

辽宁省沈阳市重点中学 2024 届高三第二次调研数学试卷

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚, 将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂; 非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写, 字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁, 不要折叠, 不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆上, 若 $|PF_2| = 2$, 则 $\angle F_1PF_2$ 的大小为 ()

- A. 150° B. 135° C. 120° D. 90°

2. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB = BC = 5$, $AC = 6$, P 在底面 ABC 内的射影 D 位于直线 AC 上, 且 $AD = 2CD$, $PD = 4$. 设三棱锥 $P-ABC$ 的每个顶点都在球 Q 的球面上, 则球 Q 的半径为 ()

- A. $\frac{\sqrt{689}}{8}$ B. $\frac{\sqrt{689}}{6}$ C. $\frac{5\sqrt{26}}{8}$ D. $\frac{5\sqrt{26}}{6}$

3. 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x+1)} - 1, & -1 < x < 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$, 若方程 $f(x) - 2ax = a - 1$ 有唯一解, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\{-8\} \cup (1, +\infty)$ B. $\{-16\} \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right] \cup (2, +\infty)$
- C. $\{-8\} \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup (2, +\infty)$ D. $\{-32\} \cup [1, 2] \cup (4, +\infty)$

4. 正 $\triangle ABC$ 的边长为 2, 将它沿 BC 边上的高 AD 翻折, 使点 B 与点 C 间的距离为 $\sqrt{3}$, 此时四面体 $A-BCD$ 的外接球表面积为 ()

- A. $\frac{10\pi}{3}$ B. 4π C. $\frac{13\pi}{3}$ D. 7π

5. 已知函数 $f(x) = \sin 3x - \cos 3x$, 给出下列四个结论: ①函数 $f(x)$ 的值域是 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$; ②函数 $f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 为奇函数; ③函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 单调递减; ④若对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ 成立, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$; 其中正确结论的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

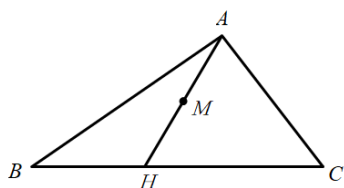
6. 设实数 x, y 满足条件 $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 2x - y + 3 \leq 0 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$ 则 $x + y + 1$ 的最大值为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

7. 已知命题 p : 若 $a > 1, b > c > 1$, 则 $\log_b a < \log_c a$; 命题 q : $\exists x_0 (0, +\infty)$, 使得 $2^{x_0} < \log_3 x_0$, 则以下命题为真命题的是 ()

- A. $p \wedge q$ B. $p \wedge (\neg q)$ C. $(\neg p) \wedge q$ D. $(\neg p) \wedge (\neg q)$

8. 在 $\triangle ABC$ 中, H 为 BC 上异于 B, C 的任一点, M 为 AH 的中点, 若 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda + \mu$ 等于 ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{3}$

9. 已知集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | x^2 - x + 2 > 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-1, 0\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

10. 关于函数 $f(x) = \sin |x| + |\cos x|$ 有下述四个结论: ()

- ① $f(x)$ 是偶函数; ② $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上是单调递增函数;
③ $f(x)$ 在 R 上的最大值为 2; ④ $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 上有 4 个零点.

其中所有正确结论的编号是 ()

- A. ①②④ B. ①③ C. ①④ D. ②④

11. 已知 $\overrightarrow{AB} = (2, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, \lambda)$, 若 $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 则实数 λ 的值是 ()

- A. -1 B. 7 C. 1 D. 1 或 7

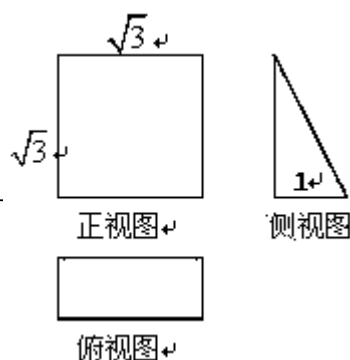
12. 已知 R 为实数集, $A = \{x | x^2 - 1 \leq 0\}$, $B = \left\{x | \frac{1}{x} \geq 1\right\}$, 则 $A \cap (\complement_R B) =$ ()

- A. $\{x | -1 < x \leq 0\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ C. $\{x | -1 \leq x \leq 0\}$ D. $\{x | -1 \leq x \leq 0 \text{ 或 } x = 1\}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c , 已知 $2b \cos A = 2c + \sqrt{3}a$, 则 $\angle B =$ _____.

