第 3 讲 数列的递推关系（新高考专用）

目录

考情分析：
数列的递推关系是高考重点考查内容，作为两类特殊数列——等差数列、等比数列，可直接根据它们的通项公式求解，但也有一些数列

真题自测

一、单选题

1.（2023·北京·高考真题）已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6(n=1,2,3,\cdots)$，则（　）

A．当$a_1=3$时，$\{a_n\}$为递减数列，且存在常数$M\leqslant 0$，使得$a_n>M$恒成立

B．当$a_1=5$时，$\{a_n\}$为递增数列，且存在常数$M\leq 6$，使得$a_n<M$恒成立

C．当$a_1=7$时，$\{a_n\}$为递减数列，且存在常数$M>6$，使得$a_n>M$恒成立

D．当$a_1=9$时，$\{a_n\}$为递增数列，且存在常数$M>0$，使得$a_n<M$恒成立

2.（2022·浙江·高考真题）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}=a_n-\frac{1}{3}a_n^2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，则（　）

A．$2<100a_{100}<\frac{5}{2}$　B．$\frac{5}{2}<100a_{100}<3$　C．$3<100a_{100}<\frac{7}{2}$　D．$\frac{7}{2}<100a_{100}<4$

3.（2021·浙江·高考真题）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}=\frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$.记数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，则（　）

A．$\frac{3}{2}<S_{100}<3$　B．$3<S_{100}<4$　C．$4<S_{100}<\frac{9}{2}$　D．$\frac{9}{2}<S_{100}<5$

二、填空题

4.（2022·北京·高考真题）已知数列$\{a_n\}$各项均为正数，其前n项和S_n满足$a_n\cdot S_n=9(n=1,2,\cdots)$．给出下列四个结论：

①$\{a_n\}$的第 2 项小于 3；　②$\{a_n\}$为等比数列；

③$\{a_n\}$为递减数列；　④$\{a_n\}$中存在小于$\frac{1}{100}$的项.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题

5.（2022·全国·高考真题）记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和．已知$\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$.

(1)证明：$\{a_n\}$是等差数列；

(2)若a_4,a_7,a_9成等比数列，求S_n的最小值.

6．（2022·全国·高考真题）记S_n为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知$a_1=1,\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$.

参考答案：

题号	1	2	3							
答案	B	B	A							

1．B

【分析】法 1：利用数列归纳法可判断 ACD 正误，利用递推可判断数列的性质，故可判断 B 的正误.

法 2：构造$f(x)=\frac{1}{4}(x-6)^3+6-x$，利用导数求得$f(x)$的正负情况，再利用数学归纳法判断得各选项$a_n$所在区间，从而判断$\{a_n\}$的单调性；对于 A，构造$h(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-47(x\le 3)$，判断得$a_{n+1}<a_n-1$，进而取$m=-[M]+4$推得$a_n>M$不恒成立；对于 B，证明$a_n$所在区间同时证得后续结论；对于 C，记

$m_0=\log_3\left[2\log_{\frac{1}{4}}(M-6)+1\right]$，取$m=[m_0]+1$推得$a_n>M$不恒成立；对于 D，构造

$g(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-49(x\ge 9)$，判断得$a_{n+1}>a_n+1$，进而取$m=[M]+1$推得$a_n<M$不恒成立.

【详解】法 1：因为$a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6$，故$a_{n+1}-6=\frac{1}{4}(a_n-6)^3$，

对于 A ，若$a_1=3$，可用数学归纳法证明：$a_n-6\le -3$即$a_n\le 3$，

证明：当$n=1$时，$a_1-6=-3\le -3$，此时不等关系$a_n\le 3$成立；

设当$n=k$时，$a_k-6\le -3$成立，

则$a_{k+1}-6=\frac{1}{4}(a_k-6)^3\in\left(-54,-\frac{27}{4}\right)$，故$a_{k+1}-6\le -3$成立，

由数学归纳法可得$a_n\le 3$成立.

而$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4}(a_n-6)^3-(a_n-6)=(a_n-6)\left[\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1\right]$，

$\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1\ge\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}>0$，$a_n-6<0$，故$a_{n+1}-a_n<0$，故$a_{n+1}<a_n$，

故$\{a_n\}$为减数列，注意$a_{k+1}-6\le -3<0$

故 $a_{n+1}-6=\frac{1}{4}(a_n-6)^3=(a_n-6)\times\frac{1}{4}(a_n-6)^2\le\frac{9}{4}(a_n-6)$，结合 $a_{n+1}-6<0$，

所以 $6-a_{n+1}\ge\frac{9}{4}(6-a_n)$，故 $6-a_{n+1}\ge3\left(\frac{9}{4}\right)^n$，故 $a_{n+1}\le6-3\left(\frac{9}{4}\right)^n$，

若存在常数 $M\leqslant0$，使得 $a_n>M$ 恒成立，则 $6-3\left(\frac{9}{4}\right)^n>M$，

故 $\frac{6-M}{3}>\left(\frac{9}{4}\right)^n$，故 $n<\log_{\frac{9}{4}}\frac{6-M}{3}$，故 $a_n>M$ 恒成立仅对部分 n 成立，

故 A 不成立.

