专题 03 高二上期末真题精选

（人教 A 版（2019）选择性必修第二册 数列常考 63 题 压轴 15 题）

题型清单

- 【题型 1】等差数列通项的基本量计算
- 【题型 2】等差数列角标和性质
- 【题型 3】等差数列前 n 项和基本量计算
- 【题型 4】等差数列前 n 项和性质
- 【题型 5】等比数列通项的基本量计算
- 【题型 6】等比数列角标和性质
- 【题型 7】等比数列前 n 项和基本量计算
- 【题型 8】等比数列前 n 项和性质
- 【题型 9】数列求通项
- 【题型 10】数列求和之倒序相加法
- 【题型 11】数列求和之分组求和法
- 【题型 12】数列求和之裂项相消法
- 【题型 13】数列求和之错位相减法

题型清单

- 【题型 1】数列求和之分组求和（分类讨论）（1 类考点）
- 【题型 2】数列求和之裂项相加法（1 类考点）
- 【题型 3】数列求和之插入型数列求和（1 类考点）
- 【题型 4】数列不等式中的恒（能）成立问题（1 类考点）

考题猜想

题型 01 等差数列通项的基本量计算

1．（2023 上·云南昆明·高二校考期末）《周碑算经》记载：一年有二十四个节气，每个节气晷（guǐ）长损益相同，夏至、小暑、大暑、立秋、处暑、白露、秋分、寒露、霜降、立冬、小雪、大雪是连续十二个节气，其日影子长依次成等差数列．经记录测算，夏至、处暑、霜降三个节气日影子长之和为 16.5 尺，这十二节气的所有日影子长之和为 84 尺，则夏至的日影子长为（　）尺

A．1　　B．1.25　　C．1.5　　D．2

【答案】C

【详解】由题意可知：十二个节气的日影子长为等差数列，

设为 $a_1,a_2,\cdots,a_{12}$，公差为 d，其前 n 项和为 S_n，

则 $\begin{cases}a_1+a_5+a_9=16.5\\S_{12}=84\end{cases}$，代入得：$\begin{cases}a_1+\left(a_1+4d\right)+\left(a_1+8d\right)=16.5\\12a_1+\dfrac{12\times11d}{2}=84\end{cases}$，解得：$a_1=1.5$．

故选：C.

2．（2023 下·上海·高二期末）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=3n$，则其公差是 ____.

【答案】3

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

则 $d=a_n-a_{n-1}=3n-3(n-1)=3$

故答案为：3．

3．（2023 下·海南省直辖县级单位·高二嘉积中学校考期末）已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_m+a_n=2a_4$（其中 $m,n\in\mathrm{N}^*$），则 $\dfrac{9}{m}+\dfrac{1}{n}$ 的最小值为（　）．

A．6　　B．16　　C．$\dfrac{3}{2}$　　D．2

【答案】D

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则由 $a_m+a_n=2a_4$，得

$a_1+(m-1)d+a_1+(n-1)d=2(a_1+3d)$，

则 $(m+n-2)d=6d$，

因为 $d\neq0$，所以 $m+n=8$（$m,n\in\mathrm{N}^*$），

所以 $\dfrac{9}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{8}(m+n)\left(\dfrac{9}{m}+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{8}\left(10+\dfrac{9n}{m}+\dfrac{m}{n}\right)\geq\dfrac{1}{8}\left(10+2\sqrt{\dfrac{9n}{m}\cdot\dfrac{m}{n}}\right)=2$，

当且仅当$\frac{9n}{m}=\frac{m}{n}$，即$m=6,n=2$时取等号，

所以$\frac{9}{m}+\frac{1}{n}$的最小值为2，

故选：D

题型02 等差数列角标和性质

1．（2023上·吉林长春·高二校考期末）等差数列$\{a_n\}$前n项和为S_n，$a_2+a_8+a_{11}=3$，则$S_{13}=$______.

【答案】13

【详解】等差数列$\{a_n\}$，由$a_2+a_8+a_{11}=a_6+a_7+a_8=3a_7=3$，

解得$a_7=1$，

则$S_{13}=\frac{13(a_1+a_{13})}{2}=\frac{13\times 2a_7}{2}=13a_7=13$，

故答案为：13.

2．（2023上·重庆·高二统考期末）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_8>0$，$a_6+a_{11}<0$，则S_n取得最大值时n的值为_____.

【答案】8

【详解】由已知数列$\{a_n\}$为等差数列，

则$a_6+a_{11}=a_8+a_9<0$，

又$a_8>0$，

所以$a_9<0$，

则$d=a_9-a_8<0$，

所以数列$\{a_n\}$为递减数列，

则当$n\le 8$时，$a_n>0$，当$n\ge 9$时，$a_n<0$，

所以当$n=8$时，S_n取得最大值，

故答案为：8.

3．（2023下·山东东营·高二统考期末）等差数列$\{a_n\}$中，$a_7-a_5+8=a_9$，则数列$\{a_n\}$的前13项的和为____________.

【答案】104

【详解】在等差数列$\{a_n\}$中，满足$a_7-a_5+8=a_9$，即$a_9+a_5=a_7+8$，

由等差数列的性质，可得$a_9+a_5=2a_7$，所以$2a_7=a_7+8$，可得$a_7=8$，

又由$S_{13}=\frac{13(a_1+a_{13})}{2}=\frac{13\times 2a_7}{2}=104$.