14. 一个空间几何体的三视图及部分数据如图所示，则这个几何体的体积是_____

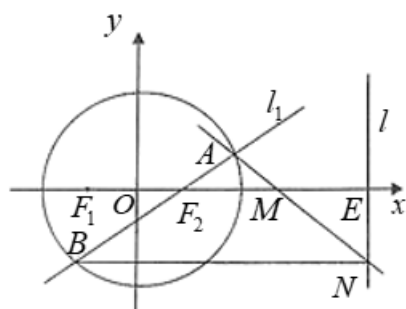


15. 若复数 z 满足 $2z + \bar{z} = 3 + i$ ，其中 i 是虚数单位， $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数，则 $z =$ _____.

16. 设双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的一条渐近线方程为 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ ，则该双曲线的离心率为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

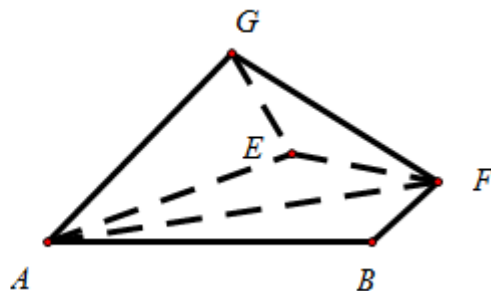
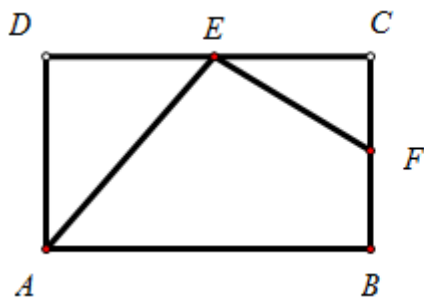
17. (12 分) 设点 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1 (a > 2)$ 的左、右焦点， P 为椭圆 C 上任意一点，且 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$ 的最小值为 1.



(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 如图，直线 $l: x = 5$ 与 x 轴交于点 E ，过点 F_2 且斜率 $k \neq 0$ 的直线 l_1 与椭圆交于 A, B 两点， M 为线段 EF_2 的中点，直线 AM 交直线 l 于点 N ，证明：直线 $BN \perp l$ 。

18. (12 分) 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $AD = 3$ ，点 E, F 分别是线段 DC, BC 的中点，分别将 $\triangle DAE$ 沿 AE 折起， $\triangle CEF$ 沿 EF 折起，使得 D, C 重合于点 G ，连结 AF 。



(I) 求证：平面 $GEF \perp$ 平面 GAF ；

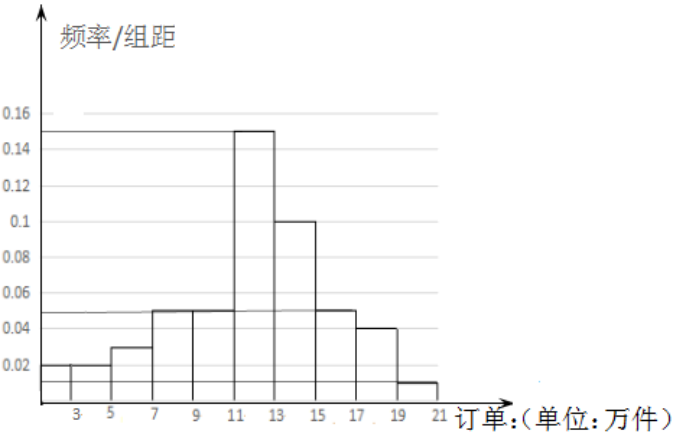
(II) 求直线 GF 与平面 GAE 所成角的正弦值.

19. (12 分) 已知函数 $f(x)=|x+1|$.

(1) 求不等式 $f(x) \leq 4-|2x-3|$ 的解集;

(2) 若正数 $m、n$ 满足 $m+2n=mn$, 求证: $f(m)+f(-2n) \geq 8$.

20. (12 分) 为了解网络外卖的发展情况, 某调查机构从全国各城市中抽取了 100 个相同等级地城市, 分别调查了甲乙两家网络外卖平台 (以下简称外卖甲、外卖乙) 在今年 3 月的订单情况, 得到外卖甲该月订单的频率分布直方图, 外卖乙该月订单的频数分布表, 如下图表所示.



订单: (单位: 万件)	[3,5)		[5,7)		[7,9)		[9,11)
频数	1		2		2		3
订单: (单位: 万件)	[11,13)		[13,15)		[15,17)		[17,19)
频数	40		20		20		10

(1) 现规定, 月订单不低于 13 万件的城市为“业绩突出城市”, 填写下面的列联表, 并根据列联表判断是否有 90%的把握认为“是否为业绩突出城市”与“选择网络外卖平台”有关.