对于 B，若 $a_1=5$，可用数学归纳法证明：$-1\le a_n-6<0$ 即 $5\le a_n<6$，

证明：当 $n=1$ 时，$-1\le a_1-6=-1\le0$，此时不等关系 $5\le a_n<6$ 成立；

设当 $n=k$ 时，$5\le a_k<6$ 成立，

则 $a_{k+1}-6=\frac{1}{4}(a_k-6)^3\in\left(-\frac{1}{4},0\right)$，故 $-1\le a_{k+1}-6<0$ 成立即

由数学归纳法可得 $5\le a_{k+1}<6$ 成立.

而 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4}(a_n-6)^3-(a_n-6)=(a_n-6)\left[\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1\right]$，

$\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1<0$，$a_n-6<0$，故 $a_{n+1}-a_n>0$，故 $a_{n+1}>a_n$，故 $\{a_n\}$ 为增数列，

若 $M=6$，则 $a_n<6$ 恒成立，故 B 正确.

对于 C，当 $a_1=7$ 时， 可用数学归纳法证明：$0<a_n-6\le1$ 即 $6<a_n\le7$，

证明：当 $n=1$ 时，$0<a_1-6\le1$，此时不等关系成立；

设当 $n=k$ 时，$6<a_k\le7$ 成立，

则 $a_{k+1}-6=\frac{1}{4}(a_k-6)^3\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$，故 $0<a_{k+1}-6\le1$ 成立即 $6<a_{k+1}\le7$

由数学归纳法可得 $6<a_n\le7$ 成立.

而 $a_{n+1}-a_n=(a_n-6)\left[\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1\right]<0$，故 $a_{n+1}<a_n$，故 $\{a_n\}$ 为减数列，

又 $a_{n+1}-6=(a_n-6)\times\frac{1}{4}(a_n-6)^2\le\frac{1}{4}(a_n-6)$，结合 $a_{n+1}-6>0$ 可得：$a_{n+1}-6\le(a_1-6)\left(\frac{1}{4}\right)^n$，所以 $a_{n+1}\le6+\left(\frac{1}{4}\right)^n$，

若 $a_{n+1}\le6+\left(\frac{1}{4}\right)^n$，若存在常数 $M>6$，使得 $a_n>M$ 恒成立，

则 $M-6\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$ 恒成立，故 $n\le\log_{\frac{1}{4}}(M-6)$，$n$ 的个数有限，矛盾，故 C 错误.

对于 D，当 $a_1=9$ 时， 可用数学归纳法证明：$a_n-6\ge3$ 即 $a_n\ge9$，

证明：当 $n=1$ 时，$a_1-6=3\ge3$，此时不等关系成立；

设当 $n=k$ 时，$a_k\ge9$ 成立，

则 $a_{k+1}-6=\frac{1}{4}(a_k-6)^3\ge\frac{27}{4}>3$，故 $a_{k+1}\ge9$ 成立

由数学归纳法可得 $a_n\ge9$ 成立.

而 $a_{n+1}-a_n=(a_n-6)\left[\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1\right]>0$，故 $a_{n+1}>a_n$，故 $\{a_n\}$ 为增数列，

又 $a_{n+1}-6=(a_n-6)\times\frac{1}{4}(a_n-6)^2>\frac{9}{4}(a_n-6)$，结合 $a_n-6>0$ 可得：$a_{n+1}-6>(a_1-6)\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}=3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，所以

$a_{n+1}\ge6+3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，

若存在常数 $M>0$，使得 $a_n<M$ 恒成立，则 $M>6+3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，

故 $M>6+3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，故 $n<\log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{M-6}{3}\right)+1$，这与 n 的个数有限矛盾，故 D 错误.

故选：B.

法 2：因为 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6-a_n=\frac{1}{4}a_n^3-\frac{9}{2}a_n^2+26a_n-48$，

令 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-48$，则 $f'(x)=\frac{3}{4}x^2-9x+26$，

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<6-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $x>6+\frac{2\sqrt{3}}{3}$；

令 $f'(x)<0$，得 $6-\frac{2\sqrt{3}}{3}<x<6+\frac{2\sqrt{3}}{3}$；

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,6-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 和 $\left(6+\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(6-\frac{2\sqrt{3}}{3},6+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递减，

令 $f(x)=0$，则 $\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-48=0$，即 $\frac{1}{4}(x-4)(x-6)(x-8)=0$，解得 $x=4$ 或 $x=6$ 或 $x=8$，

注意到 $4<6-\frac{2\sqrt{3}}{3}<5$，$7<6+\frac{2\sqrt{3}}{3}<8$，

所以结合 $f(x)$ 的单调性可知在 $(-\infty,4)$ 和 $(6,8)$ 上 $f(x)<0$，在 $(4,6)$ 和 $(8,+\infty)$ 上 $f(x)>0$，

对于 A，因为 $a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6$，则 $a_{n+1}-6=\frac{1}{4}(a_n-6)^3$，