故答案为：104.

4．（2023下·云南曲靖·高一曲靖一中校考期末）已知S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_7=168$，则$2a_6-a_8=$__________.

【答案】24

【详解】因为S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，$S_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=7a_4=168$，解得$a_4=24$，

由等差数列的基本性质可得$2a_6-a_8=a_4+a_8-a_8=a_4=24$.

故答案为：24.

题型03 等差数列前n项和基本量计算

1．（2023上·广东河源·高三校联考开学考试）已知公差不为零的等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_6=2a_3$，则$\frac{S_{17}}{a_3}=$（　）

A．17　　B．34　　C．48　　D．51

【答案】D

【详解】设公差为d，则$a_6=a_3+(6-3)d=a_3+3d=2a_3$，$a_3=3d$，

$S_{17}=\frac{(a_1+a_{17})\times 17}{2}=\frac{2a_9\times 17}{2}=17a_9$，$a_9=a_6+3d=3a_3$，

则$\frac{S_{17}}{a_3}=\frac{17\times 3a_3}{a_3}=51$.

故选：D.

2．（多选）（2023上·广西贵港·高二统考期末）我国古代数学著作《算法统宗》中有如下问题："今有善走者，日增等里，首日行走一百里，九日共行一千二百六十里，问日增几何?"其意思是：今有一位善于步行的人，第一天行走了一百里，以后每天比前一天多走d里，九天他共步行了一千二百六十里，求d的值.关于该问题，下列结论正确的是（　）

A．$d=15$　　B．此人第三天行走了一百二十里

C．此人前七天共行走了九百一十里　　D．此人前八天共行走了一千零八十里

【答案】BCD

【详解】由题意,设此人第一天走a_1里，第n天走a_n里，则$\{a_n\}$是等差数列，$a_1=100$，

由$S_9=900+36d=1260$，可得$d=10$，故选项A错误；

所以$a_3=100+20=120$，故选项B正确；

所以$S_n=100n+\frac{n(n-1)}{2}\times 10=5n^2+95n$，所以$S_7=910$，$S_8=1080$，故选项C、D正确.

故选：BCD.

3．（2023 下·吉林·高二校联考期末）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_3+a_7=14$， $S_5=15$，则$a_4=$_____.

【答案】5

【详解】因为$a_3+a_7=2a_5=14$， 则$a_5=7$， 又$S_5=15=\frac{5\left(a_1+a_5\right)}{2}$， 所以$a_1=-1$，

则$d=\frac{a_5-a_1}{5-1}=\frac{7-(-1)}{4}=2$， 所以$a_4=a_1+3d=-1+3\times2=5$.

故答案为： 5

4． （2023 下·安徽亳州·高二涡阳县第二中学校联考期末）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为

$S_n, S_5+2a_{17}=42, a_6=4$， 则$\{a_n\}$的公差等于________.

【答案】 2

【详解】设$\{a_n\}$的首项为a_1， 公差为d， 因为$S_5+2a_{17}=42$， $a_6=4$，

所以$\begin{cases}a_1+5d=4\\7a_1+42d=42\end{cases}$， 所以$\begin{cases}d=2\\a_1=-6\end{cases}$.

故答案为： 2.

5． （2023 下·甘肃兰州·高一兰州一中校考期末）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n， $a_4-a_1=6$，

$S_4=-20$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求S_n的最小值.

【答案】(1)$a_n=2n-10$

(2)-20

【详解】（1）解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

因为$a_4-a_1=6$， 可得$d=\frac{a_4-a_1}{4-1}=\frac{6}{3}=2$，

又因为$S_4=-20$， 可得$4a_1+\frac{4\times3}{2}\times2=-20$， 解得$a_1=-8$，

所以$a_n=a_1+(n-1)d=-8+(n-1)\times2=2n-10$，

即数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-10$.

（2）解：由（1）知$a_1=-8$， $d=2$， $S_n=-8n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n^2-9n=\left(n-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{81}{4}$，

则当$n=4$或$n=5$时S_n最小， S_n的最小值为$S_4=S_5=-20$.

6． （2023 下·云南楚雄·高二统考期末）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n， 且$a_5=-11, S_3=S_{17}$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)试求出所有的正整数m，使得对任意正整数n，均有$S_m \le S_n + 1$．

【答案】(1) $a_n = 2n-21$

(2) $m=9$或10或11．

【详解】（1）设$\{a_n\}$的公差为d，则$\begin{cases} a_1+4d=-11 \\ 3a_1+3d=17a_1+136d \end{cases}$，解得$\begin{cases} a_1=-19 \\ d=2 \end{cases}$，

故$a_n = a_1 + (n-1)d = 2n-21$．

（2）由（1）可知，$S_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2} = n^2-20n = (n-10)^2-100$．

当$n=10$时，S_n取得最小值-100．

由$S_m \le S_n + 1$恒成立，得$m^2-20m+99 \le 0$，解得$9 \le m \le 11$．

因为$m \in \mathbf{N}^*$，所以$m=9$或10或11．

题型04 等差数列前n项和性质

1．（2023上·黑龙江牡丹江·高二牡丹江市第二高级中学校考期末）在等差数列$\{a_n\}$中，已知$S_6=10$，$S_{12}=30$，则$S_{18}=$（　）

