2022-2023学年湖南省岳阳市岳阳县高一下学期期末数学试题

一、单选题

1．已知 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 均为非零向量，

①若 $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$，则 $\vec{a}/\!/\vec{c}$；

②若 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，则 $\vec{a}=\vec{b}$；

③若 $|(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$，则 $\vec{a}/\!/\vec{b}$．

上述命题中，真命题的个数是（　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【答案】B

【分析】根据数量积的定义及运算律逐一判断即可.

【详解】对于①，当 $\vec{a}\perp\vec{b},\vec{a}\perp\vec{c},\vec{b}\perp\vec{c}$ 时，

$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=0\cdot\vec{c}=\vec{0},\ \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})=\vec{a}\cdot 0=\vec{0}$，

满足 $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$，故①错误；

对于②，若 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，则 $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=0$，

则 $\vec{a}=\vec{b}$ 或 $\vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 垂直，故②错误；

对于③，若 $|(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$，

则 $\left||\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\vec{c}\right|=|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$，即 $|\vec{a}||\vec{b}|\left|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\right||\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$，

所以 $\left|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\right|=1$，又 $0^\circ\le\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\le 180^\circ$，所以 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=0^\circ$ 或 180°，

所以 $\vec{a}/\!/\vec{b}$，故③正确，

所以真命题的个数是1个.

故选：B.

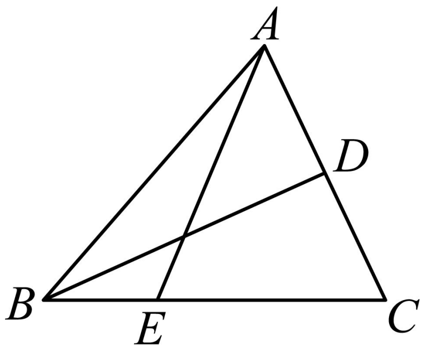
2．在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$，D是AC的中点，若 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{BD}$，则 $\frac{x}{y}=$（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．2　　C．$\frac{3}{2}$　　D．3

【答案】C

【分析】根据向量的数量、位置关系，结合加减法的几何意义用 $\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BD}$ 表示出 $\overrightarrow{AC}$，即可得答案.

【详解】



$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AD})$

$=\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

所以 $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD}$，故 $x=\frac{3}{2},y=1$，则 $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$.

故选：C

3．若 $z=\frac{1-i}{1+i}+4-2i$，则 $|z|=$（　）

A．5　　　　B．4　　　　C．3　　　　D．2

【答案】A

【分析】复数的基本运算

【详解】因为 $z=\frac{1-i}{1+i}+4-2i=-i+4-2i=4-3i$，所以 $|z|=5$.

故选：A.

4．某学校在校学生有 3000 人，为了增强学生的体质，学校举行了跑步和登山比赛，每人都参加且只参加其中一项比赛，高一、高二、高三年级参加跑步的人数分别为 a,b,c，且 $a:b:c=2:3:4$，全校参加登山的人数占总人数的 $\frac{2}{5}$.为了了解学生对本次比赛的满意程度，按分层抽样的方法从中抽取一个容量为 300 的样本进行调查，则应从高二年级参加跑步的学生中抽取（　）

A．15 人　　　　B．30 人　　　　C．45 人　　　　D．60 人

【答案】D

【分析】先得出全校参加跑步的人数，再由分层抽样的方法求解即可.

【详解】由题意，可知全校参加跑步的人数为 $3000\times\frac{3}{5}=1800$，所以 $a+b+c=1800$.因为 $a:b:c=2:3:4$，所以 $b=1800\times\frac{3}{2+3+4}=600$.因为按分层抽样的方法从中抽取一个容量为 300 的样本，所以应从高二年级参加跑步的学生中抽取的人数为 $600\times\frac{300}{3000}=60$.

