重庆市长寿中学校2022-2023学年高二上•期末考试

数学试题

试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分150分，考试时间120分钟.

注意事项：

1. 答卷前，务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卷规定的位置上.
2. 答选择题时，必须使用2B铅笔将答题卷上对应题目的答案标号涂黑.
3. 答非选择题时，必须使用0.5毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卷规定的位置上.
4. 考试结束后，将答题卷交回.

一．单选题：本小题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，答案请涂写在机读卡上

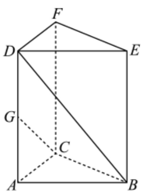
1．已知直线l过$A(-1,1)$、$B(1,3)$两点，则直线l的倾斜角的大小为（　）

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{3\pi}{4}$

2．已知圆$C_1:(x-2)^2+(y-3)^2=1$和圆$C_2:(x-3)^2+(y-4)^2=16$，则圆C_1与圆C_2的位置关系为（　）

A．内含　　B．外切　　C．相交　　D．相离

3．三棱柱$ABC-DEF$中，G为棱AD的中点，若$\overrightarrow{BA}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b},\overrightarrow{BD}=\vec{c}$，则$\overrightarrow{CG}=$（　）



A．$-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$　　B．$-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

C．$-\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{a}}+\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}}$　　D．$\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

4．双曲线$C:\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{39}=1$上的点$P$到上焦点的距离为12，则$P$到下焦点的距离为（　）

A．22　　B．2　　C．2或22　　D．24

5．设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_3=16$，$S_6=8$，则$S_{12}=$（　）

A．-50　　B．-60　　C．-70　　D．-80

6．已知点P是圆C：$x^2+y^2-2x-4y+3=0$的动点，直线l：$x-y-3=0$上存在两点A，B，使得$\angle APB=\frac{\pi}{2}$恒成立，则线段AB长度的最小值是（　）

A．$6\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$4\sqrt{2}$　　D．$4\sqrt{21}$

7．设抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点是F，直线l与抛物线C相交于P,Q两点，且$\angle PFQ=\frac{2\pi}{3}$，线段$PQ$的中点A到抛物线$C$的准线的距离为$d$，则$\left(\frac{|PQ|}{d}\right)^2$的最小值为（　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C．3　　D．$\dfrac{1}{3}$

8．已知点 P 是椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点，点 F_1、F_2 是椭圆 C 的左、右焦点，若 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径的最大值为 $a-c$，若椭圆的长轴长为 4，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积的最大值为（　）

A．2　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

二．多选题：本小题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求的，全部选对得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．下列说法中，正确的有（　）

A．直线 $y=3x-2$ 在 y 轴上的截距是 2　　B．直线 $2x-y+5=0$ 经过第一、二、三象限

C．过点 $(5,0)$，且倾斜角为 90°的直线方程为 $x-5=0$

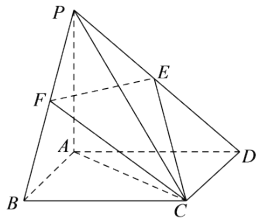
D．过点 $P(1,2)$ 且在 x 轴，y 轴上的截距相等的直线方程为 $x+y-3=0$

10．已知直线 $l_1:(m+3)x+y-1=0,l_2:4x+my+3m-4=0$，下列命题中正确的是（　）

A．若 $l_1\perp l_2$，则 $m=-\dfrac{12}{5}$　　B．若 $l_1 // l_2$，则 $m=1$ 或 $m=-4$

C．当 $m=0$ 时，$(1,3)$ 是直线 l_1 的方向向量　　D．原点到直线 l_2 的最大距离为 $\sqrt{10}$

11．《九章算术》是我国古代的数学名著，书中将底面为矩形，且有一条侧棱垂直于底面的四棱锥称为阳马．如图，在阳马 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是正方形，且 $PA=AB=2$，E，F 分别为 PD，PB 的中点，则（　）



A．$EF\perp$ 平面 PAC　　B．$AB//$ 平面 EFC

C．点 F 到直线 CD 的距离为 $\sqrt{6}$　　D．点 A 到平面 EFC 的距离为 $\dfrac{4\sqrt{11}}{11}$

12．已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_{n+1}=\left(\sqrt{a_n+2}+1\right)^2-2$，则关于数列 $\{a_n\}$ 的说法正确的是（　）