	业绩突出城市	业绩不突出城市	总计
外卖甲			
外卖乙			
总计			

(2) 由频率分布直方图可以认为, 外卖甲今年 3 月在全国各城市的订单数 Z (单位: 万件) 近似地服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$ (同一组数据用该区间的中点值作代表), σ

的值已求出，约为 3.64，现把频率视为概率，解决下列问题：

①从全国各城市中随机抽取 6 个城市，记 X 为外卖甲在今年 3 月订单数位于区间 $(4.88,15.8)$ 的城市个数，求 X 的数学期望；

②外卖甲决定在今年 3 月订单数低于 7 万件的城市开展“订外卖，抢红包”的营销活动来提升业绩，据统计，开展此活动后城市每月外卖订单数将提高到平均每月 9 万件的水平，现从全国各月订单数不超过 7 万件的城市中采用分层抽样的方法选出 100 个城市不开展营销活动，若每按一件外卖订单平均可获纯利润 5 元，但每件外卖平均需送出红包 2 元，则外卖甲在这 100 个城市中开展营销活动将比不开展营销活动每月多盈利多少万元？

附：①参考公式： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$ 。

参考数据：

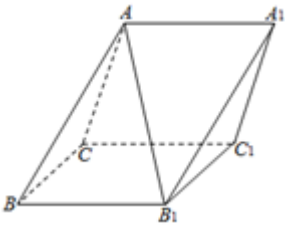
$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
k_0	2.702	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

②若 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < Z \leq \mu + \sigma) = 0.6826$ ， $P(\mu - 2\sigma < Z \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$ 。

21. (12 分) 已知 $a > 0$ ，证明： $\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} > a + \frac{1}{a} - 1$ 。

22. (10 分) 如图，在斜三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，侧面 ACC_1A_1 与侧面 CBB_1C_1 都是菱形，

$\angle ACC_1 = \angle CC_1B_1 = 60^\circ$ ， $AC = 2$ 。



(I) 求证： $AB_1 \perp CC_1$ ；

(II) 若 $AB_1 = \sqrt{6}$ ，求平面 CAB_1 与平面 A_1AB_1 所成的锐二面角的余弦值。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

根据椭圆的定义可得 $|PF_1| = 4$ ， $|F_1F_2| = 2\sqrt{7}$ ，再利用余弦定理即可得到结论。

【详解】

由题意， $|F_1F_2| = 2\sqrt{7}$ ， $|PF_1| + |PF_2| = 6$ ，又 $|PF_2| = 2$ ，则 $|PF_1| = 4$ ，

由余弦定理可得 $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} = \frac{16 + 4 - 28}{2 \times 2 \times 4} = -\frac{1}{2}$ 。

故 $\angle F_1PF_2 = 120^\circ$ 。

故选：C。

【点睛】

本题考查椭圆的定义，考查余弦定理，考查运算能力，属于基础题。

2、A

【解析】

设 AC 的中点为 O 先求出 $\triangle ABC$ 外接圆的半径，设 $QM = a$ ，利用 $QM \perp$ 平面 ABC ，得 $QM \parallel PD$ ，在 $\triangle MBQ$ 及

$\triangle DMQ$ 中利用勾股定理构造方程求得球的半径即可

【详解】

设 AC 的中点为 O ，因为 $AB = BC$ ，所以 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心 M 在 BO 上。设此圆的半径为 r 。

因为 $BO = 4$ ，所以 $(4 - r)^2 + 3^2 = r^2$ ，解得 $r = \frac{25}{8}$ 。

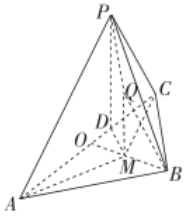
因为 $OD = OC - CD = 3 - 2 = 1$ ，所以 $DM = \sqrt{1^2 + (4 - r)^2} = \frac{\sqrt{113}}{8}$ 。

设 $QM = a$ ，易知 $QM \perp$ 平面 ABC ，则 $QM \parallel PD$ 。

因为 $QP = QB$ ，所以 $\sqrt{(PD - a)^2 + DM^2} = \sqrt{a^2 + r^2}$ ，

即 $(4-a)^2 + \frac{113}{64} = a^2 + \frac{625}{64}$, 解得 $a=1$. 所以球 Q 的半径 $R = QB = \sqrt{a^2 + r^2} = \frac{\sqrt{689}}{8}$.