当 $n=1$ 时，$a_1=3$，$a_2-6=\frac{1}{4}(a_1-6)^3<-3$，则 $a_2<3$，

假设当 $n=k$ 时，$a_k<3$，

当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}-6=\frac{1}{4}(a_k-6)^3<\frac{1}{4}(3-6)^3<-3$，则 $a_{k+1}<3$，

综上：$a_n\le 3$，即 $a_n\in(-\infty,4)$，

因为在 $(-\infty,4)$ 上 $f(x)<0$，所以 $a_{n+1}<a_n$，则 $\{a_n\}$ 为递减数列，

因为 $a_{n+1}-a_n+1=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6-a_n+1=\frac{1}{4}a_n^3-\frac{9}{2}a_n^2+26a_n-47$，

令 $h(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-47(x\le 3)$，则 $h'(x)=\frac{3}{4}x^2-9x+26$，

因为 $h'(x)$ 开口向上，对称轴为 $x=-\frac{-9}{2\times\frac{3}{4}}=6$，

所以 $h'(x)$ 在 $(-\infty,3]$ 上单调递减，故 $h'(x)\ge h'(3)=\frac{3}{4}\times 3^2-9\times 3+26>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,3]$ 上单调递增，故 $h(x)\le h(3)=\frac{1}{4}\times 3^3-\frac{9}{2}\times 3^2+26\times 3-47<0$，

故 $a_{n+1}-a_n+1<0$，即 $a_{n+1}<a_n-1$，

假设存在常数 $M\leqslant 0$，使得 $a_n>M$ 恒成立，

取 $m_1=-[M]+4$，其中 $M-1<[M]\le M$，且 $[M]\in Z$，

因为 $a_{n+1}<a_n-1$，所以 $a_2<a_1-1,a_3<a_2-1,\ldots,a_{-[M]+4}<a_{-[M]+3}-1$，

上式相加得，$a_{-[M]+4}<a_1-(-[M]+3)\le 3+M-3=M$，

则 $a_{m_1}=a_{[M]+4}<M$，与 $a_n>M$ 恒成立矛盾，故 A 错误；

对于 B，因为 $a_1=5$，

当 $n=1$ 时，$a_1=5<6$，$a_2=\frac{1}{4}(a_1-6)^3+6=\frac{1}{4}\times(5-6)^3+6<6$，

假设当 $n=k$ 时，$a_k<6$，

当 $n=k+1$ 时，因为 $a_k<6$，所以 $a_k-6<0$，则 $(a_k-6)^3<0$，

所以 $a_{k+1}=\frac{1}{4}(a_k-6)^3+6<6$，

又当$n=1$时，$a_2-5=\frac{1}{4}(a_1-6)^3+1=\frac{1}{4}\times(5-6)^3+1>0$，即$a_2>5$，

假设当$n=k$时，$a_k\geq 5$，

当$n=k+1$时，因为$a_k\geq 5$，所以$a_k-6\geq -1$，则$(a_k-6)^3\geq -1$，

所以$a_{k+1}=\frac{1}{4}(a_k-6)^3+6\geq 5$，

综上：$5\leq a_n<6$，

因为在$(4,6)$上$f(x)>0$，所以$a_{n+1}>a_n$，所以$\{a_n\}$为递增数列，

此时，取$M=6$，满足题意，故 B 正确；

对于 C，因为$a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6$，则$a_{n+1}-6=\frac{1}{4}(a_n-6)^3$，

注意到当$a_1=7$时，$a_2=\frac{1}{4}(7-6)^3+6=\frac{1}{4}+6$，$a_3=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+6-6\right)^3+6=\left(\frac{1}{4}\right)^4+6$，

$$a_4=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^4+6-6\right]^3+6=\left(\frac{1}{4}\right)^{13}+6$$

猜想当$n\geq 2$时，$a_k=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^k-1)}+6$，

当$n=2$与$n=3$时，$a_2=\frac{1}{4}+6$与$a_3=\left(\frac{1}{4}\right)^4+6$满足$a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^n-1)}+6$，

假设当$n=k$时，$a_k=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^k-1)}+6$，

当$n=k+1$时，所以$a_{k+1}=\frac{1}{4}(a_k-6)^3+6=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^k-1)}+6-6\right]^3+6=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^{k+1}-1)}+6$，

综上：$a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^n-1)}+6(n\geq 2)$，

易知$3^n-1>0$，则$0<\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^n-1)}<1$，故$a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^n-1)}+6\in(6,7)(n\geq 2)$，

所以$a_n\in(6,7]$，

因为在$(6,8)$上$f(x)<0$，所以$a_{n+1}<a_n$，则$\{a_n\}$为递减数列，

假设存在常数$M>6$，使得$a_n>M$恒成立，

记$m_0=\log_3\left[2\log_{\frac{1}{4}}(M-6)+1\right]$，取$m=[m_0]+1$，其中$m_0-1<[m_0]\le m_0, m_0\in \mathrm{N}^*$，