A．$a_2=5$　　B．数列 $\{a_n\}$ 为递增数列

C．$a_n=n^2+2n-1$　　D．数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n+1}\right\}$ 的前 n 项和小于 $\dfrac{3}{4}$

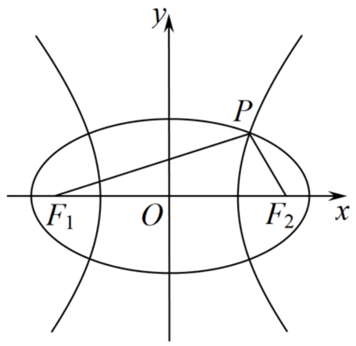
三．填空题：本小题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填写在题中的横线上.

13．已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_1+a_3=2,a_3+a_5=4$，则 $a_5+a_7=$______

14．正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_4\cdot a_5=32$，则$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\cdots+\log_2 a_8$的值是________.

15．已知关于x的方程$2+\sqrt{4-x^2}=k(x+3)+1$有两个不同的实数根，则实数k的范围______.

16．已知P是椭圆$C_1:\dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=1\left(a_1>b_1>0\right)$和双曲线$C_2:\dfrac{x^2}{a_2^2}-\dfrac{y^2}{b_2^2}=1\left(a_2>0,b_2>0\right)$的交点，$F_1$，$F_2$是$C_1$，$C_2$的公共焦点，$e_1$，$e_2$分别为$C_1$，$C_2$的离心率，若$\angle F_1PF_2=\dfrac{2\pi}{3}$，则$\dfrac{1}{e_1}\cdot\dfrac{1}{e_2}$的取值范围为______.



四．解答题（本大题共 6 个小题，共 70 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.）

17．已知以点$A\left(-1,2\right)$为圆心的圆与直线l_1：$x+2y+7=0$相切，过点$B\left(-2,0\right)$的直线l与圆A相交于M，N两点，Q是MN的中点，$|MN|=2\sqrt{19}$.

(1)求圆A的标准方程；

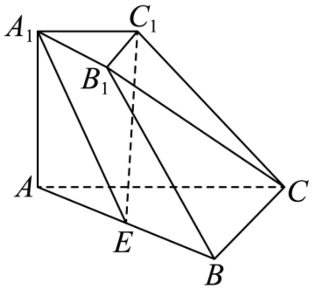
(2)求直线l的方程.

18．在数列$\{a_n\}$中，$a_1=4$，$a_{n+1}=4a_n-3n+1$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)设$b_n=a_n-n$，求证：数列$\{b_n\}$是等比数列；

(2)求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n.

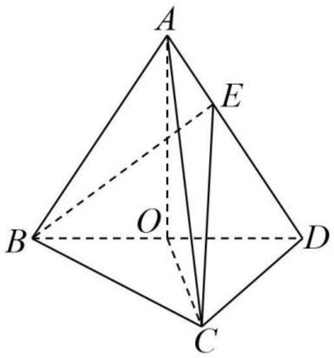
19．三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形，$AA_1\perp$ 平面 ABC，$AB=4$，$A_1B_1=2$，$AA_1=\sqrt{3}$，E 是 AB 的中点，平面 A_1C_1E 交平面 ABC 于直线 l.



(1)求证：$AC/\!/ l$；

(2)求直线 B_1C 与平面 A_1C_1E 所成角的正弦值.

20．如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB=AD$，O 为 BD 的中点，$AO\perp CD$.



(1)证明：平面 $ABD\perp$ 平面 BCD；

(2)若 $\triangle OCD$ 是边长为1的等边三角形，点 E 在棱 AD 上，$DE=2EA$，且二面角 $E-BC-D$ 的大小为 45°，求三棱锥 $A-BCD$ 的体积.

21．抛物线 $C:y^2=2px\left(p>0\right)$，抛物线的焦点是双曲线 $x^2-2y^2=1$ 的右顶点，过点 $Q\left(1,3\right)$ 作直线与 C 交于 M,N 两点

(1)求 C 的方程.