故选: A



【点睛】

本题考查球的组合体，考查空间想象能力，考查计算求解能力，是中档题

3、B

【解析】

求出 $f(x)$ 的表达式，画出函数图象，结合图象以及二次方程实根的分布，求出 a 的范围即可．

【详解】

解：令 $-1 < x < 0$ ，则 $0 < x+1 < 1$ ，

$$\text{则 } f(x+1) = \frac{x+1}{2},$$

$$\text{故 } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} - 1, & -1 < x < 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 1 \end{cases}, \text{ 如图示:}$$

$$\text{由 } f(x) - 2ax = a - 1,$$

$$\text{得 } f(x) = a(2x+1) - 1,$$

$$\text{函数 } y = a(2x+1) - 1 \text{ 恒过 } A(-\frac{1}{2}, -1),$$

$$\text{由 } B(1, \frac{1}{2}), C(0, 1),$$

$$\text{可得 } k_{AB} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{1 + \frac{1}{2}} = 1, k_{OA} = 2, k_{AC} = \frac{1+1}{\frac{1}{2}} = 4,$$

若方程 $f(x) - 2ax = a - 1$ 有唯一解，

$$\text{则 } 1 < 2a < 2 \text{ 或 } 2a > 4, \text{ 即 } \frac{1}{2} < a < 1 \text{ 或 } a > 2;$$

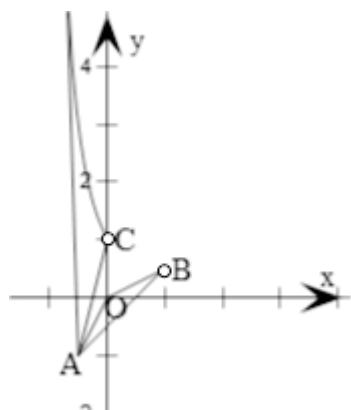
$$\text{当 } 2ax + a - 1 = \frac{2}{x+1} - 1 \text{ 即图象相切时,}$$

$$\text{根据 } \Delta = 0, 9a^2 - 8a(a-2) = 0,$$

$$\text{解得 } a = -16(0 \text{ 舍去}),$$

则 a 的范围是 $\{-16\} \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right] \cup (2, +\infty)$,

故选: B .



【点睛】

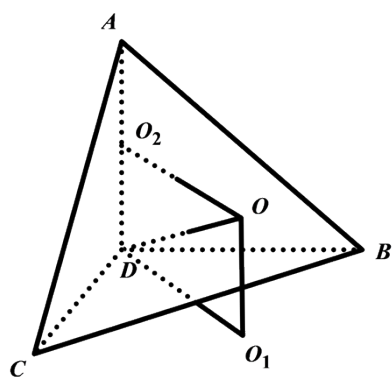
本题考查函数的零点问题, 考查函数方程的转化思想和数形结合思想, 属于中档题.

4、D

【解析】

如图所示, 设 AD 的中点为 O_2 , $\triangle BCD$ 的外接圆的圆心为 O_1 , 四面体 $A-BCD$ 的外接球的球心为 O , 连接 OO_1, OO_2, OD , 利用正弦定理可得 $DO_1 = 1$, 利用球心的性质和线面垂直的性质可得四边形 OO_2DO_1 为平行四边形, 最后利用勾股定理可求外接球的半径, 从而可得外接球的表面积.

【详解】



如图所示, 设 AD 的中点为 O_2 , $\triangle BCD$ 外接圆的圆心为 O_1 , 四面体 $A-BCD$ 的外接球的球心为 O , 连接 OO_1, OO_2, OD , 则 $OO_1 \perp$ 平面 BCD , $OO_2 \perp AD$.

因为 $CD = BD = 1, BC = \sqrt{3}$, 故 $\cos \angle BDC = \frac{2-3}{2 \times 1 \times 1} = -\frac{1}{2}$,

因为 $\angle BDC \in (0, \pi)$, 故 $\angle BDC = \frac{2\pi}{3}$.