故选：D

5．O 为平行四边形 ABCD 两条对角线的交点，$\overrightarrow{AB}=4\vec{e}_1,\overrightarrow{BC}=6\vec{e}_2$，则 $\overrightarrow{DO}=$（　）

A．$2\vec{e}_1\ \square\ \vec{e}_2$　　　　B．$2\vec{e}_1\ \square\ \vec{e}_2$

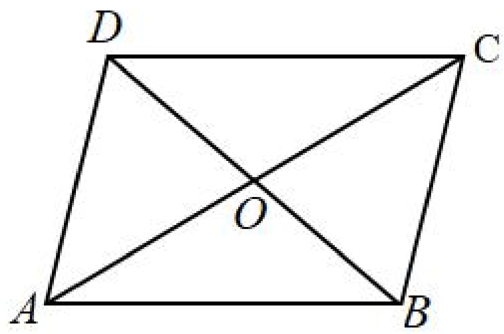
C． $2\vec{e}_1 □ 3\vec{e}_2$　　　　D． $2\vec{e}_1 □ 3\vec{e}_2$

【答案】D

【分析】由题意可得 $\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$，再由向量的减法结合条件可得答案.

【详解】$\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})=□2\vec{e}_1□3\vec{e}_2$.

故选:D.



6．已知α，β，γ是三个不同的平面，m，n是两条不同的直线，则下列命题中正确的是（　）

A．若$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则$\alpha//\beta$　　　　B．若$m//\alpha$，$m//\beta$，则$\alpha//\beta$

C．若$m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则$m//n$　　　　D．若$m//\alpha$，$n//\alpha$，则$m//n$

【答案】C

【分析】ABD 均可举出反例，

由线面垂直的性质可得得到 C 正确.

【详解】对于 A，垂直于同一平面的两平面相交或平行，如图 1，$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，而α，β相交，故 A 错误；

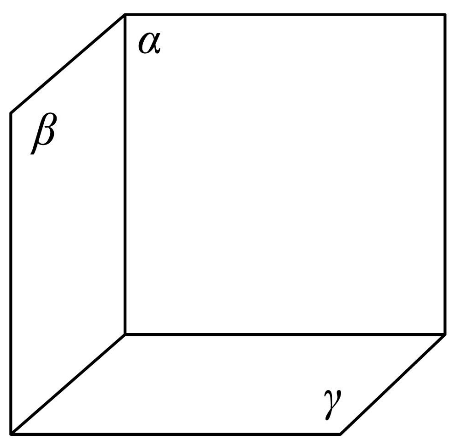


图1

对于 B，平行于同一直线的两平面相交或平行，如图 2，

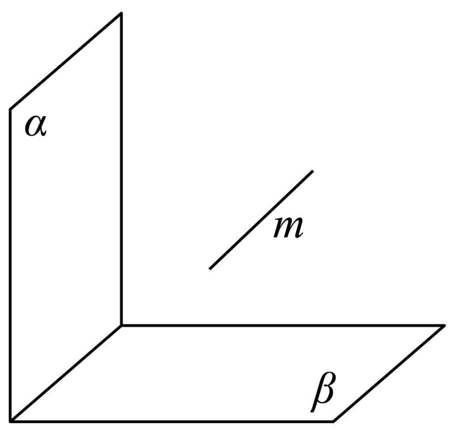


图2

满足 $m//\alpha$，$m//\beta$，但 α,β 相交，B 错误；

对于 C，垂直于同一平面的两直线平行，故 C 正确；

对于 D，平行于同一平面的两直线相交、平行或异面，

如图 3，满足 $m//\alpha$，$n//\alpha$，但 m,n 相交，故 D 错误.

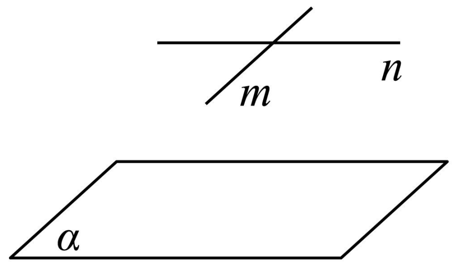


图3

故选：C.

7．函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$ 的零点为 x_0，且 $x_0\in(k,k+1)$，$k\in Z$，则 k 的值为（　）

A．1　　　　B．2　　　　C．0　　　　D．3

【答案】A

【分析】利用函数的零点存在定理求解.