A．90　　B．40　　C．50　　D．60

【答案】D

【详解】因为$\{a_n\}$为等差数列，所以$S_6, S_{12}-S_6, S_{18}-S_{12}$成等差数列，

$\because S_6=10$，$S_{12}-S_6=20$，故$S_{18}-S_{12}=2(S_{12}-S_6)-S_6=30$，

$\therefore S_{18}=30+30=60$．

故选：D

2．（2023下·江西吉安·高二统考期末）记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，$S_2=4$，$S_6=18$，则$S_4=$（　）

A．8　　B．9　　C．10　　D．11

【答案】C

【详解】（法一）$\because$数列$\{a_n\}$为等差数列，

$\therefore$有S_2，S_4-S_2，S_6-S_4成等差数列，

$\therefore 2(S_4-S_2)=S_2+(S_6-S_4)$，

解得$S_4=10$，

故选：C.

（法二）由题意知，$S_2=2a_1+\dfrac{2\times1}{2}d=4$，$S_6=6a_1+\dfrac{6\times5}{2}d=18$，

解得$a_1=\dfrac{7}{4}$，$d=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore S_4 = 4a_1 + \frac{4\times 3}{2}d = 10$，

故选：C.

3．（2023 上·浙江嘉兴·高二统考期末）已知等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n、T_n，若$\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n+4}{n+2}$，则$\frac{a_3+a_7+a_8}{b_2+b_{10}} =$（　）

A．$\frac{111}{13}$　　B．$\frac{37}{13}$　　C．$\frac{111}{26}$　　D．$\frac{37}{26}$

【答案】C

【详解】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$a_3+a_7+a_8 = a_1+2d+a_1+6d+a_1+7d = 3a_1+15d = 3a_6$，

因为$b_2+b_{10} = 2b_6$，

所以$\frac{a_3+a_7+a_8}{b_2+b_{10}} = \frac{3a_6}{2b_6} = \frac{3}{2}\cdot\frac{a_6}{b_6}$，

因为等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n、T_n，满足$\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n+4}{n+2}$，

所以$\frac{S_{11}}{T_{11}} = \frac{\frac{11(a_1+a_{11})}{2}}{\frac{11(b_1+b_{11})}{2}} = \frac{a_6}{b_6} = \frac{3\times 11+4}{11+2} = \frac{37}{13}$，

所以$\frac{a_3+a_7+a_8}{b_2+b_{10}} = \frac{3a_6}{2b_6} = \frac{3}{2}\cdot\frac{a_6}{b_6} = \frac{3}{2}\times\frac{37}{13} = \frac{111}{26}$，

故选：C

4．（2023 上·贵州贵阳·高二统考期末）等差数列$\{a_n\}$的前n项和记为S_n，且$S_5 = 10$，$S_{10} = 50$，则$S_{15} =$（　）

A．70　　B．90　　C．100　　D．120

【答案】D

【详解】在等差数列$\{a_n\}$中，$S_5, S_{10}-S_5, S_{15}-S_{10}$成等差数列，

所以$2(S_{10}-S_5) = S_5 + S_{15} - S_{10}$，则$2\times(50-10) = 10 + S_{15} - 50$，即$S_{15} = 120$.

故选：D.

5．（2023 上·新疆·高二校联考期末）已知等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，前n项和为S_n，若$\frac{S_{2023}}{2023} - \frac{S_{2022}}{2022} = 1$，且$S_n \ge S_5$，则$a_1$的取值范围为________.

【答案】$[-10,-8]$

【详解】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

$\because S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$， $\therefore \frac{S_n}{n} = a_1 + (n-1)\cdot\frac{d}{2} = \frac{d}{2}n + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)$，

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是以 $\frac{S_1}{1} = a_1$ 为首项，$\frac{d}{2}$ 为公差的等差数列，

$\therefore \frac{S_{2023}}{2023} - \frac{S_{2022}}{2022} = \frac{d}{2} = 1$，解得：$d = 2$；

$\because S_n \geq S_5$， $\therefore \begin{cases} a_5 = a_1 + 4d = a_1 + 8 \leq 0 \\ a_6 = a_1 + 5d = a_1 + 10 \geq 0 \end{cases}$，解得：$-10 \leq a_1 \leq -8$，

即 a_1 的取值范围为 $[-10,-8]$.

故答案为：$[-10,-8]$.

6．（2022 上·江苏镇江·高二扬中市第二高级中学校考期末）已知等差数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n，若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{7n+45}{n+3}$，且 $\frac{a_n}{b_{2n}}$ 是整数，则 n 的值为_____.