(2)若 C 的一条弦 ST 经过 C 的焦点，且直线 ST 与直线 MN 平行，试问是否存在常数 λ，使得 $|QM|\cdot|QN|=\lambda|SF|\cdot|TF|$ 成立？若存在，求 λ 的值；若不存在，请说明理由.

22．已知点 $A(0,2)$ 与 $B(0,-2)$，动点 $M(x,y)$ 满足直线 AM，BM 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$，则点 M 的轨迹为曲线 C.

(1)求曲线 C 的方程；

(2)若点 T 在直线 $y=3$ 上，直线 TA，TB 分别与曲线 C 交于点 E，F，求 $\triangle TAB$ 与 $\triangle TEF$ 面积之比的最大值.

重庆市长寿中学校2022-2023学年高二上·期末考试数学答案：

1．A

【分析】由两点坐标求出斜率，即可得出倾斜角

【详解】直线l过$A\left(-1,1\right)$、$B\left(1,3\right)$两点，则直线l的斜率$k=\dfrac{3-1}{1-\left(-1\right)}=1$，$\therefore$直线的倾斜角为$\dfrac{\pi}{4}$．

故选：A．

2．A

【分析】根据两圆的标准方程可知圆心坐标和半径大小，只需比较圆心距与两圆半径之差以及两圆半径之和的大小即可得出两圆位置关系．

【详解】由题意可知，圆$C_1:\left(x-2\right)^2+\left(y-3\right)^2=1$的圆心为$C_1(2,3)$，半径$r=1$；

圆$C_2:\left(x-3\right)^2+\left(y-4\right)^2=16$的圆心为$C_2(3,4)$，半径$R=4$；

两圆心距离为$\left|C_1C_2\right|=\sqrt{(3-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{2}$，此时$\left|C_1C_2\right|=\sqrt{2}<R-r=3$

所以，圆C_1与圆C_2的位置关系为内含．

故选：A．

3．D

【分析】利用空间向量的线性运算法则与空间向量基本定理，求解即可．

【详解】$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA})$

$=(\vec{a}-\vec{b})+\dfrac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a})=\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$．

故选：D．

4．A

【分析】设C的上、下焦点分别为F_1,F_2，根据双曲线的定义$||PF_1|-|PF_2||=2a=10$求出$|PF_2|=2$或$|PF_2|=22$，再根据$|PF_1|+|PF_2|\geq|F_1F_2|$可得$|PF_2|=22$．

【详解】设C的上、下焦点分别为F_1,F_2，则$\left|PF_1\right|=12$．

因为$a^2=25,b^2=39$,所以$a=5$，$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+39}=8$，则$|F_1F_2|=2c=16$，

由双曲线的定义可知，$||PF_1|-|PF_2||=2a=10$，即$|12-|PF_2||=10$，

解得$|PF_2|=2$或$|PF_2|=22$，

当$|PF_2|=2$时，$|PF_1|+|PF_2|=12+2=14<|F_1F_2|=16$，不符合题意；

当$|PF_2|=22$时，$|PF_1|+|PF_2|=12+22=34>|F_1F_2|=16$，符合题意.

综上所述：$|PF_2|=22$.

故选：A

5．D

【分析】由等差数列片段和的性质可得出S_3、S_6-S_3、S_9-S_6、$S_{12}-S_9$成等差数列，即可求得S_{12}的值.

【详解】解：由等差数列的性质可知，S_3、S_6-S_3、S_9-S_6、$S_{12}-S_9$成等差数列，

且该数列的公差为$\left(S_6-S_3\right)-S_3=-8-16=-24$，则$S_9-S_6=\left(S_6-S_3\right)-24=-32$，

所以，$S_{12}-S_9=\left(S_9-S_6\right)-24=-56$，

因此，$S_{12}=S_3+\left(S_6-S_3\right)+\left(S_9-S_6\right)+\left(S_{12}-S_9\right)=-80$.

故选：D.

6．A

【分析】结合点到直线的距离公式以及圆的几何性质求得正确答案.

【详解】圆$C:(x-1)^2+(y-2)^2=2$，圆心为$C(1,2)$，半径为$r_1=\sqrt{2}$.

