

2024-2025 学年山东省日照市高二上学期开学摸底考数学检测试题

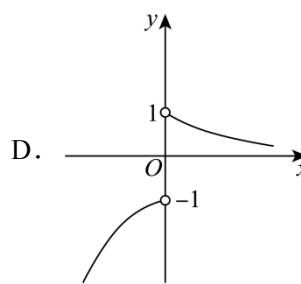
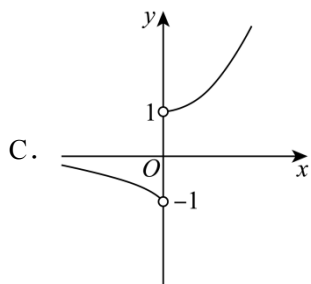
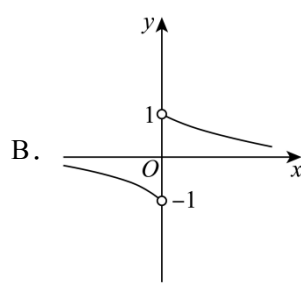
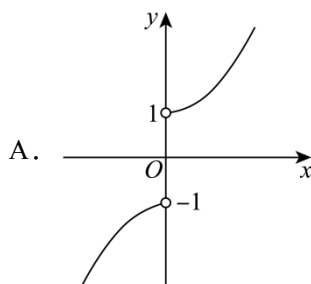
(一)

一、单选题（本大题共 8 小题）

1. 已知集合 $A = \{x | x < 0\}$, $B = \{x | -x^2 - x + 2 > 0\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B =$ ()

- A. $\{x | 0 < x < 1\}$ B. $\{x | 0 \leq x < 1\}$ C. $\{x | -2 < x < 0\}$ D. $\{x | 1 < x < 2\}$

2. 函数 $y = \frac{xa^x}{|x|} (a > 1)$ 的图象的大致形状是 ()



3. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$, 则

$C =$ ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (3a-1)x + 4a, & (x < 1) \\ \frac{a}{x}, & (x \geq 1) \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $\left[\frac{1}{7}, 1\right)$ B. $\left[0, \frac{1}{3}\right)$
C. $\left[\frac{1}{6}, 1\right)$ D. $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$

5. 已知 $a = \cos \frac{\pi}{5}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \log_5 2$, 则 ()

- A. $c < b < a$ B. $b < a < c$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

6. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形, 点 D 是 AB 的中点, 点 G 是线段 CD 上一点, 满足 $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5} \overrightarrow{AC}$, 则 $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{AC} = (\quad)$

A. $-\frac{72}{5}$

B. $\frac{36}{5}$

C. $\frac{72}{5}$

D. $-\frac{36}{5}$

7. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x-1}{3-x} + ax + a + b \tan(x-2)$, 则 $f(x)$ 图象有如下性质 ()

A. 关于点 $(2, 2a)$ 中心对称

B. 关于直线 $x = b$ 轴对称

C. 关于点 $(2, 2b)$ 中心对称

D. 关于点 $(2, 3a)$ 中心对称

8. 设 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$, 且 $\frac{1}{2+\cos \alpha_1} + \frac{1}{2+\cos(2\alpha_2)} = 2$, 则 $|8\pi - \alpha_1 - \alpha_2|$ 的最小值等于 ()

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{3\pi}{4}$

D. π

二、多选题 (本大题共 3 小题)

9. 设 A, B 为两个随机事件, 以下命题正确的是 ()

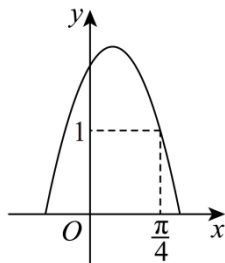
A. 若 A 与 B 对立, 则 $P(AB) = 1$

B. 若 A 与 B 互斥, $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$, 则 $P(A+B) = \frac{5}{6}$

C. 若 $P(\bar{A}) = \frac{1}{3}, P(\bar{B}) = \frac{1}{2}$, 且 $P(AB) = \frac{1}{6}$, 则 A 与 B 相互独立

D. 若 A 与 B 相互独立, $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{2}{3}$, 则 $P(A\bar{B}) = \frac{1}{9}$

10. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + a \cos \omega x (x \in \mathbf{R}, \omega > 0)$ 的最大值为 2, 其部分图象如图所示, 则 ()