【答案】15

【详解】由题意得 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{S_1}{T_1} = \frac{7+45}{1+3} = 13$，

设等差数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的公差分别为 d_1,d_2，

$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$，$T_n = \frac{n(b_1+b_n)}{2}$，故 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{a_1+a_n}{b_1+b_n} = \frac{2a_1+(n-1)d_1}{2b_1+(n-1)d_2}$，

故 $\frac{S_2}{T_2} = \frac{2a_1+d_1}{2b_1+d_2}$，又 $\frac{S_2}{T_2} = \frac{14+45}{2+3} = \frac{59}{5}$，

故 $\frac{2a_1+d_1}{2b_1+d_2} = \frac{59}{5}$，即 $10a_1 + 5d_1 = 118b_1 + 59d_2$，

$\frac{S_3}{T_3} = \frac{2a_1+2d_1}{2b_1+2d_2}$，又 $\frac{S_3}{T_3} = \frac{21+45}{3+3} = \frac{66}{6} = 11$，

$\frac{2a_1+2d_1}{2b_1+2d_2} = 11$，即 $a_1 + d_1 = 11b_1 + 11d_2$，

联立 $\begin{cases} 10a_1 + 5d_1 = 118b_1 + 59d_2 \\ a_1 + d_1 = 11b_1 + 11d_2 \\ a_1 = 13b_1 \end{cases}$，化简得 $\begin{cases} 12b_1 + 5d_1 = 59d_2 \\ 2b_1 + d_1 = 11d_2 \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} d_1 = 7d_2 \\ b_1 = 2d_2 \end{cases}$

又 $\frac{a_n}{b_{2n}}$ 是整数，即 $\frac{a_1+(n-1)d_1}{b_1+(2n-1)d_2} = \frac{13b_1+(7n-7)d_2}{b_1+(2n-1)d_2} = \frac{(7n+19)d_2}{(2n+1)d_2} = \frac{7n+19}{2n+1}$ 是整数，

设 $\frac{7n+19}{2n+1} = k \in \mathrm{Z}$，故 $7n+19 = 2kn+k$，即 $(2k-7)n = 19-k$，

解得$n=\frac{19-k}{2k-7}$，

令$\frac{19-k}{2k-7}\geq 1$，解得$\frac{7}{2}<k<\frac{26}{3}$，且$k\in Z$，

当$k=4$时，$n=\frac{19-k}{2k-7}=15$满足要求，

当$k=5$时，$n=\frac{14}{3}$不合要求，

当$k=6$时，$n=\frac{13}{5}$不合要求，

当$k=7$时，$n=\frac{12}{7}$不合要求，

当$k=8$时，$n=\frac{11}{9}$不合要求，

综上，n的值为15.

故答案为：15

7．（2023上·云南曲靖·高二校考期末）若数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都等差数列，且有$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\frac{5n+3}{n+2}$，则$\frac{a_7}{b_7}=$________.

【答案】$\frac{68}{15}$

【详解】设等差数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n、T_n

由$\frac{a_7}{b_7}=\frac{2a_7}{2b_7}=\frac{a_1+a_{13}}{b_1+b_{13}}=\frac{\frac{a_1+a_{13}}{2}}{\frac{b_1+b_{13}}{2}}=\frac{\frac{13(a_1+a_{13})}{2}}{\frac{13(b_1+b_{13})}{2}}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{13}}{b_1+b_2+\cdots+b_{13}}=\frac{5\times 13+3}{13+2}=\frac{68}{15}$

故答案为:$\frac{68}{15}$

题型05 等比数列通项的基本量计算

1．（2023上·黑龙江牡丹江·高二牡丹江市第二高级中学校考期末）在等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=2$，$a_4=4$，则首项等于（　）

A．2　　B．1　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{3}$

【答案】C

【详解】$\frac{a_4}{a_3}=2$，$\therefore q=2$，$a_3=a_1q^2$，$\therefore a_1=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

故选：C

2．（2023 上·甘肃天水·高二秦安县第一中学校考期末）已知等比数列$\{a_n\}$的公比$q=2$，$a_2+a_4+a_6=\frac{5}{2}$，则$a_4+a_6+a_8=$（　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．5　　C．10　　D．20

【答案】C

【详解】因为$q=2$且$a_2+a_4+a_6=\frac{5}{2}$，

所以$a_4+a_6+a_8=a_2q^2+a_4q^2+a_6q^2=q^2\left(a_2+a_4+a_6\right)=2^2\times\frac{5}{2}=10$.

故选：C

3．（2023 下·黑龙江大庆·高二校考期末）已如公比不为 1 的等比数列$\{a_n\}$中，存在s，$t\in\mathrm{N}^*$满足$a_sa_t=a_5^2$，则$\frac{4}{s}+\frac{1}{4t}$的最小值为（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{5}{8}$　　C．$\frac{7}{12}$　　D．$\frac{3}{4}$

【答案】B

【详解】设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q\neq1)$，因为$a_sa_t=a_5^2$，可得$a_1q^{s-1}a_1q^{t-1}=(a_1q^4)^2$，即$q^{s+t-2}=q^8$，

可得$s+t=10$，且$s,t\in\mathbf{N}^*$，

由$\frac{4}{s}+\frac{1}{4t}=\frac{1}{10}\cdot(\frac{4}{s}+\frac{1}{4t})(s+t)=\frac{1}{10}\cdot(4+\frac{4t}{s}+\frac{s}{4t}+\frac{1}{4})=\frac{1}{10}\cdot(\frac{17}{4}+\frac{4t}{s}+\frac{s}{4t})$，

因为$s,t\in\mathbf{N}^*$，所以$\frac{4t}{s}>0$，$\frac{s}{4t}>0$，则$\frac{4t}{s}+\frac{s}{4t}\geq2\sqrt{\frac{4t}{s}\cdot\frac{s}{4t}}=2$，得到$\frac{4}{s}+\frac{1}{4t}\geq\frac{5}{8}$，

当且仅当$\frac{4t}{s}=\frac{s}{4t}$时，即$s=8,t=2$时取等号，所以$\frac{4}{s}+\frac{1}{4t}$的最小值为$\frac{5}{8}$，

故选：B.