则$3^m>3^{m_0}=2\log_{\frac{1}{4}}(M-6)+1$，

故$\frac{1}{2}(3^m-1)>\log_{\frac{1}{4}}(M-6)$，所以$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^m-1)}<M-6$，即$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^m-1)}+6<M$，

所以$a_m<M$，故$a_n>M$不恒成立，故 C 错误；

对于 D，因为$a_1=9$，

当$n=1$时，$a_2-6=\frac{1}{4}(a_1-6)^3=\frac{27}{4}>3$，则$a_2>9$，

假设当$n=k$时，$a_k\ge 3$，

当$n=k+1$时，$a_{k+1}-6=\frac{1}{4}(a_k-6)^3\ge\frac{1}{4}(9-6)^3>3$，则$a_{k+1}>9$，

综上：$a_n\ge 9$，

因为在$(8,+\infty)$上$f(x)>0$，所以$a_{n+1}>a_n$，所以$\{a_n\}$为递增数列，

因为$a_{n+1}-a_n-1=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6-a_n-1=\frac{1}{4}a_n^3-\frac{9}{2}a_n^2+26a_n-49$，

令$g(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-49(x\ge 9)$，则$g'(x)=\frac{3}{4}x^2-9x+26$，

因为$g'(x)$开口向上，对称轴为$x=-\frac{-9}{2\times\frac{3}{4}}=6$，

所以$g'(x)$在$[9,+\infty)$上单调递增，故$g'(x)\ge g'(9)=\frac{3}{4}\times 9^2-9\times 9+26>0$，

所以$g(x)\ge g(9)=\frac{1}{4}\times 9^3-\frac{9}{2}\times 9^2+26\times 9-49>0$，

故$a_{n+1}-a_n-1>0$，即$a_{n+1}>a_n+1$，

假设存在常数$M>0$，使得$a_n<M$恒成立，

取$m_2=[M]+1$，其中$M-1<[M]\le M$，且$[M]\in \mathrm{Z}$，

因为$a_{n+1}>a_n+1$，所以$a_2>a_1+1, a_3>a_2+1, \cdots, a_{[M]+1}>a_{[M]}+1$，

上式相加得，$a_{[M]+1}>a_1+[M]>9+M-1>M$，

则$a_{m_2}=a_{[M]+1}>M$，与$a_n<M$恒成立矛盾，故 D 错误.

故选：B.

【点睛】关键点睛：本题解决的关键是根据首项给出与通项性质相关的相应的命题，再根据所得命题结合放缩法得到通项所满足的不等式关系，从而可判断数列的上界或下界是否成立.

2．B

【分析】先通过递推关系式确定$\{a_n\}$除去a_1，其他项都在$(0,1)$范围内，再利用递推公式变形得到$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3-a_n}>\frac{1}{3}$，累加可求出$\frac{1}{a_n}>\frac{1}{3}(n+2)$，得出$100a_{100}<3$，再利用$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3-a_n}<\frac{1}{3-\frac{3}{n+2}}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$，累加可求出$\frac{1}{a_n}-1<\frac{1}{3}(n-1)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$，再次放缩可得出$100a_{100}>\frac{5}{2}$.

【详解】$\because a_1=1$，易得$a_2=\frac{2}{3}\in(0,1)$，依次类推可得$a_n\in(0,1)$

由题意，$a_{n+1}=a_n\left(1-\frac{1}{3}a_n\right)$，即$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n(3-a_n)}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{3-a_n}$，

$\therefore\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3-a_n}>\frac{1}{3}$，

即$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}>\frac{1}{3}$，$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}>\frac{1}{3}$，$\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_3}>\frac{1}{3}$，…，$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}>\frac{1}{3},(n\geq2)$，

累加可得$\frac{1}{a_n}-1>\frac{1}{3}(n-1)$，即$\frac{1}{a_n}>\frac{1}{3}(n+2),(n\geq2)$，

$\therefore a_n<\frac{3}{n+2},(n\geq2)$，即$a_{100}<\frac{1}{34}$，$100a_{100}<\frac{100}{34}<3$，

又$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3-a_n}<\frac{1}{3-\frac{3}{n+2}}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n+1}\right),(n\geq2)$，

$\therefore\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)$，$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}<\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)$，$\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_3}<\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{4}\right)$，…，$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}<\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right),(n\geq3)$，

累加可得$\frac{1}{a_n}-1<\frac{1}{3}(n-1)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right),(n\geq3)$，

$\therefore\frac{1}{a_{100}}-1<33+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}\right)<33+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\times4+\frac{1}{6}\times96\right)<39$，

即$\frac{1}{a_{100}}<40$，$\therefore a_{100}>\frac{1}{40}$，即$100a_{100}>\frac{5}{2}$；

综上：$\frac{5}{2}<100a_{100}<3$.

故选：B.

【点睛】关键点点睛：解决本题的关键是利用递推关系进行合理变形放缩.