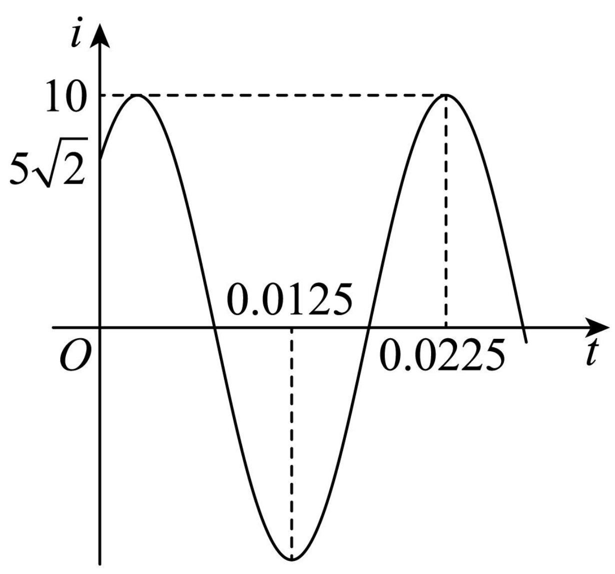
【详解】解：因为 $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $f(1)=-1$, $f(2)=\ln 2-\frac{1}{2}=\ln\frac{2}{\sqrt{e}}>0$,

所以 $x_0\in(1,2)$，

故选：A

8．某次实验得交变电流 i（单位：A）随时间 t（单位：s）变化的函数解析式为 $i=A\sin(\omega t+\varphi)$，其中 $A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ 且 $t\in[0,+\infty)$，其图象如图所示，则下列说法错误的是（　）



A．$\omega=100\pi$　　　　B．$\varphi=\frac{\pi}{4}$

C．当 $t=\frac{3}{80}$ 时，$i=0$　　　　D．当 $t=\frac{9}{80}$ 时，$i=10$

【答案】D

【分析】根据五点法结合图象可得 $i=10\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$，进而即得.

【详解】由题知 $T=2\times(0.0225-0.0125)=0.02$，则 $\omega=100\pi$，又 $A=10$，

则 $i=10\sin(100\pi t+\varphi)$，所以当 $t=0$ 时，$10\sin\varphi=5\sqrt{2}$，

则 $\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

则 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，因此 $i=10\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$，

所以当 $t=\frac{3}{80}$ 时，$i=10\sin\left(100\pi\times\frac{3}{80}+\frac{\pi}{4}\right)=10\sin4\pi=0$，

当 $t=\frac{9}{80}$ 时，$i=10\sin\left(100\pi\times\frac{9}{80}+\frac{\pi}{4}\right)=10\sin\frac{3\pi}{2}=-10$，

因此ABC正确，D错误，

故选：D.

二、多选题

9．已知点 $A(1,2)$，$B(3,x)$，向量 $\vec{a}=(2-x,-1)$，$\overrightarrow{AB}\parallel\vec{a}$，则（　　）

A．$x=-3$ 时 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\vec{a}$ 方向相同

B．$x=2-\sqrt{2}$，时 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\vec{a}$ 方向相同

C．$x=-3$ 时 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\vec{a}$ 方向相反

D．$x=2+\sqrt{2}$，时 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\vec{a}$ 方向相反

【答案】BD

【分析】根据向量共线的坐标运算求解.

【详解】$A(1,2)$，$B(3,x)$，可得 $\overrightarrow{AB}=(2,x-2)$，

又 $\vec{a}=(2-x,-1)$，$\overrightarrow{AB}\parallel\vec{a}$，

可得 $(2-x)(x-2)=-2$，解得 $x=2\pm\sqrt{2}$，

当 $x=2+\sqrt{2}$，时，$\overrightarrow{AB}=(2,\sqrt{2})$，$\vec{a}=(-\sqrt{2},-1)$ 则 $\overrightarrow{AB}=-\sqrt{2}\vec{a}$，

所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\vec{a}$ 方向相反，

当 $x=2-\sqrt{2}$，时，$\overrightarrow{AB}=(2,-\sqrt{2})$，$\vec{a}=(\sqrt{2},-1)$，则 $\overrightarrow{AB}=\sqrt{2}\vec{a}$，

$\overrightarrow{AB}$ 与 $\vec{a}$ 方向相同.