题型 06 等比数列角标和性质

1．（2022 下·四川成都·高一石室中学校考期末）正项数列$\{a_n\}$中，对任意$n\in\mathbf{N}^*$，满足$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$，且满足$a_3a_5+2a_5a_6+a_6a_8=9$，则$a_4+a_7=$（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】C

【详解】因为对任意$n\in\mathbf{N}^*$，满足$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$，所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$，

所以$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\cdots$，所以数列$\{a_n\}$为等比数列，

因为$a_3a_5+2a_5a_6+a_6a_8=9$，所以$a_4^2+2a_4a_7+a_7^2=9$，

所以$\left(a_4+a_7\right)^2=9$，

因为$\left\{a_n\right\}$为正项数列，所以$a_4+a_7=3$，

故选：C

2．（2023 上·海南省直辖县级单位·高二嘉积中学校考期末）正项等比数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_3\cdot a_6=4$，则

$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\cdots+\log_2 a_8$的值是_____.

【答案】8

【详解】因为正项等比数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_3\cdot a_6=4$，

所以$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\cdots+\log_2 a_8$

$=\log_2(a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_8)$

$=\log_2(a_3\cdot a_6)^4$

$=4\log_2 4=8$，

故答案为：8

3．（2023 下·北京房山·高二统考期末）在各项均为正数的等比数列$\left\{a_n\right\}$中，若$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=16$，则

$a_3+a_5=$_______.

【答案】 4

【详解】由$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=16$可得：$a_3^2+2a_3a_5+a_5^2=16$，

则$\left(a_3+a_5\right)^2=16$，因为等比数列$\left\{a_n\right\}$的各项均为正数，

则$a_3+a_5=4$.

故答案为： 4

4．（2023 上·广东·高二校联考期末）若等比数列$\left\{a_n\right\}$的各项均为正数，且$a_4^2+a_2a_6=2\mathrm{e}^6$，则

$\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_7$________.

【答案】21

【详解】由等比数列的下标和性质有$a_4^2=a_2a_6$，所以$a_4^2=\mathrm{e}^6$.

因为数列$\left\{a_n\right\}$的各项均为正数，所以$a_4=\mathrm{e}^3$，

因为$a_1a_7=a_2a_6=a_3a_5=a_4^2$，所以$\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_7=\ln\left(a_1a_2\cdots a_7\right)=\ln a_4^7=7\ln a_4=7\times3=21$.

故答案为：21.

题型 07 等比数列前 n 项和基本量计算

1．（2023 下·辽宁大连·高二统考期末）中国古代著作《张丘建算经》有这样一个问题："今有马行转迟，次日减半疾.七日行七百里"，意思是说有一匹马行走的速度逐渐减慢.

每天行走的里程是前一天的一半，七天一共行走了 700 里路，则该马第六天走的里程数约为（　）

A．5.51　　B．11.02　　C．22.05　　D．44.09

【答案】B

【详解】设该马第 $n(n\in \mathrm{N}^*)$ 天行走的里程数为 a_n，

由题意可知，数列 $\{a_n\}$ 是公比为 $q=\frac{1}{2}$ 的等比数列，

所以，该马七天所走的路程为 $\frac{a_1[1-(\frac{1}{2})^7]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{127a_1}{64}=700$，解得 $a_1=\frac{2^7\times 350}{127}$，

所以，该马第六天行走的里程数为 $a_6=a_1q^5=\frac{2^7\times 350}{127}\times(\frac{1}{2})^5=\frac{1400}{127}\approx 11.02$.

故选：B.

2．（2023 下·河南南阳·高二社旗县第一高级中学校联考期末）已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_2=4,\frac{S_8-S_5}{S_5-S_2}=8$，则 $a_1=$（　）

A．16　　B．8　　C．6　　D．2

【答案】D

【详解】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

由 $\frac{S_8-S_5}{S_5-S_2}=8$，

即 $\frac{a_8+a_7+a_6}{a_5+a_4+a_3}=\frac{q^3\left(a_5+a_4+a_3\right)}{a_5+a_4+a_3}=8$，

可得 $q^3=8$，即 $q=2$，

又 $a_2=4$，所以 $a_1=\frac{a_2}{q}=2$.

故选：D.

3．（2023 上·湖南岳阳·高二统考期末）已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，若 $a_1=1$，$q=2$，$S_n=31$，则 n 等于（　）

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

【答案】B

【详解】由题意知 $S_n=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{1-2^n}{1-2}=31$，得 $n=5$，

故选：B

4．（2023 下·广西南宁·高二宾阳中学校联考期末）已知 S_n 是正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$S_3=10$，则

$2S_9-3S_6+S_3$ 的最小值为______.