依题意，P是圆C上任意一点，直线l上存在两点A,B，使得$\angle APB=\frac{\pi}{2}$恒成立，

故以AB为直径的圆D的半径r_2的最小值是P到直线l距离的最大值，

即$\frac{|1-2-3|}{\sqrt{2}}+r_1=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，

所以$|AB|$的最小值是$2\times3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$.

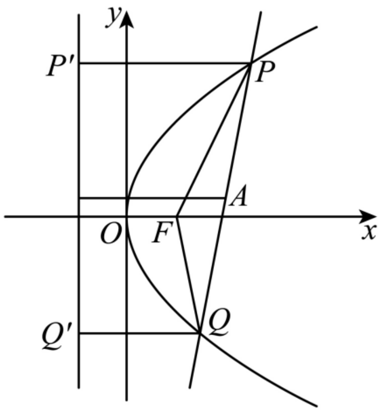
故选：A

7．C

【分析】设出线段FP,FQ的长度，用余弦定理求得PQ的长度，利用抛物线的定义以及梯形的中位线长度的计算，从而$\left(\frac{|PQ|}{d}\right)^2$转化为$m,n$的关系式，再结合不等式即可求得其最小值.

【详解】设$|PF|=m$，$|QF|=n$，

过点P，Q分别作抛物线的准线的垂线，垂足分别为P'，Q'，如下所示：



则$|PP'|=m$，$|QQ'|=n$，

因为点A为线段PQ的中点，根据梯形中位线定理可得，点A到抛物线C的准线的距离为$d=\dfrac{|PP'|+|QQ'|}{2}=\dfrac{m+n}{2}$，

因为$\angle PFQ=\dfrac{2\pi}{3}$，所以在$\triangle PFQ$中，由余弦定理得

$|PQ|^2=m^2+n^2-2mn\cos\dfrac{2\pi}{3}=m^2+n^2+mn$，

所以$\left(\dfrac{|PQ|}{d}\right)^2=\dfrac{|PQ|^2}{d^2}=\dfrac{4\left(m^2+n^2+mn\right)}{(m+n)^2}=\dfrac{4\left[(m+n)^2-mn\right]}{(m+n)^2}=4\left[1-\dfrac{mn}{(m+n)^2}\right]$，

又因为$(m+n)^2\geq 4mn$，所以$\dfrac{mn}{(m+n)^2}\leq\dfrac{1}{4}$，当且仅当$m=n$时，等号成立，（$m,n$显然存在），

所以$\left(\dfrac{|PQ|}{d}\right)^2\geq 4\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=3$，则$\left(\dfrac{|PQ|}{d}\right)^2$的最小值为$3$.

故选：C.

【点睛】关键点睛：本题考查抛物线中的最值问题，处理问题的关键是充分利用抛物线的定义，还要注意到不等式的应用。

8．A

【分析】设$\triangle PF_1F_2$的内切圆半径为r，则$S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\left(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|\right)r=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|\cdot y_P$，结合

$|PF_1|+|PF_2|=2a$，$|F_1F_2|=2c$，$r\leq a-c$，$y_P\leq b$，可得$b=c$，再由$a^2=b^2+c^2$即可求解.

【详解】由题意可得：$|PF_1|+|PF_2|=2a$，$|F_1F_2|=2c$，

设$\triangle PF_1F_2$的内切圆半径为r，

所以$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\left(\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|+\left|F_1F_2\right|\right)r=\frac{1}{2}\left(2c+2a\right)r=\left(c+a\right)r$，

因为$\triangle PF_1F_2$的内切圆半径的最大值为$a-c$，

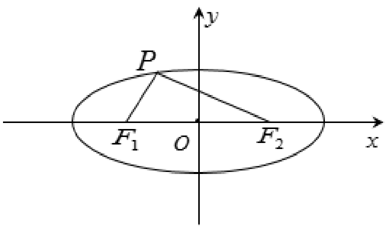
所以$S_{\triangle PF_1F_2}=\left(c+a\right)r\le\left(c+a\right)\left(c-a\right)=c^2-a^2=b^2$

因为$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\left|F_1F_2\right|\cdot y_P\le\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot b=bc$，所以$b^2=bc$，可得$b=c$，

又椭圆的长轴长为4，即$a=2$，

由$a^2=b^2+c^2$，求得$b=c=\sqrt{2}$，所以$\triangle PF_1F_2$的面积的$S_{\triangle PF_1F_2}\le bc=2$

故选：A



9．BC

【分析】根据直线相关概念一一对答案进行核对即可。

【详解】对于A:令$x=0$时，$y=-2$，故在y轴上的截距是2，A错.