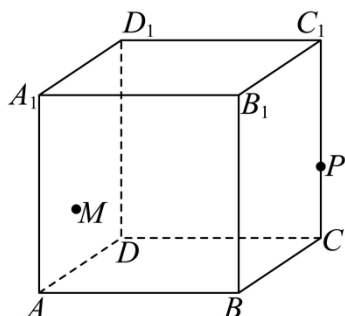
A. $a > 0$

B. 函数 $f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 为偶函数

C. 满足条件的正实数 ω 存在且唯一

D. $f(x)$ 是周期函数, 且最小正周期为 π

11. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2, 点 M 是其侧面 ADD_1A_1 上的动点 (含边界), 点 P 是线段 CC_1 上的动点, 下列结论正确的是 ()

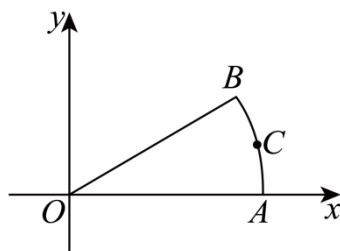


- A. 存在点 P, M , 使得平面 B_1D_1M 与平面 PBD 平行
 B. 当点 P 为 CC_1 中点时, 过 A, P, D_1 点的平面截该正方体所得的截面是梯形
 C. 当点 M 是线段 A_1D 的中点时, 不存在点 P 使直线 A_1P 垂直平面 MB_1D_1
 D. 当 P 为棱 CC_1 的中点且 $PM = 2\sqrt{2}$ 时, 点 M 的轨迹长度为 $\frac{2\pi}{3}$

三、填空题 (本大题共 3 小题)

12. 若幂函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $(2, 8)$, 则 $f(-1) =$ _____.

13. 已知扇形 AOB 的半径为 10, 以 O 为原点建立如图所示的平面直角坐标系, 已知 $A(10, 0), B(8, 6)$, 则弧 AB 的中点 C 的坐标为 _____.



14. 若存在实数 m , 使得对于任意的 $x \in [a, b]$, 不等式 $m^2 + \sin x \cos x \leq 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot m$ 恒成立, 则 $b - a$ 取得最大值时, $\left|\sin \frac{a+b}{2}\right| =$ _____.

四、解答题 (本大题共 5 小题)

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c 满足 $2bc \sin A = \sqrt{3}(a^2 + c^2 - b^2)$.

(1) 求 B 的大小;

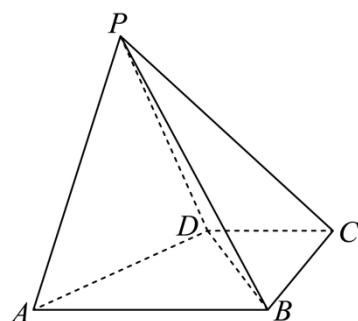
(2)若 $b=3$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长.

16. 已知盒中有大小、质地相同的红球、黄球、蓝球共 4 个，从中任取一球，得到红球或黄球的概率是 $\frac{3}{4}$ ，得到黄球或蓝球的概率是 $\frac{1}{2}$.

(1)求盒中红球、黄球、蓝球的个数；

(2)设置游戏规则如下：从盒中有放回的取球两次，每次任取一球记下颜色. 若取到两个球颜色相同则甲胜，否则乙胜从概率的角度判断这个游戏是否公平，请说明理由.

17. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB \parallel CD$ ， $AB \perp BC$ ， $DC=BC=4$ ， $AB=8$ ， $AD=4\sqrt{2}$.



(1)证明： $BD \perp$ 平面 PAD ；

(2)若 $\triangle PAD$ 为等边三角形，求点 C 到平面 PBD 的距离.