【答案】$-\frac{5}{4}$/-1.25

【详解】设正项等比数列$\{a_n\}$的公比为q，当$q=1$时，$S_3=3a_1=10$，则

$2S_9-3S_6+S_3=18a_1-18a_1+3a_1=10$，

当$q\neq1$时，$S_9-S_6=a_7+a_8+a_9=q^6(a_1+a_2+a_3)=q^6S_3=10q^6$，

$S_6-S_3=a_4+a_5+a_6=q^3(a_1+a_2+a_3)=10q^3$，

于是$2S_9-3S_6+S_3=2(S_9-S_6)-(S_6-S_3)=20q^6-10q^3=20(q^3-\frac{1}{4})^2-\frac{5}{4}\geq-\frac{5}{4}$，

所以当$q^3=\frac{1}{4}$时，$2S_9-3S_6+S_3$取得最小值$-\frac{5}{4}$.

故答案为：$-\frac{5}{4}$.

5．（2023 下·贵州遵义·高二统考期末）在正项等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=2$，$S_3=26$，则公比$q=$_____.

【答案】3

【详解】解：因为在正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$S_3=26$，

所以$S_3=\frac{2\left(1-q^3\right)}{1-q}=26$，即$1+q+q^2=13$，

即 $q^2+q-12=0$，

解得 $q=3$或$q=-4$（舍去），

故答案为：3

6．（2023 下·上海青浦·高二统考期末）设等比数列$\{a_n\}$的公比为 2，前n项和为S_n，若$S_4=2S_2+1$，则

$a_3=$________.

【答案】$\frac{4}{9}$

【详解】由等比数列$\{a_n\}$的公比为 2，且$S_4=2S_2+1$，

可得$\frac{a_1(1-2^4)}{1-2}=2(a_1+2a_1)+1$，整理得$15a_1=2\times3a_1+1$，解得$a_1=\frac{1}{9}$，

所以$a_3=a_1q^2=\frac{1}{9}\times2^2=\frac{4}{9}$.

故答案为：$\frac{4}{9}$.

题型 08 等比数列前n项和性质

1．（2023上·湖南衡阳·高二校考期末）已知等比数列$\{a_n\}$的公比为$-\frac{1}{2}$，前n项和为S_n.若$S_{2m}=31$，$S_m=32$，则$m=$（　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．7

【答案】C

【详解】法一：因为等比数列$\{a_n\}$的公比为$-\frac{1}{2}$，

则$S_{2m}=\frac{a_1\left(1-q^{2m}\right)}{1-q}=31$，$S_m=\frac{a_1\left(1-q^m\right)}{1-q}=32$，

所以$\frac{S_{2m}}{S_m}=\frac{\frac{a_1\left(1-q^{2m}\right)}{1-q}}{\frac{a_1\left(1-q^m\right)}{1-q}}=\frac{1-q^{2m}}{1-q^m}=1+q^m=1+\left(-\frac{1}{2}\right)^m=\frac{31}{32}$，解得$m=5$.

法二：根据等比数列前n项和的性质得S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$成等比数列，且公比为q^m，

所以$\frac{S_{2m}-S_m}{S_m}=q^m$，即$\frac{31-32}{32}=\left(-\frac{1}{2}\right)^m$，解得$m=5$..

故选：C

2．（2023下·贵州黔南·高二统考期末）已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n．若$\frac{S_4}{S_8}=\frac{1}{4}$，则$\frac{S_{12}}{S_4}=$（　）

A．13　　B．16　　C．9　　D．12

【答案】A

【详解】设$S_4=x\left(x\neq 0\right)$，则$S_8=4x$，

因为$\{a_n\}$为等比数列，根据等比数列的性质，

可得$S_4,S_8-S_4,S_{12}-S_8$仍成等比数列.

因为$\frac{S_8-S_4}{S_4}=\frac{4x-x}{x}=3$，所以$S_{12}-S_8=9x$，

所以$S_{12}=13x$，故$\frac{S_{12}}{S_4}=13$.

故选：A

3．（2022上·陕西铜川·高二校考期末）已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_8-2S_4=4$，则$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}$的最小值为（　）

A．20　　B．16　　C．9　　D．8

【答案】B

【详解】因为$S_8-2S_4=4$，所以$S_8-S_4=4+S_4$，

由正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，

得$S_4, S_8-S_4, S_{12}-S_8$为等比数列，且$S_n>0$，

则$(S_8-S_4)^2=S_4(S_{12}-S_8)$，

则$S_{12}-S_8=\frac{(S_8-S_4)^2}{S_4}=\frac{(S_4+4)^2}{S_4}=S_4+\frac{16}{S_4}+8\geq 2\sqrt{S_4\cdot\frac{16}{S_4}}+8=16$，

当且仅当$S_4=\frac{16}{S_4}$，即$S_4=4$时取等号，

所以$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}$的最小值为16.

故选：B.

4．（2018上·安徽池州·高三统考期末）已知等比数列$\{a_n\}$的公比$q=2$，前100项和为$S_{100}=90$，则其偶数项$a_2+a_4+\cdots+a_{100}$为（　）

A．15　　B．30

C．45　　D．60

【答案】D

【详解】设$S=a_1+a_3+\cdots+a_{99}$，则$a_2+a_4+\cdots+a_{100}=(a_1+a_3+\cdots+a_{99})q=2S$，

又因为$S_{100}=a_1+a_2+\cdots+a_{100}=90$，所以$3S=90, S=30$，

所以$a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2S=60$.