故选:BD.

10．已知复数 $z=(2-3i)(1+i)$，其共轭复数为 $\overline{z}$，则（　）

A．z 的实部与虚部之和为 4　　　　B．$\overline{z}=5+i$

C．z^2 是纯虚数　　　　D．$|\overline{z}|=2\sqrt{6}$

【答案】AB

【分析】由复数的乘法求解 z，根据复数的特征、共轭复数 $\overline{z}$、复数的模逐项判断即可．

【详解】对于 A，由题意可得 $z=2+2i-3i-3i^2=5-i$，z 的实部与虚部之和为 $5-1=4$，故 A 正确；

对于 B，$\overline{z}=5+i$，故 B 正确；

对于 C，$z^2=(5-i)^2=24-10i$，z^2 不是纯虚数，故 C 错误；

对于 D，$|\overline{z}|=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$，故 D 错误．

故选：AB.

11．阅读数学材料："设 P 为多面体 M 的一个顶点，定义多面体 M 在点 P 处的离散曲率为 $1-\frac{1}{2\pi}(\angle Q_1PQ_2+\angle Q_2PQ_3+\cdots+\angle Q_{k-1}PQ_k+\angle Q_kPQ_1)$，其中 $Q_i(i=1,2,\cdots,k,k\geqslant 3)$ 为多面体 M 的所有与点 P 相邻的顶点，且平面 Q_1PQ_2，平面 Q_2PQ_3，…，平面 $Q_{k-1}PQ_k$ 和平面 Q_kPQ_1 为多面体 M 的所有以 P 为公共点的面."解答问题：已知在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$AA_1=AB$，则下列结论正确的是（　）

A．直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 在其各顶点处的离散曲率都相等

B．若 $AC=BD$，则直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 在顶点 A 处的离散曲率为 $\frac{1}{4}$

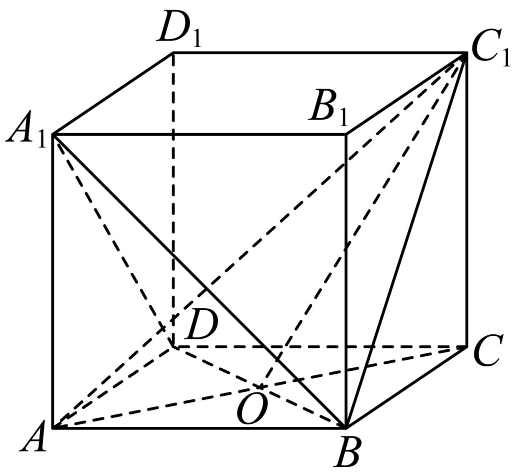
C．若四面体 A_1ABD 在点 A_1 处的离散曲率为 $\frac{7}{12}$，则 $AC_1\perp$ 平面 A_1BD

D．若直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 在顶点 A 处的离散曲率为 $\frac{1}{3}$，则 BC_1 与平面 ACC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

【答案】BCD

【分析】根据多面体 M 在点 P 处的离散率的定义，由各选项的条件分析几何体的结构特征，判断垂直关系及计算直线与平面所成角，判断选项的正误.

【详解】



对于A，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 在点A处的离散曲率为 $1-\frac{1}{2\pi}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\angle BAD)$，

在A点处的离散曲率为 $1-\frac{1}{2\pi}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\angle ABC)$，两者不一定相等，A项错误；

对于B，$AC=BD$，则四边形ABCD为正方形，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 在点A处的离散曲率为

$1-\frac{1}{2\pi}\times(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{4}$，B项正确；

对于C，因为直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，四边形ABCD为菱形，$AA_1=AB$，所以直四棱柱

$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 侧面均为正方形，

四面体 A_1ABD 在点 A_1 处的离散曲率为 $1-\frac{1}{2\pi}(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\angle BA_1D)=\frac{7}{12}$，