18. 设 a 为常数，函数 $f(x) = -2\sin^2 x - a\sin x + 1$.

(1)当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的值域；

(2)若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有两个不同的零点，求实数 a 的取值范围；

(3)当 $-1 \leq a \leq 1$ 时，设 n 为正整数， $f(x)$ 在区间 $(0, n\pi)$ 上恰有 2024 个零点，求所有可能的正整数 n 的值.

19. 给定正整数 $n \geq 2$ ，设集合 $M = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1\}, i=1, 2, \dots, n\}$ ，对于集合 M 中的任意元素 $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ， $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ，定义 $|\alpha \oplus \beta| = (|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|)$ ， $|\alpha| = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

(1)当 $n=3$ 时，若 $\beta = (1, 1, 0)$ ， $|\alpha \oplus \beta| = 2$ ，求所有满足条件的 α ；

(2)当 $n=3$ 时， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k (k \geq 2)$ 均为 M 中的元素，且 $|\alpha_i \oplus \alpha_j| \geq 2 (1 \leq i < j \leq k)$ ，求 k 的最大值；

(3)当 $n \geq 5$ 时，若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k (k \geq 2)$ 均为 M 中的元素，其中 $|\alpha_0| = 0, |\alpha_k| = n$ ，且满足 $|\alpha_i \oplus \alpha_{i+1}| = n - 2 (1 \leq i \leq k - 1)$ ，求 k 的最小值.

答案

1. 【正确答案】B

【详解】 $B = \{x | -2 < x < 1\}$, $\complement_{\mathbf{R}} A = \{x | x \geq 0\}$, $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \{x | 0 \leq x < 1\}$.

故选 B.

2. 【正确答案】C

【分析】分类讨论 $x > 0$ 与 $x < 0$, 结合指数函数的单调性即可得解.

【详解】因为 $y = f(x) = \frac{xa^x}{|x|} (a > 1)$,

当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{xa^x}{x} = a^x$, 由于 $a > 1$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 排除 BD;

当 $x < 0$ 时, $f(x) = \frac{xa^x}{-x} = -a^x$, 由于 $a > 1$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 排除 A;

而 C 选项满足上述性质, 故 C 正确.

故选 C.

3. 【正确答案】C

【分析】利用面积公式 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C$ 和余弦定理 $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos C$ 进行计算可得

.

【详解】由题可知 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$,

所以 $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\sin C$,

由余弦定理 $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos C$,

所以 $\sin C = \cos C$,

因为 $C \in (0, \pi)$,

所以 $C = \frac{\pi}{4}$.

故选 C.

4. 【正确答案】D

【分析】根据各段函数的单调性和分段点处的高低可得关于 a 的不等式组, 故可得其取值范围.

【详解】因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，故
$$\begin{cases} 3a-1 < 0 \\ a > 0 \\ 3a-1+4a \geq a \end{cases},$$

故 $\frac{1}{6} \leq a < \frac{1}{3}$.

故选 D.

5. 【正确答案】A

【分析】根据对数函数及对数的运算性质可判断 b, c 的大小，根据余弦函数的单调性可判断 a, b 的大小，故可得正确的选项.

【详解】 $c = \log_5 2 = \frac{\lg 2}{\lg 5} < \frac{\lg 2}{\lg 4} = \frac{1}{2} = b$, $a = \cos \frac{\pi}{5} > \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = b$,

故 $a > b > c$.

故选 A.

6. 【正确答案】A

【分析】根据题意，得到 $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5} \overrightarrow{AC} = 2\lambda \overrightarrow{AD} + \frac{1}{5} \overrightarrow{AC}$ ，由 C, D, G 三点共线，求得

$\lambda = \frac{2}{5}$ ，得到 $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5} \overrightarrow{AC}$ ，结合向量的数量积的运算公式，即可求解.