故选: D

5．（2023上·广东清远·高二统考期末）已知等比数列$\{an\}$的前n项和为Sn，若$\frac{S_3}{S_6}=\frac{1}{7}$，则$\frac{S_9}{S_6}=$（　）

A．$\frac{43}{7}$　　B．43　　C．$\frac{41}{7}$　　D．41

【答案】A

【详解】设$S_3=x$，则$S_6=7x$，

因为$\{a_n\}$为等比数列，

所以S_3，S_6-S_3，S_9-S_6仍成等比数列.

因为$\frac{S_6-S_3}{S_3}=\frac{7x-x}{x}=6$，所以$S_9-S_6=36x$，

所以$S_9=43x$，故$\frac{S_9}{S_6}=\frac{43}{7}$.

故选：A.

6．（2022上·山东聊城·高三山东聊城一中校考期末）已知等比数列$\{a_n\}$的公比$q=\frac{1}{3}$，且$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=90$，则$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=$__________.

【答案】120

【详解】因为在等比数列中，若项数为 $2n$，则 $\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=q$，

所以 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=\left(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}\right)+\left(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{100}\right)$

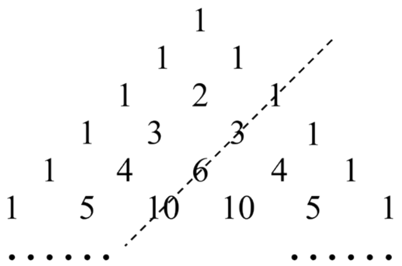
$=\left(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}\right)+\frac{1}{3}\left(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}\right)$

$=90+\frac{1}{3}\times 90=120$.

故答案为：120

题型 09 数列求通项

1．（2023 上·广西贵港·高二统考期末）如图，这是由“杨辉三角”拓展而成的三角形数阵，图中虚线上的数 1,3,6,10,…构成数列 $\{a_n\}$，则 $a_{200}=$（　　）



A．20099　　B．20100　　C．21000　　D．211001

【答案】B

【详解】由题意 $a_2-a_1=3-1=2$，$a_3-a_2=6-3=3$，$a_4-a_3=10-6=4$，…，

所以数列 $\{a_n\}$ 的递推公式为 $a_{n+1}-a_n=n+1$，且 $a_1=1$，

所以 $\left(a_{200}-a_{199}\right)+\left(a_{199}-a_{198}\right)+\cdots+\left(a_2-a_1\right)=200+199+\cdots+2$.

所以 $a_{200}-a_1=200+199+\cdots+2$，

故 $a_{200}=200+199+\cdots+2+1=\frac{200\times(200+1)}{2}=20100$.

故答案为：B.

2．（2023 上·江苏镇江·高二江苏省丹阳高级中学校考期末）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{(n+1)a_n}{2}$，且 $a_1=1$，则 $S_7=$（　　）

A．14　　B．28　　C．56　　D．112

【答案】B

【详解】注意到 $a_n=\begin{cases}S_1, & n=1\\ S_n-S_{n-1}, & n\geq 2\end{cases}$，$n\in\mathrm{N}^*$，则当 $n\geq 2$ 时，

$S_n=\dfrac{(n+1)a_n}{2}\Rightarrow 2S_n=(n+1)(S_n-S_{n-1})\Rightarrow(n+1)S_{n-1}=(n-1)S_n\Rightarrow\dfrac{S_n}{S_{n-1}}=\dfrac{n+1}{n-1}$.

故 $S_7=S_1\cdot\dfrac{S_2}{S_1}\cdot\dfrac{S_3}{S_2}\cdot L\cdot\dfrac{S_7}{S_6}=1\times\dfrac{3}{1}\times\dfrac{4}{2}\times L\times\dfrac{7}{5}\times\dfrac{8}{6}=28$.

故选：B

3．（2023 上·重庆九龙坡·高二重庆市育才中学校考期末）已知 $a_1=2$，$a_n=n(a_{n+1}-a_n)$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=$（　　）

A．n　　B．$n+1$　　C．$2n$　　D．$\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$

【答案】C

【详解】解：由 $a_n=n(a_{n+1}-a_n)$，得 $(n+1)a_n=na_{n+1}$，

即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+1}{n}$，

则 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n}{n-1}$，$\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\dfrac{n-1}{n-2}$，$\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-3}}=\dfrac{n-2}{n-3}$，…，$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{2}{1}$，

由累乘法可得 $\dfrac{a_n}{a_1}=n$，因为 $a_1=2$，所以 $a_n=2n$，

故选：C.

4．（2023 上·吉林长春·高二校考期末）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3$，则 $a_9=$（　　）

A．2^9-3　　B．2^9+3　　C．$2^{10}-3$　　D．$2^{10}+3$

【答案】C

【详解】因为 $a_{n+1}=2a_n+3$，则 $a_{n+1}+3=2(a_n+3)$，且 $a_1+3=4\neq0$，

可知数列 $\{a_n+3\}$ 是以首项为 4，公比为 2 的等比数列，

所以 $a_n+3=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$，即 $a_n=2^{n+1}-3$，

所以 $a_9=2^{10}-3$.