3．A

【分析】显然可知，$S_{100}>\frac{3}{2}$，利用倒数法得到$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{\sqrt{a_n}}=\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，再放缩可得$\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}<\frac{1}{\sqrt{a_n}}+\frac{1}{2}$，由累加法可得$a_n\geq\frac{4}{(n+1)^2}$，进而由$a_{n+1}=\frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}$局部放缩可得$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{n+1}{n+3}$，然后利用累乘法求得$a_n\leq\frac{6}{(n+1)(n+2)}$，最后根据裂项相消法即可得到$S_{100}<3$，从而得解.

【详解】因为$a_1=1, a_{n+1}=\frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，所以$a_n>0$，$S_{100}>\frac{3}{2}$.

由$a_{n+1}=\frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{\sqrt{a_n}}=\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$\therefore\frac{1}{a_{n+1}}<\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}+\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}<\frac{1}{\sqrt{a_n}}+\frac{1}{2}$，即$\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_n}}<\frac{1}{2}$

根据累加法可得，$\frac{1}{\sqrt{a_n}}<1+\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2},(n\geq 2)$，当$n=1$时$\frac{1}{\sqrt{a_1}}=\frac{1+1}{2}$，

则$\frac{1}{\sqrt{a_n}}\leq\frac{n+1}{2}$，当且仅当$n=1$时等号成立，

$\therefore a_n\geq\frac{4}{(n+1)^2}$　$\therefore a_{n+1}=\frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\leq\frac{a_n}{1+\frac{2}{n+1}}=\frac{n+1}{n+3}a_n$

$\therefore\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{n+1}{n+3}$，

由累乘法可得$a_n\leq\frac{6}{(n+1)(n+2)},(n\geq 2)$，且$a_1=\frac{6}{(1+1)(1+2)}$，

则$a_n\leq\frac{6}{(n+1)(n+2)}$，当且仅当$n=1$时取等号，

由裂项求和法得：

所以$S_{100}\leq 6\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{101}-\frac{1}{102}\right)=6\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{102}\right)<3$，即$\frac{3}{2}<S_{100}<3$.

故选：A.

【点睛】本题解题关键是通过倒数法先找到$\sqrt{a_n},\sqrt{a_{n+1}}$的不等关系，再由累加法可求得$a_n\geq\frac{4}{(n+1)^2}$，由题目条件可知要证$S_{100}$小于某数，从而通过局部放缩得到$a_n,a_{n+1}$的不等关系，改变不等式的方向得到

$a_n \le \frac{6}{(n+1)(n+2)}$，最后由裂项相消法求得 $S_{100} < 3$.

4．①③④

【分析】推导出 $a_n = \frac{9}{a_n} - \frac{9}{a_{n-1}}$，求出 a_1、a_2 的值，可判断①；利用反证法可判断②④；利用数列单调性的定义可判断③.

【详解】由题意可知，$\forall n \in N^*$，$a_n > 0$，

当 $n=1$ 时，$a_1^2 = 9$，可得 $a_1 = 3$；

当 $n \ge 2$ 时，由 $S_n = \frac{9}{a_n}$ 可得 $S_{n-1} = \frac{9}{a_{n-1}}$，两式作差可得 $a_n = \frac{9}{a_n} - \frac{9}{a_{n-1}}$，

所以，$\frac{9}{a_{n-1}} = \frac{9}{a_n} - a_n$，则 $\frac{9}{a_2} - a_2 = 3$，整理可得 $a_2^2 + 3a_2 - 9 = 0$，

因为 $a_2 > 0$，解得 $a_2 = \frac{3\sqrt{5}-3}{2} < 3$，①对；

假设数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，设其公比为 q，则 $a_2^2 = a_1 a_3$，即 $\left(\frac{9}{S_2}\right)^2 = \frac{81}{S_1 S_3}$，

所以，$S_2^2 = S_1 S_3$，可得 $a_1^2(1+q)^2 = a_1^2(1+q+q^2)$，解得 $q=0$，不合乎题意，

故数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列，②错；

当 $n \ge 2$ 时，$a_n = \frac{9}{a_n} - \frac{9}{a_{n-1}} = \frac{9(a_{n-1} - a_n)}{a_n a_{n-1}} > 0$，可得 $a_n < a_{n-1}$，所以，数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，③对；

假设对任意的 $n \in N^*$，$a_n \ge \frac{1}{100}$，则 $S_{100000} \ge 100000 \times \frac{1}{100} = 1000$，

所以，$a_{100000} = \frac{9}{S_{100000}} \le \frac{9}{1000} < \frac{1}{100}$，与假设矛盾，假设不成立，④对.

故答案为：①③④.

【点睛】关键点点睛：本题在推断②④的正误时，利用正面推理较为复杂时，可采用反证法来进行推导.

5．(1)证明见解析；

(2) -78.

【分析】（1）依题意可得 $2S_n + n^2 = 2na_n + n$，根据 $a_n = \begin{cases} S_1, n=1 \\ S_n - S_{n-1}, n \ge 2 \end{cases}$，作差即可得到 $a_n - a_{n-1} = 1$，从而得证；

（2）法一：由（1）及等比中项的性质求出 a_1，即可得到 $\{a_n\}$ 的通项公式与前 n 项和，再根据二次函数的性质计算可得.