【详解】因为 D 为 AB 的中点， $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5} \overrightarrow{AC} = 2\lambda \overrightarrow{AD} + \frac{1}{5} \overrightarrow{AC}$ ，

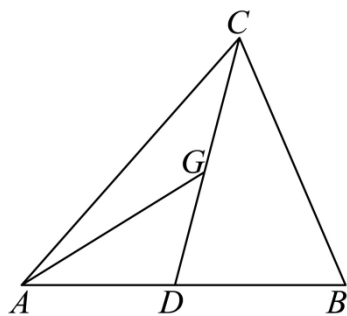
因为 C, D, G 三点共线，可得 $2\lambda + \frac{1}{5} = 1$ ，解得 $\lambda = \frac{2}{5}$ ，即 $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5} \overrightarrow{AC}$ ，

又因为 $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形，

所以 $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{AC} = -(\frac{2}{5} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5} \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC} = -(\frac{2}{5} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{5} \overrightarrow{AC}^2)$

$= -(\frac{2}{5} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{5} |\overrightarrow{AC}|^2) = -(\frac{2}{5} \times 6 \times 6 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times 6^2) = -\frac{72}{5}$.

故选 A.



7. 【正确答案】D

【分析】根据解析式可得 $f(4-x) + f(x) = 6a$ ，故可得正确的选项.

【详解】 $f(4-x) = \ln \frac{4-x-1}{3-(4-x)} + a(4-x) + a + b \tan(4-x-2)$

$= \ln \frac{3-x}{x-1} + a(4-x) + a + b \tan(2-x)$

$$= -\ln \frac{x-1}{3-x} + a(4-x) + a - b \tan(x-2),$$

$$\text{故 } f(4-x) + f(x) = a(4-x) + a + ax + a = 6a,$$

故 $f(x)$ 图象关于点 $(2, 3a)$ 中心对称.

故选 D.

8. 【正确答案】B

【分析】根据题意，利用余弦函数的性质，得到 $\cos \alpha_1 = -1, \cos 2\alpha_2 = -1$ ，结合三角函数的性质，求得 $|8\pi - \alpha_1 - \alpha_2| = \left| 8\pi + \frac{3\pi}{2} - (2k_1 + k_2)\pi \right|, k_1 \in \mathbf{Z}, k_2 \in \mathbf{Z}$ ，即可求解.

【详解】根据三角函数的性质知， $\cos \alpha_1 \in [-1, 1], \cos 2\alpha_2 \in [-1, 1]$ ，

$$2 + \cos \alpha_1 \in [1, 3], 2 + \cos(2\alpha_2) \in [1, 3], \frac{1}{2 + \cos \alpha_1} \in \left[\frac{1}{3}, 1 \right], \frac{1}{2 + \cos(2\alpha_2)} \in \left[\frac{1}{3}, 1 \right],$$

$$\frac{1}{2 + \cos \alpha_1} + \frac{1}{2 + \cos(2\alpha_2)} \in \left[\frac{2}{3}, 2 \right],$$

$$\text{要使得 } \frac{1}{2 + \cos \alpha_1} + \frac{1}{2 + \cos(2\alpha_2)} = 2, \text{ 可得 } \cos \alpha_1 = -1, \cos 2\alpha_2 = -1,$$

$$\text{则 } \alpha_1 = -\pi + 2k_1\pi, k_1 \in \mathbf{Z}, 2\alpha_2 = -\pi + 2k_2\pi, k_2 \in \mathbf{Z}, \text{ 即 } \alpha_2 = -\frac{\pi}{2} + k_2\pi, k_2 \in \mathbf{Z},$$

$$\text{可得 } \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{3\pi}{2} + (2k_1 + k_2)\pi, k_1 \in \mathbf{Z}, k_2 \in \mathbf{Z},$$

$$\text{所以 } |8\pi - \alpha_1 - \alpha_2| = \left| 8\pi + \frac{3\pi}{2} - (2k_1 + k_2)\pi \right|, k_1 \in \mathbf{Z}, k_2 \in \mathbf{Z},$$

$$\text{当 } 2k_1 + k_2 \leq 9 \text{ 时, } |8\pi - \alpha_1 - \alpha_2| \geq \left| 8\pi + \frac{3\pi}{2} - 9\pi \right| = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{当 } 2k_1 + k_2 \geq 10 \text{ 时, 可得 } |8\pi - \alpha_1 - \alpha_2| \geq \left| 8\pi + \frac{3\pi}{2} - 10\pi \right| = \frac{\pi}{2},$$

所以当 $2k_1 + k_2 = 9$ 或 $2k_1 + k_2 = 10$ 时， $|8\pi - \alpha_1 - \alpha_2|$ 的最小值等于 $\frac{\pi}{2}$.