则 $\angle BA_1D=\frac{\pi}{3}$，则 $\triangle A_1BD$ 为正三角形，$BD=A_1B=A_1D=\sqrt{2}AB$，所以 $BD^2=AB^2+AD^2$，四边形ABCD为正方形，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，

因为 $CC_1\perp$平面ABCD，$BD\subset$平面ABCD，所以 $BD\perp CC_1$，

又因为 $BD\perp AC$，$AC\subset$平面 ACC_1，$CC_1\subset$平面 ACC_1，$AC\cap CC_1=C$，

所以 $BD\perp$平面 ACC_1，又因为 $AC_1\subset$平面 ACC_1，所以 $AC_1\perp BD$，

同理可得，$AC_1\perp AB_1$，$BD\subset$平面 A_1BD，$A_1B\subset$平面 A_1BD，$BD\cap A_1B=B$，

所以 $AC_1\perp$平面 A_1BD，C项正确；

对于D，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 在点A处的离散曲率为 $1-\frac{1}{2\pi}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\angle BAD)=\frac{1}{3}$，

则 $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，设 $AA_1=AB=1$，AC交 BD_1 于点O，

则 $BC_1=\sqrt{2}$，$BO=\frac{1}{2}$，

由选项C知，$BD\perp CC_1$，因为四边形ABCD为菱形，所以 $BD\perp AC$，

又 $AC\subset$平面 ACC_1，$CC_1\subset$平面 ACC_1，$AC\cap CC_1=C$，

所以 $BD \perp$ 平面 ACC_1，$\angle BC_1O$ 即 BC_1 与平面 ACC_1 所成的角，

$\sin\angle BC_1O = \dfrac{BO}{BC_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$，所以 BC_1 与平面 ACC_1 所成的角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，D 项正确；

故选：BCD.

12．下列不等式成立的是（　）

A．若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$　　　　B．若 $a<0<b$，则 $ab<a^2$

C．若 $ab=4$，则 $a+b\geq 4$　　　　D．若 $a>b$，$c>d$，则 $a-d>b-c$

【答案】BD

【分析】当 $c=0$ 时，即可判断 A；当 $a=b=-2$，即可判断 C；根据不等式的基本性质即可判断 C，D.

【详解】对于 A，当 $c=0$ 时，则 $ac^2=bc^2$，故 A 错误；

对于 B，由 $a<0<b$，则 $ab<0$，$a^2>0$，故 B 正确；

对于 C，当 $a=b=-2$，则 $a+b=-4$，故 C 错误；

对于 D，由 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$，所以 $a-d>b-c$，故 D 正确.

故选：BD.

三、填空题

13．已知平面向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(-2,1)$，$\vec{c}=(2,t)$，若 $(\vec{a}+2\vec{b})\perp\vec{c}$，则 $t=$__________.

【答案】$\dfrac{3}{2}$/1.5

【分析】由平面向量的坐标运算得出 t.

【详解】$\vec{a}+2\vec{b}=(1,2)+(-4,2)=(-3,4)$，

因为 $(\vec{a}+2\vec{b})\perp\vec{c}$，所以 $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{c}=(-3,4)\cdot(2,t)=-6+4t=0$，解得 $t=\dfrac{3}{2}$.

故答案为：$\dfrac{3}{2}$.

14．已知复数 z 满足 $|z-2i|=4$，则 $|z+3i|$ 的取值范围是__________.

【答案】$[1,9]$

【分析】方法一：根据复数的几何意义与点和圆的位置关系求解；方法二：利用不等式求解.

【详解】方法一：因为 $|z-2i|=4$，

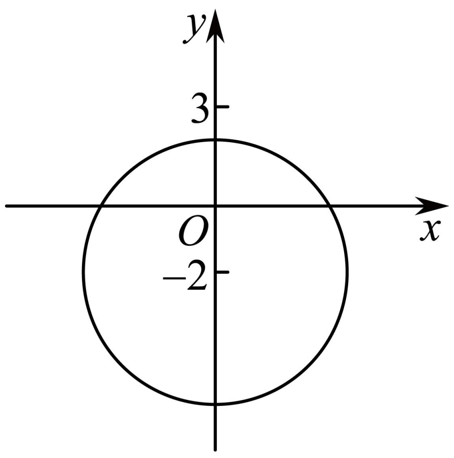
所以 z 在复平面内对应的点是复平面内到点 $(0,2)$ 的距离为 4 的点的集合，如图所示.

