可得 $TC = \frac{2\sqrt{21}}{3}$ ，

所以 $SB = TC$ ，

所以 α 截三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的截面四边形 $STCB$ 为等腰梯形，高的长为 $2\sqrt{2}$ ，

所以 $S_{STCB} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3} \right) \times 2\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$ ，故 C 正确；



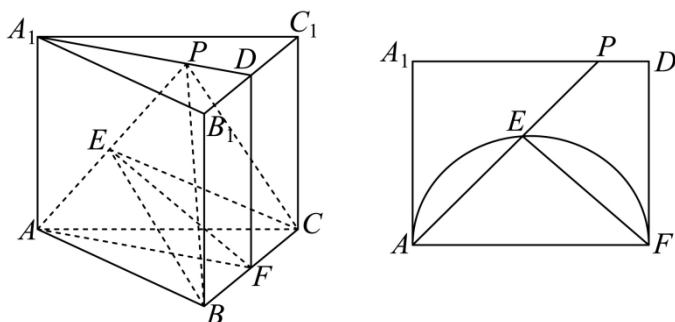
对于 D，作出截面图如图所示，

因为 $AP \perp \alpha$ ， $EF \subset \alpha$ ，所以 $AE \perp EF$ ，所以点 E 在以 AF 为直径的圆上，

当点 E 在 AF 的中点时，点 E 到底面 ABC 距离最大，且最大值为 $\frac{1}{2}AF = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = \frac{3}{2}$ ，

因为 $DF < AF$ ，所以此时点 P 在线段 A_1D 上，符合条件，

所以三棱锥 A-BCE 的体积最大值为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}AF \times S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 12 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，故 D 正确；



故选：ACD.

三、填空题:本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知关于 x 的实系数二次方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的一根为 $1-i$ (其中 i 是虚数单位)，则 $b+c =$ _____.

【答案】0

【解析】

【分析】由韦达定理、复数四则运算即可直接运算求解.

【详解】由二次方程求根公式可知虚根是成对出现的，故 $x_1 = 1-i, x_2 = 1+i$ 都是方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的解，

所以 $b+c = -(x_1 + x_2) + x_1x_2 = -2 + (1-i)(1+i) = -2 + 2 = 0$.

故答案为：0.

13. 已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = \sqrt{3}, BC = 2$ ，D 为 AC 中点，且 $\angle CBD = 60^\circ$ ，则 $BD =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/816155045103010230>