故选 B.

9. 【正确答案】BD

【分析】根据互斥（或对立）事件概率的性质可判断 AB 的正误，根据独立事件的定义和性质可判断 CD 的正误.

【详解】对于 A，若 A 与 B 对立，则 $P(AB) = 0$ ，故 A 错误；

对于 B，A 与 B 互斥，则 $P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{6}$ ，故 B 正确；

对于 C, 因为 $P(\bar{A}) = \frac{1}{3}, P(\bar{B}) = \frac{1}{2}$, 故 $P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$,

故 $P(A)P(B) = \frac{1}{3} \neq P(AB)$, 故 A 与 B 不相互独立, 故 C 错误;

对于 D, 因为 $P(B) = \frac{2}{3}$, 所以 $P(\bar{B}) = \frac{1}{3}$,

而 A 与 B 相互独立, 故 A 与 $\bar{B}$ 相互独立, 故 $P(A\bar{B}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, 故 D 正确.

故选 BD.

10. 【正确答案】ACD

【分析】根据题意, 求得函数 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$, 结合三角函数的图象与性质, 逐项判定, 即可求解.

【详解】由函数 $f(x) = \sin \omega x + a \cos \omega x = \sqrt{1+a^2} \sin(\omega x + \varphi)$, 且 $\tan \varphi = a$,

因为函数 $f(x)$ 的最大值为 2, 可得 $\sqrt{1+a^2} = 2$, 解得 $a = \pm\sqrt{3}$,

又因为 $f(0) = a > 0$, 所以 $a = \sqrt{3}$, 所以 A 正确;

$$f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x = 2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$$

因为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{3}\right) = 1$, 且函数 $f(x)$ 在 $\frac{\pi}{4}$ 的附近单调递减,

所以 $\frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $\omega = 2 + 8k, k \in \mathbf{Z}$,

又因为 $\frac{T}{2} > \frac{\pi}{4}$, 可得 $T > \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{2\pi}{\omega} > \frac{\pi}{2}$, 解得 $0 < \omega < 4$, 所以 $\omega = 2$,

此时 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$, 其最小正周期为 $T = \pi$, 所以 C、D 正确;

$$\text{设 } F(x) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 2 \sin 2x,$$

$F(-x) = 2 \sin[2(-x)] = -2 \sin 2x = -F(x)$, 所以 $F(x)$ 为奇函数,

即函数 $f(x - \frac{\pi}{6})$ 为奇函数, 故 B 错误.

故选 ACD.

11. 【正确答案】ABD

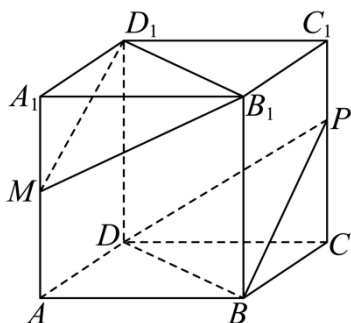
【分析】找到点 P, M 使得平面 B_1D_1M 与平面 PBD 平行肯定选项 A; 作出过

A, P, D_1 点的平面截该正方体所得的截面判断选项 B; 当点 P 与点 C 重合时, 直线

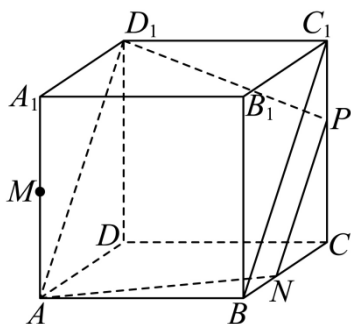
AP 垂直平面 MB_1D_1 , 否定选项 C; 求得点 M 的轨迹长度判断选项 D.