对于B:直线的斜率为2，在x、y轴上的截距分别为$-\frac{5}{2}$、5，故直线经过第一、二、三象限，B对.对于C:过点$\left(5,0\right)$，倾斜角为90°的直线方程为$x-5=0$，故C对.对于D:当直线的截距不为0时，设直线的方程为：$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$，把点$P\left(1,2\right)$代人直线得$a=3$，所以直线方程为：$x+y-3=0$，当截距为0时，设直线方程为：$y=kx$，把点$P\left(1,2\right)$代人直线得$k=2$，直线方程为：$y=2x$，故D错.

故选：BC

10．AD

【分析】根据垂直关系计算得到A正确；当$m=1$时，两条直线重合，B错误；计算斜率得到C错误；l_2过定点$A\left(1,-3\right)$，最大距离为$\left|AO\right|$，计算得到D正确，得到答案.

【详解】对选项A：$l_1\perp l_2$，则$4\left(m+3\right)+m=0$，解得$m=-\frac{12}{5}$，正确；

对选项B：当$m=1$时，两条直线重合，错误；

对选项C：$m=0$时，$l_1:3x+y-1=0$，斜率为-3，l_1的方向向量是$\left(1,-3\right)$，错误；

对选项D：$l_2:4x-4+m\left(y+3\right)=0$过定点$A\left(1,-3\right)$，故原点到直线$l_2$的最大距离为

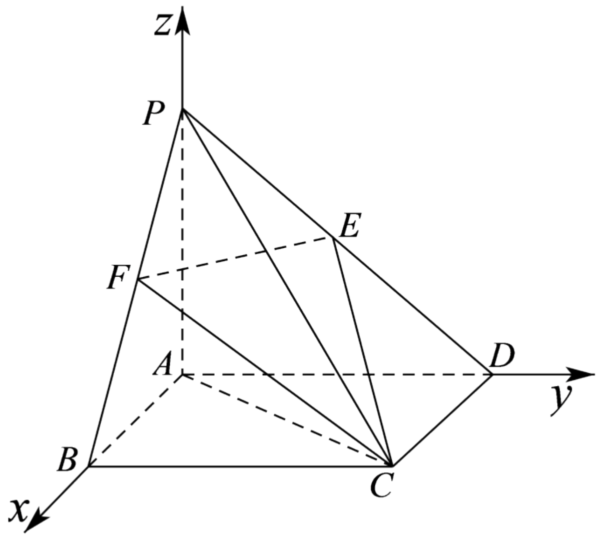
$\left|AO\right|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$，正确.

故选：AD

11．AD

【分析】根据已知条件建立空间直角坐标系，求出相关点的坐标及平面EFC的法向量，利用向量垂直条件及线面垂直的判定定理及线面平行的向量关系，结合点到直线的距离及点到面的距离的向量公式即可求解.

【详解】以A为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}$的方向分别为x，y，z轴的正方向建立空直角坐标系如图所示



由题意可知，$A\left(0,0,0\right)$，$P\left(0,0,2\right)$，$C\left(2,2,0\right)$，$E\left(0,1,1\right)$，$F\left(1,0,1\right)$，$D\left(0,2,0\right)$，

所以$\overrightarrow{EF}=\left(1,-1,0\right)$，$\overrightarrow{AP}=\left(0,0,2\right)$，$\overrightarrow{PC}=\left(2,2,-2\right)$，$\overrightarrow{EC}=\left(2,1,-1\right)$.

因为$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AP}=0-0+0=0$，所以$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{AP}$，即$EF\perp AP$

$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{PC}=2-2+0=0$，所以$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{PC}$，即$EF\perp PC$．又$AP\cap PC=P$，

所以$EF\perp$平面PAC，故A正确；

设平面EFC的法向量为$\vec{m}=\left(x,y,z\right)$，则