【详解】（1）因为 $\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$，即 $2S_n+n^2=2na_n+n$ ①，

当 $n\geq 2$ 时，$2S_{n-1}+(n-1)^2=2(n-1)a_{n-1}+(n-1)$ ②，

① − ②得，$2S_n+n^2-2S_{n-1}-(n-1)^2=2na_n+n-2(n-1)a_{n-1}-(n-1)$，

即 $2a_n+2n-1=2na_n-2(n-1)a_{n-1}+1$，

即 $2(n-1)a_n-2(n-1)a_{n-1}=2(n-1)$，所以 $a_n-a_{n-1}=1$，$n\geq 2$ 且 $n\in N^*$，

所以 $\{a_n\}$ 是以1为公差的等差数列.

（2）[方法一]：二次函数的性质

由（1）可得 $a_4=a_1+3$，$a_7=a_1+6$，$a_9=a_1+8$，

又 a_4，a_7，a_9 成等比数列，所以 $a_7^{\ 2}=a_4\cdot a_9$，

即 $(a_1+6)^2=(a_1+3)\cdot(a_1+8)$，解得 $a_1=-12$，

所以 $a_n=n-13$，所以 $S_n=-12n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}n^2-\frac{25}{2}n=\frac{1}{2}\left(n-\frac{25}{2}\right)^2-\frac{625}{8}$，

所以，当 $n=12$ 或 $n=13$ 时，$(S_n)_{\min}=-78$.

[方法二]：【最优解】邻项变号法

由（1）可得 $a_4=a_1+3$，$a_7=a_1+6$，$a_9=a_1+8$，

又 a_4，a_7，a_9 成等比数列，所以 $a_7^{\ 2}=a_4\cdot a_9$，

即 $(a_1+6)^2=(a_1+3)\cdot(a_1+8)$，解得 $a_1=-12$，

所以 $a_n=n-13$，即有 $a_1<a_2<\cdots<a_{12}<0,a_{13}=0$.

则当 $n=12$ 或 $n=13$ 时，$(S_n)_{\min}=-78$.

【整体点评】（2）法一：根据二次函数的性质求出 S_n 的最小值，适用于可以求出 S_n 的表达式；

法二：根据邻项变号法求最值，计算量小，是该题的最优解.

6．(1) $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

(2)见解析

【分析】（1）利用等差数列的通项公式求得$\dfrac{S_n}{a_n}=1+\dfrac{1}{3}(n-1)=\dfrac{n+2}{3}$，得到$S_n=\dfrac{(n+2)a_n}{3}$，利用和与项的关系得到当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{(n+2)a_n}{3}-\dfrac{(n+1)a_{n-1}}{3}$,进而得：$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n+1}{n-1}$，利用累乘法求得$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，检验对于$n=1$也成立，得到$\{a_n\}$的通项公式$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$；

（2）由（1）的结论，利用裂项求和法得到$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=2\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$，进而证得.

【详解】（1）$\because a_1=1$，$\therefore S_1=a_1=1$,$\therefore\dfrac{S_1}{a_1}=1$,

又$\because\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\dfrac{1}{3}$的等差数列,

$\therefore\dfrac{S_n}{a_n}=1+\dfrac{1}{3}(n-1)=\dfrac{n+2}{3}$,$\therefore S_n=\dfrac{(n+2)a_n}{3}$,

$\therefore$当$n\geq 2$时，$S_{n-1}=\dfrac{(n+1)a_{n-1}}{3}$,

$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{(n+2)a_n}{3}-\dfrac{(n+1)a_{n-1}}{3}$,

整理得：$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$,

即$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n+1}{n-1}$,

$\therefore a_n=a_1\times\dfrac{a_2}{a_1}\times\dfrac{a_3}{a_2}\times\ldots\times\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

$=1\times\dfrac{3}{1}\times\dfrac{4}{2}\times\ldots\times\dfrac{n}{n-2}\times\dfrac{n+1}{n-1}=\dfrac{n(n+1)}{2}$,

显然对于$n=1$也成立,

$\therefore\{a_n\}$的通项公式$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$；

（2）$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$,

$\therefore\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=2\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)<2$

考点突破

【考点一】构造辅助数列

一、单选题

1.（2024·山东潍坊·一模）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$，$a_2=1$．若数列$\{a_n+a_{n+1}\}$是公比为 2 的等比数列，则

$a_{2024}=$（　）

A．$\dfrac{2^{2023}+1}{3}$　　B．$\dfrac{2^{2024}+1}{3}$　　C．$2^{1012}-1$　　D．$2^{1011}-1$

2.（23-24 高二上·山东青岛·阶段练习）若数列$\{a_n\}$满足$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}(n\geq 2)$，$a_1=2$，则满足不等式