【详解】对于 A 选项, 当 M 为 AA_1 中点, P 为 CC_1 中点时,

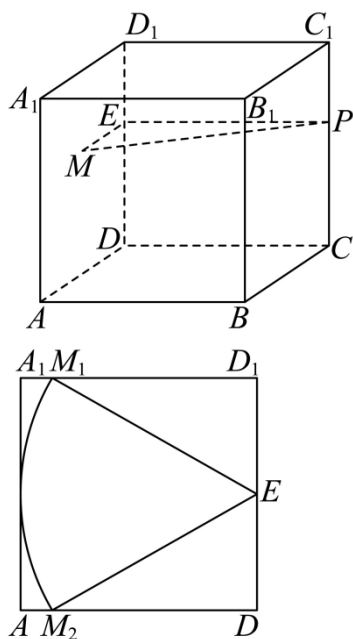
连接 B_1D_1 、 B_1M 、 D_1M 、 PB 、 PD 、 BD ，结合正方体的结构特征有
 $BD \parallel B_1D_1$ ，又 $BD \subset$ 平面 PBD ， $B_1D_1 \not\subset$ 平面 PBD ，则 $B_1D_1 \parallel$ 平面 PBD ，
 $MB_1 \parallel PD$ ，又 $PD \subset$ 平面 PBD ， $B_1M \not\subset$ 平面 PBD ，则 $B_1M \parallel$ 平面 PBD ，
 又 $B_1M \cap B_1D_1 = B_1$ 且都在面 B_1D_1M 内，则平面 $B_1D_1M \parallel$ 平面 PBD 。故 A 正确；



对于 B 选项，取 BC 中点 N ，连接 PN 、 NA 、 AD_1 、 PD_1 、 BC_1
 则 $PN \parallel BC_1$ ， $AD_1 \parallel BC_1$ ，则 $AD_1 \parallel PN$ ，又 $AD_1 \neq PN$ ，则 AD_1PN 为梯形。
 则梯形 AD_1PN 为截面，故 B 正确；



对于 C 选项，当 M 为 A_1D 中点，当点 P 与点 C 重合时，
 由三垂线定理及逆定理易知： $A_1P \perp B_1D_1$ ， $A_1P \perp MD_1$ ，
 根据线面垂直的判定，得直线 $A_1P \perp$ 平面 MB_1D_1 ，故 C 错误；
 对于 D 选项，取 DD_1 中点 E ，连接 PE ， ME ， PM ，则 $PE \perp$ 平面 AA_1D_1D ，
 根据线面垂直的性质有 $PE \perp ME$ ，则 $ME = \sqrt{PM^2 - PE^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2$ ，
 则点 M 在侧面 AA_1D_1D 内运动轨迹为以 E 为圆心半径为 2 的劣弧，
 分别交 AD 、 A_1D_1 于 M_2 、 M_1 ，则 $\angle M_1ED_1 = \angle M_2ED = \frac{\pi}{3}$ ，
 则 $\angle M_1EM_2 = \frac{\pi}{3}$ ，劣弧 $\overset{1}{\cancel{M_1M_2}}$ 的长为 $\frac{\pi}{3} \times 2 = \frac{2\pi}{3}$ 。故 D 正确。



故选 ABD.

12. 【正确答案】 -1

【分析】 设出 $f(x) = x^\alpha$ ，代入点 $(2, 8)$ ，求出 $\alpha = 3$ ，从而求出解析式，从而求出 $f(-1) = -1$.

【详解】 设 $f(x) = x^\alpha$ ，将 $(2, 8)$ 代入， $2^\alpha = 8$ ，解得： $\alpha = 3$ ，
故 $f(x) = x^3$ ， $f(-1) = -1$.

故 -1.

13. 【正确答案】 $(3\sqrt{10}, \sqrt{10})$

【分析】 设 $\angle AOC = \alpha$ ，则 $\tan 2\alpha = \frac{3}{4}$ ，求出 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ ，利用同角三角函数关系得到

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ， $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ ，求出答案.