由正弦定理可得 $\frac{2DO_1}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$, 故 $DO_1 = 1$, 又因为 $AD = \sqrt{3}$, 故 $DO_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $AD \perp DB, AD \perp CD, DB \cap CD = D$, 故 $AD \perp$ 平面 BCD , 所以 $OO_1 \parallel AD$,

因为 $AD \perp$ 平面 BCD , $DO_1 \subset$ 平面 BCD , 故 $AD \perp DO_1$, 故 $OO_2 \parallel DO_1$,

所以四边形 OO_2DO_1 为平行四边形, 所以 $OO_1 = DO_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $OD = \sqrt{\frac{3}{4} + 1} = \frac{\sqrt{7}}{2}$, 故外接球的半径为 $\frac{\sqrt{7}}{2}$, 外接球的表面积为 $4\pi \times \frac{7}{4} = 7\pi$.

故选: D.

【点睛】

本题考查平面图形的折叠以及三棱锥外接球表面积的计算, 还考查正弦定理和余弦定理, 折叠问题注意翻折前后的变量与不变量, 外接球问题注意先确定外接球的球心的位置, 然后把半径放置在可解的直角三角形中来计算, 本题有一定的难度.

5、C

【解析】

化 $f(x)$ 的解析式为 $\sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4})$ 可判断①, 求出 $f(x + \frac{\pi}{4})$ 的解析式可判断②, 由 $x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ 得

$3x - \frac{\pi}{4} \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$, 结合正弦函数得图象即可判断③, 由

$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ 得 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{T}{2}$ 可判断④.

【详解】

由题意, $f(x) = \sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4})$, 所以 $f(x) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 故①正确; $f(x + \frac{\pi}{4}) =$

$\sqrt{2} \sin[3(x + \frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4}] = \sqrt{2} \sin(3x + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2} \cos 3x$ 为偶函数, 故②错误; 当 $x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$

时, $3x - \frac{\pi}{4} \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$, $f(x)$ 单调递减, 故③正确; 若对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有

$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ 成立, 则 x_1 为最小值点, x_2 为最大值点, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为

$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{3}$, 故④正确.

故选: C.

【点睛】

本题考查三角函数的综合运用，涉及到函数的值域、函数单调性、函数奇偶性及函数最值等内容，是一道较为综合的问题.

6、C

【解析】

画出可行域和目标函数，根据目标函数的几何意义平移得到答案.

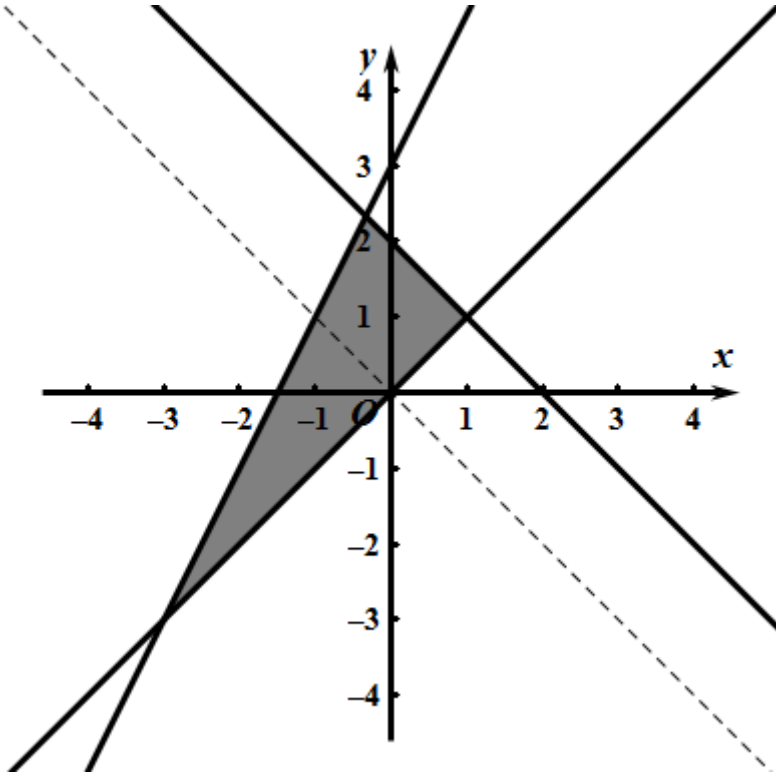
【详解】

如图所示：画出可行域和目标函数，

$z = x + y + 1$ ，即 $z = -x + y - 1$ ， z 表示直线在 y 轴的截距加上1，

根据图像知，当 $x + y = 2$ 时，且 $x \in [-\frac{1}{3}, 1]$ 时， $z = x + y + 1$ 有最大值为3.

故选：C.



【点睛】

本题考查了线性规划问题，画出图像是解题的关键.

7、B

【解析】

先判断命题 p, q 的真假,进而根据复合命题真假的真值表,即可得答案.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/816212144005010142>