由图象可知，

当 $z=2i$ 时，$|z-3i|_{min}=1$，

当 $z=-6i$ 时，$|z-3i|_{max}=9$，

所以 $|z-3i|$ 的取值范围是 $[1,9]$．



方法二：因为 $|z-3i|=|z+2i-5i|$，

又 $|5i|-|z+2i|\le|z-3i|=|z+2i-5i|\le|5i|+|z+2i|$，

所以 $1\le|z-3i|\le9$．

故答案为：$[1,9]$

15．在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，$PA\perp PB$，且 $PA=PB=3\sqrt{2}$，$\triangle ABC$ 是等边三角形，则该三棱锥外接球的表面积为______．

【答案】48π

【分析】通过题意画出图像，通过三棱锥图像性质以及三棱锥外接球的相关性质确定圆心位置，最后根据各边所满足的几何关系列出算式，即可得出结果．

【详解】如图所示，作 AB 中点 D，连接 PD、CD，

在 CD 上作 $\triangle ABC$ 的中心 E，

过点 E 作平面 ABC 的垂线，

在垂线上取一点 O，使得 $PO=CO$，

因为三棱锥底面是等边三角形，

E 是 $\triangle ABC$ 的中心，

所以三棱锥外接球球心在过点 E 的平面 ABC 垂线上，

又因 $PO=CO$，则 O 即为球心，

因为平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，$PA\perp PB$，$PA=PB=3\sqrt{2}$，

平面 $PAB\cap$ 平面 $ABC=AB$，$PD\perp AB$，

所以 $PD\perp$ 平面 ABC，

$AB = \sqrt{PA^2 + PB^2} = \sqrt{18 + 18} = 6$

$CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3}$，

$CE = \frac{2}{3}CD = 2\sqrt{3}$，$PD = \sqrt{PB^2 - BD^2} = \sqrt{18 - 9} = 3$，

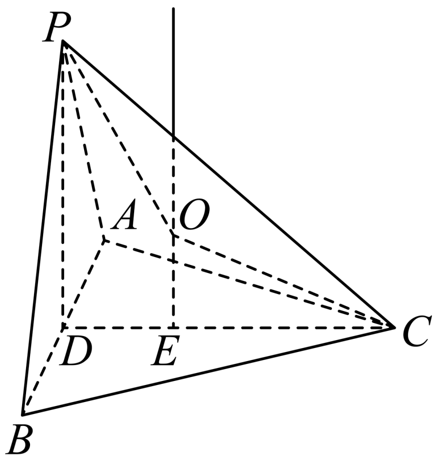
设球的半径为 r，

则 $PO = OC = r, OE = \sqrt{OC^2 - CE^2} = \sqrt{r^2 - 12}$，

$\because \left(PD - OE\right)^2 + DE^2 = PO^2$，

即 $\left(3 - \sqrt{r^2 - 12}\right)^2 + 3 = r^2$，解得 $r^2 = 12$，

故三棱锥外接球的表面积为 $4\pi r^2 = 48\pi$.



故答案为：48π

【点睛】三棱锥外接球表面积的问题，从以下几个角度考虑：

（1）三棱锥的性质的应用；

（2）通过三棱锥的几何特征确定外接球的球心和半径；

（3）推理能力的应用；

（4）数形结合，化归与转化思想的应用.

16．若 $x > 0$，则 $x + \frac{4}{x+1}$ 的最小值为__________.

【答案】3

【分析】利用基本不等式，变形求函数的最小值.

【详解】因为 $x > 0$，由基本不等式得：$x + \frac{4}{x+1} = x + 1 + \frac{4}{x+1} - 1 \geq 2\sqrt{\left(x+1\right) \cdot \frac{4}{x+1}} - 1 = 3$，

当且仅当 $x + 1 = \frac{4}{x+1}$，且 $x > 0$，即 $x = 1$ 时等号成立.

故答案为：3

四、解答题