【详解】 令 $\angle AOC = \alpha$ ，则 $\angle AOB = 2\alpha$ ，

$\tan 2\alpha = \frac{3}{4} = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ ，解得 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ ，

即 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{3}$ ，又 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ，

又 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，解得 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ， $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ ，

$C\left(10 \times \frac{3\sqrt{10}}{10}, 10 \times \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$ ，即 $C(3\sqrt{10}, \sqrt{10})$.

故 $(3\sqrt{10}, \sqrt{10})$.

14. 【正确答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】以 m 为变量，结合一元二次不等式的存在性问题可得 $\sin 2x \leq \frac{1}{2}$ ，解不等式

结合题意得 $[a, b] \subseteq \left[k\pi - \frac{7\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right], (k \in \mathbf{Z})$ ，由此可得答案.

【详解】因为 $m^2 + \sin x \cos x \leq 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot m$ 恒成立，

即 $m^2 - 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot m + \sin x \cos x \leq 0$ 恒成立，

若存在实数 m ，使得上式成立，则 $\Delta = 4 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 4 \sin x \cos x \geq 0$ ，

则 $\Delta = 2 - 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 2 \sin 2x = 2 - 2 \sin 2x - 2 \sin 2x = 2 - 4 \sin 2x \geq 0$ ，

可得 $\sin 2x \leq \frac{1}{2}$ ，可得 $2k\pi - \frac{7\pi}{6} \leq 2x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$ ，

解得 $k\pi - \frac{7\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$ ，

由 $[a, b] \subseteq \left[k\pi - \frac{7\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right], (k \in \mathbf{Z})$ ，

则 $b - a$ 取得最大值时 $a = k\pi - \frac{7\pi}{12}, b = k\pi + \frac{\pi}{12}, (k \in \mathbf{Z})$ ，

此时 $\left|\sin \frac{a+b}{2}\right| = \left|\sin \frac{k\pi - \frac{7\pi}{12} + k\pi + \frac{\pi}{12}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}, (k \in \mathbf{Z})$.

故答案为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【思路导引】双变量问题的解题关键是一次只研究其中一个变量，本题先以 m 为变量，转化为存在性问题分析求解.

15. 【正确答案】 (1) $\frac{\pi}{3}$

(2) 9

【分析】(1) 根据题意，由余弦定理得 $b \sin A = \sqrt{3} a \cos B$ ，再由正弦定理得

$\sin B = \sqrt{3} \cos B$ ，即可求解；

(2) 由三角形的面积公式，求得 $ac = 9$ ，根据题意和余弦定理，化简求得 $a + c$ 的值，即可求解.

【详解】(1) 因为 $2bc \sin A = \sqrt{3}(a^2 + c^2 - b^2)$, 可得 $\frac{2bc \sin A}{2ac} = \sqrt{3} \times \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$,

由余弦定理得 $b \sin A = \sqrt{3}a \cos B$,

又由正弦定理得 $\sin B \sin A = \sqrt{3} \sin A \cos B$,

因为 $0 < A < \pi$, 所以 $\sin A \neq 0$, 所以 $\sin B = \sqrt{3} \cos B$, 所以 $\tan B = \sqrt{3}$,

又因为 $0 < B < \pi$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由三角形的面积公式, 可得 $S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{9\sqrt{3}}{4}$, 可得 $ac = 9$,

又由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = (a+c)^2 - 3ac$,

因为 $b = 3$, 所以 $(a+c)^2 = b^2 + 3ac = 9 + 3 \times 9 = 36$, 解得 $a+c = 6$,

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c = 9$.

16. 【正确答案】(1) 盒中红球、黄球、蓝球的个数分别是 2, 1, 1;

(2) 不公平, 理由见解析

【分析】(1) 根据题设的概率可得关于球数的方程组, 求出其解后可得不同颜色的球数.

(2) 利用列举法可求甲胜或乙胜的概率, 从而可判断游戏是否公平.