故选：C.

5．（2023 上·黑龙江牡丹江·高二牡丹江市第二高级中学校考期末）已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且满足 $S_n=n^2+2n+2(n\in\mathbf{N}^*,n\geq1)$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$__________.

【答案】$a_n=\begin{cases}5,n=1\\2n+1,n\geq2\end{cases}$

【详解】当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1+2+2=5$，

当 $n\geq2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n+2-(n^2-2n+1+2n-2+2)=2n+1$，

显然 $2\times1+1=3\neq5$，故 $a_n=\begin{cases}5,n=1\\2n+1,n\geq2\end{cases}$.

故答案为：$a_n=\begin{cases}5,n=1\\2n+1,n\geq2\end{cases}$

6．（2022上·浙江杭州·高二杭州高级中学校考期末）已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=2$，前 n 项和为S_n，若$S_n=2a_{n+1}-2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，则$a_n=$_______.

【答案】$\begin{cases}2,n=1\\2\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2},n\geq2\end{cases}$

【详解】因为$S_n=2a_{n+1}-2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，

所以$S_{n-1}=2a_n-2\left(n\geq2,n\in\mathbf{N}^*\right)$，

两式相减可得$a_n=2a_{n+1}-2a_n$，所以$a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n\left(n\geq2,n\in\mathrm{N}^*\right)$，

又因为$S_1=2a_2-2=a_1$，所以$a_2=2$，

当$n\geq2$时，$a_n=a_2q^{n-2}=2\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2}$，

当$n=1$时，不符合$n\geq2$的情况，

所以$a_n=\begin{cases}2,n=1\\2\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2},n\geq2\end{cases}$，

故答案为：$\begin{cases}2,n=1\\2\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2},n\geq2\end{cases}$.

7．（2023下·福建泉州·高二校联考期末）数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3$，则$\{a_n\}$的前10项的和为_______.

【答案】4062

【详解】在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3$，则$a_{n+1}+3=2\left(a_n+3\right)$，且$a_1+3=4$，

所以，数列$\{a_n+3\}$是首项为4，公比为2的等比数列，

所以，$a_n+3=4\cdot2^{n-1}=2^{n+1}$，则$a_n=2^{n+1}-3$，

所以，数列$\{a_n\}$的前10项和为$S_{10}=\left(2^2-3\right)+\left(2^3-3\right)+\cdots+\left(2^{11}-3\right)$

$=\left(2^2+2^3+\cdots+2^{11}\right)-30=\dfrac{4\left(1-2^{10}\right)}{1-2}-30=4062$.

故答案为：4062.

8．（2023上·海南省直辖县级单位·高二嘉积中学校考期末）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，

$a_{n+1}=a_n+n\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，则$a_5=$______，$a_n=$______.

【答案】 11 $\dfrac{n^2-n+2}{2}$

【详解】依题意，$n\in\mathrm{N}^*$，$n\ge 2$，$a_n-a_{n-1}=n-1$，而$a_1=1$，

则$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$

$=1+1+2+\cdots+(n-1)=1+\dfrac{1+(n-1)}{2}\cdot(n-1)=\dfrac{n^2-n+2}{2}$，$a_1=1$也满足该式，

所以$a_n=\dfrac{n^2-n+2}{2}$，$a_5=11$.

故答案为：11；$\dfrac{n^2-n+2}{2}$

9.（2023下·吉林白城·高二校考期末）设各项都是正数的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，且$a_n^2+a_n=2S_n$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

【答案】(1)$a_n=n$

【详解】（1）已知$a_n^2+a_n=2S_n$，得$a_{n-1}^2+a_{n-1}=2S_{n-1}(n\ge 2)$，

两式作差，得$a_n^2-a_{n-1}^2=a_n+a_{n-1}$，即$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})=a_n+a_{n-1}$.

又数列$\{a_n\}$的各项都是正数，所以$a_n+a_{n-1}\ne 0$，所以$a_n-a_{n-1}=1(n\ge 2)$，

显然数列$\{a_n\}$是以1为首项，1为公差的等差数列，

所以$a_n=n$.

题型10 数列求和之倒序相加法

1．（2023下·江西萍乡·高二统考期末）已知函数$f(x)=1+\dfrac{a}{4^x+2}$关于点$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$对称，其中$a$为实数.

(1)求实数a的值；

(2)若数列$\{a_n\}$的通项满足$a_n=f\left(\dfrac{n}{2023}\right)$，其前$n$项和为$S_n$，求$S_{2022}$.

【答案】(1)$a=-2$

(2)$S_{2022}=1011$

【详解】（1）由题知$f(x)+f(1-x)=1$，即$1+\dfrac{a}{4^x+2}+1+\dfrac{a}{4^{1-x}+2}=1$，

整理得$\dfrac{a}{4^x+2}+\dfrac{a\cdot 4^x}{4+2\cdot 4^x}=\dfrac{2a+a\cdot 4^x}{4+2\cdot 4^x}=-1$，解得$a=-2$ ；