$a_n<930$的最大正整数n为（　）

A．28　　B．29　　C．30　　D．31

二、多选题

3.（2024·湖南长沙·一模）小郡玩一种跳棋游戏，一个箱子中装有大小质地均相同的且标有$1:10$的 10 个小球，每次随机抽取一个小球并放回，规定：若每次抽取号码小于或等于 5 的小球，则前进 1 步，若每次抽取号码大于 5 的小球，则前进 2 步.每次抽取小球互不影响，记小郡一共前进n步的概率为p_n，则下列说法正确的是（　）

A．$\mathrm{p}_2=\dfrac{1}{4}$

B．$p_n=\dfrac{1}{2}p_{n-1}+\dfrac{1}{2}p_{n-2}(n\geq 3)$

C．$p_n=1-\dfrac{1}{2}p_{n-1}(n\geq 2)$

D．小华一共前进 3 步的概率最大

4.（2023·辽宁朝阳·一模）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n^2+1},n\in\mathrm{N}^*$，则下列说法正确的是（　）

A．数列$\{a_n\}$为递减数列　　B．$0<a_n\leq 1$

C．$a_{10}\in\left(\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{7}\right)$　　D．$\dfrac{1}{11}<a_{50}<\dfrac{1}{10}$

三、填空题

5.（23-24 高二上·广东河源·期末）已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\dfrac{2n}{n+1}a_n$，则$\dfrac{a_{10}}{a_6}=$______.

6.（2024·湖南衡阳·模拟预测）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=2,S_n=a_{n+1}-2^{n+1}$.若$S_n>n^2+61n$，则$n$的最小值为________.

参考答案：

题号	1	2	3	4						
答案	A	B	BC	ABD						

1．A

【分析】利用等比数列求出 $a_n+a_{n+1}=2^{n-1}$，进而求得 $a_{n+1}-a_{n-1}=2^{n-2}(n\geq 2)$，再利用累加法求通项得解.

【详解】依题意，$a_1+a_2=1$，$a_n+a_{n+1}=2^{n-1}$，当 $n\geq 2$ 时，$a_{n-1}+a_n=2^{n-2}$，则 $a_{n+1}-a_{n-1}=2^{n-2}$，

所以 $a_{2024}=a_2+(a_4-a_2)+(a_6-a_4)+\cdots+(a_{2024}-a_{2022})=1+2+2^3+2^5+\cdots+2^{2021}$

$=1+\dfrac{2(1-4^{1011})}{1-4}=\dfrac{2^{2023}+1}{3}$.

故选：A

2．B

【分析】利用累乘法求得 a_n，由此解不等式 $a_n<930$,求得正确答案.

【详解】依题意，数列 $\{a_n\}$ 满足 $(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}(n\geq 2)$，$a_1=2$，

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n+1}{n-1}(n\geq 2)$，所以 $a_n=a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2\times\dfrac{3}{1}\times\dfrac{4}{2}\times\dfrac{5}{3}\times\cdots\times\dfrac{n}{n-2}\times\dfrac{n+1}{n-1}$

$=n(n+1)$，a_1 也符合，所以 $a_n=n(n+1)$，$\{a_n\}$ 是单调递增数列，

由 $a_n=n(n+1)<930,(n+31)(n-30)<0$，解得 $-31<n<30$，

所以 n 的最大值为 29.

故选：B

3．BC

【分析】根据题意直接求概率判断选项 A，然后根据题意求出递推公式即可判断选项 B，根据递推公式判断数列 $\left\{p_n-\dfrac{2}{3}\right\}$ 是首项为 $-\dfrac{1}{6}$，公比为 $-\dfrac{1}{2}$ 的等比数列，求通项公式判断选项 C，分类讨论求解概率通项的最大值判断 D.

【详解】根据题意，小郡前进 1 步的概率和前进 2 步的概率都是 $\dfrac{1}{2}$，所以 $P_1=\dfrac{1}{2}$，$P_2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$，

故选项 A 错误；

当 $n\geq 3$ 时，其前进几步是由两部分组成：先前进 $n-1$ 步，再前进 1 步，其概率为 $\dfrac{1}{2}p_{n-1}$，

或者先前进 $n-2$ 步，再前进 2 步，其概率为 $\dfrac{1}{2}p_{n-2}$，所以 $p_n=\dfrac{1}{2}p_{n-1}+\dfrac{1}{2}p_{n-2}(n\geq 3)$，

故选项 B 正确；

因为 $p_n=\dfrac{1}{2}p_{n-1}+\dfrac{1}{2}p_{n-2}(n\geq 3)$，所以 $2p_n+p_{n-1}=2p_{n-1}+p_{n-2}(n\geq 3)$，

而 $2p_2+p_1=2\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=2$，所以 $2p_n+p_{n-1}=2\left(n\geq 2\right)$，即 $p_n=1-\frac{1}{2}p_{n-1}\left(n\geq 2\right)$，

故选项 C 正确；

因为当 $n\geq 2$ 时，$p_n=1-\frac{1}{2}p_{n-1}$，所以 $p_n-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_{n-1}-\frac{2}{3}\right)$，

又 $p_1-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$，所以数列 $\left\{p_n-\frac{2}{3}\right\}$ 是首项为 $-\frac{1}{6}$，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列.