【详解】(1) 设盒中红球、黄球、蓝球个数分别为 x, y, z , 从中任取一球, 得到红球或黄球为事件 A , 得到黄球或蓝球为事件 B ,

$$\text{则 } P(A) = \frac{x+y}{4}, P(B) = \frac{y+z}{4},$$

$$\text{由已知得 } \begin{cases} x+y+z=4 \\ \frac{x+y}{4} = \frac{3}{4} \\ \frac{y+z}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

所以盒中红球、黄球、蓝球的个数分别是 2, 1, 1;

(2) 由 (1) 知红球、黄球、蓝球个数分别为 2 个, 1 个, 1 个,

用 r_1, r_2 表示红球, 用 a 表示黄球, 用 b 表示蓝球,

m 表示第一次取出的球, n 表示第二次取出的球, (m, n) 表示试验的样本点,

则样本空间 $\Omega = \{(r_1, r_1), (r_1, r_2), (r_1, a), (r_1, b), (r_2, r_1), (r_2, r_2), (r_2, a), (r_2, b), (a, r_1), (a, r_2),$

$(a, a), (a, b), (b, r_1), (b, r_2), (b, a), (b, b)\}$.

可得 $n(\Omega) = 16$,

记“取到两个球颜色相同”为事件 M , “取到两个球颜色不相同”为事件 N ,

则 $n(M)=6$ ，所以 $P(M)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$ ，

所以 $P(N)=1-P(M)=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$ ，

因为 $\frac{5}{8}>\frac{3}{8}$ ，所以此游戏不公平。

17. 【正确答案】(1)证明见解析

(2) $\sqrt{6}$ 。

【分析】(1) 根据梯形边长利用勾股定理可得 $AD \perp BD$ ，再利用面面垂直性质定理可得结论；

(2) 利用面面垂直的性质可得三棱锥 $P-BCD$ 的高为 $|PO|=2\sqrt{6}$ ，再利用等体积法计算即可求得点 C 到平面 PBD 的距离为 $\sqrt{6}$ 。

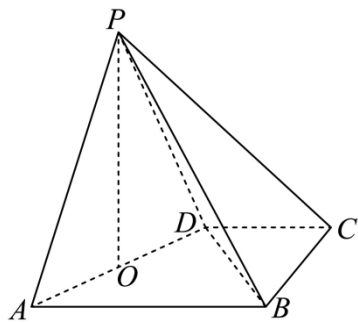
【详解】(1) 因为 $AB \perp BC$ ， $AB \parallel CD$ ， $DC=BC=4$ ，所以 $BD=4\sqrt{2}$ ，

又因为 $AD=4\sqrt{2}$ ，所以 $AD^2+BD^2=AB^2$ ，则 $AD \perp BD$ 。

因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，且平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD=AD$ ， $AD \subset$ 平面 PAD ，所以 $BD \perp$ 平面 PAD 。

(2) 在面 PAD 内过点 P 作 $PO \perp AD$ ，因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，且平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD=AD$ ，

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$ ，如下图所示：



因为 $|PA|=|AD|=|PD|=4\sqrt{2}$ ， $|PO|=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}$ ，

由 (1) 知 $BD \perp$ 平面 PAD ，根据线面垂直的性质有 $BD \perp PD$ ，

在 $\text{Rt}\triangle PBD$ 中， $S_{\triangle PBD}=\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}=16$ ，而 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2} \times 4 \times 4=8$ ，

$$V_{P-BCD}=\frac{1}{3}|PO| \cdot S_{\triangle BCD}=\frac{1}{3} \times 2\sqrt{6} \times 8=\frac{16\sqrt{6}}{3}.$$

设点 C 到平面 PBD 的距离为 h ，

由 $V_{P-BCD}=V_{C-PBD}$ 得 $\frac{1}{3} \times 16h=\frac{16\sqrt{6}}{3}$ ，解得 $h=\sqrt{6}$ ，

所以点 C 到平面 PBD 的距离为 $\sqrt{6}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。
如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/817011151012010053>