所以 $P_n-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，所以 $P_n=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

当 n 为奇数时，$n-1$ 为偶数，则 $P_n=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，此时数列 $\{p_n\}$ 单调递增，所以 $P_n<\frac{2}{3}$；

当 n 为偶数时，$n-1$ 为奇数，则 $P_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，此时数列 $\{p_n\}$ 单调递减，

所以 $P_n\leq P_2=\frac{3}{4}$；

综上，当 $n=2$ 时，概率最大，即小华一共前进 2 步的概率最大，故选项 D 错误.

故选：BC

4．ABD

【分析】根据数列的递推公式和首项即可判断选项 A 和 B；利用数列的单调性和累加法求出 $2n+2<(\frac{1}{a_{n+1}})^2<\frac{9n+7}{4}$，进而判断选项 C 和 D.

【详解】因为 $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n^2+1},n\in\mathrm{N}^*$ 和 $a_1=1$ 可知，数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正值，

由 $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n^2+1},n\in\mathrm{N}^*$ 可得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{a_n^2+1}<\frac{1}{a_1^2}=1$，所以 $a_{n+1}<a_n$，则数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，故选项 A 正确；

由选项 A 的分析可知：数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，又因为 $a_1=1$，所以 $0<a_n\leq 1$，故选项 B 正确；

由 $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n^2+1},n\in\mathrm{N}^*$ 两边同时取倒数可得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+a_n$，

则 $(\frac{1}{a_{n+1}})^2=(\frac{1}{a_n}+a_n)^2=(\frac{1}{a_n})^2+2+a_n^2$，所以 $(\frac{1}{a_{n+1}})^2-(\frac{1}{a_n})^2=2+a_n^2$，

因为数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，

由 $a_1=1$ 可得 $a_2=\frac{a_1}{a_1^2+1}=\frac{1}{2}$，

当 $n=2$ 时，$2<2+a_2^2=2+\frac{1}{4}$，即 $2<(\frac{1}{a_3})^2-(\frac{1}{a_2})^2=2+\frac{1}{4}$，

当 $n\geq 3$ 时，$2<2+a_3^2<2+\frac{1}{4}$，即 $2<(\frac{1}{a_4})^2-(\frac{1}{a_3})^2<2+\frac{1}{4}$，$\cdots$，

$2<(\frac{1}{a_{n+1}})^2-(\frac{1}{a_n})^2<2+\frac{1}{4}$，

不等式累加可得：$2\times(n-1)<(\frac{1}{a_{n+1}})^2-(\frac{1}{a_2})^2<(2+\frac{1}{4})(n-1)$，

所以 $2n+2<(\frac{1}{a_{n+1}})^2<\frac{9n+7}{4}$，则 $20<\left(\frac{1}{a_{10}}\right)^2<22$，

所以 $\frac{1}{\sqrt{22}}<a_{10}<\frac{1}{2\sqrt{5}}$，故选项 C 错误；

由 $2n+2<(\frac{1}{a_{n+1}})^2<\frac{9n+7}{4}$ 可得 $100<(\frac{1}{a_{50}})^2<112<121$，

所以 $\frac{1}{11}<a_{50}<\frac{1}{10}$，故选项 D 正确；

故选：ABD.

5．$\frac{48}{5}$

【分析】由递推公式可得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n}{n+1}$，再由累乘法即可求得结果.

【详解】由 $a_{n+1}=\frac{2n}{n+1}a_n$ 可得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n}{n+1}$，

由累乘可得 $\frac{a_{10}}{a_6}=\frac{a_{10}}{a_9}\cdot\frac{a_9}{a_8}\cdot\frac{a_8}{a_7}\cdot\frac{a_7}{a_6}=\frac{2\times 9}{9+1}\times\frac{2\times 8}{8+1}\times\frac{2\times 7}{7+1}\times\frac{2\times 6}{6+1}=\frac{48}{5}$.

故答案为：$\frac{48}{5}$

6．7

【分析】降次作差得 $a_{n+1}=2a_n+2^n$，构造数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$，求出 $a_n=(n+1)2^{n-1}$，则得到 S_n，作差构造新数列，再证明其单调性即可得到答案.

【详解】因为 $S_n=a_{n+1}-2^{n+1}, S_{n-1}=a_n-2^n\ (n\geq 2)$，

两式相减得：$S_n-S_{n-1}=\left(a_{n+1}-2^{n+1}\right)-\left(a_n-2^n\right)$，即 $a_{n+1}=2a_n+2^n$.

两边同除以 2^{n+1} 可得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}(n\geq 2)$，

又 $S_1=a_2-2^2=2$，得 $a_2=6$，满足 $\frac{a_2}{2^2}-\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$，

所以数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是首项为 $\frac{a_1}{2}=1$，公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列，故 $\frac{a_n}{2^n}=1+\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}$，

即 $a_n=(n+1)2^{n-1}$，所以 $S_n=a_{n+1}-2^{n+1}=(n+2)2^n-2^{n+1}=n\cdot 2^n$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/817045051051010011