绝密★启用前

2024年普通高等学校招生全国统一考试

全国甲卷理科数学

使用范围：陕西、宁夏、青海、内蒙古、四川

注意事项：

1．答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上．

2．答选择题时，必须使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号．

3．答非选择题时，必须使用0.5毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上．

4．所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效．

5．考试结束后，只将答题卡交回．

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设 $z=5+\mathrm{i}$，则 $\mathrm{i}\left(\overline{z}+z\right)=$（　　）

A. $10\mathrm{i}$　　B. $2\mathrm{i}$　　C. 10　　D. -2

【答案】A

【解析】

【分析】结合共轭复数与复数的基本运算直接求解.

【详解】由 $z=5+\mathrm{i}\Rightarrow\overline{z}=5-\mathrm{i},z+\overline{z}=10$，则 $\mathrm{i}\left(\overline{z}+z\right)=10\mathrm{i}$.

故选：A

2. 集合 $A=\{1,2,3,4,5,9\},B=\left\{x\middle|\sqrt{x}\in A\right\}$，则 $\complement_A\left(A\cap B\right)=$（　　）

A. $\{1,4,9\}$　　B. $\{3,4,9\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{2,3,5\}$

【答案】D

【解析】

【分析】由集合 B 的定义求出 B，结合交集与补集运算即可求解.

【详解】因为 $A=\{1,2,3,4,5,9\},B=\left\{x\middle|\sqrt{x}\in A\right\}$，所以 $B=\{1,4,9,16,25,81\}$，

则 $A\cap B=\{1,4,9\}$，$\complement_A\left(A\cap B\right)=\{2,3,5\}$

故选：D

3. 若实数x,y满足约束条件$\begin{cases}4x-3y-3\geq 0\\ x-2y-2\leq 0\\ 2x+6y-9\leq 0\end{cases}$，则$z=x-5y$的最小值为（　　）

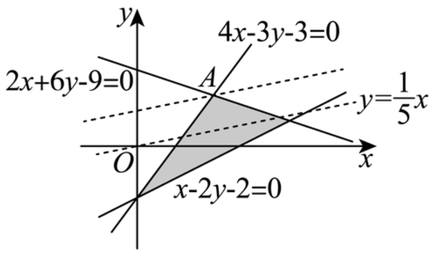
A. 5　　　　B. $\frac{1}{2}$　　　　C. -2　　　　D. $-\frac{7}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】画出可行域后，利用z的几何意义计算即可得.

【详解】实数x,y满足$\begin{cases}4x-3y-3\geq 0\\ x-2y-2\leq 0\\ 2x+6y-9\leq 0\end{cases}$，作出可行域如图：



由$z=x-5y$可得$y=\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}z$，

即z的几何意义为$y=\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}z$的截距的$-\frac{1}{5}$，

则该直线截距取最大值时，z有最小值，

此时直线$y=\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}z$过点A，

联立$\begin{cases}4x-3y-3=0\\ 2x+6y-9=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\ y=1\end{cases}$，即$A\left(\frac{3}{2},1\right)$，

则$z_{\min}=\frac{3}{2}-5\times 1=-\frac{7}{2}$.

故选：D.

4. 等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_5=S_{10}$，$a_5=1$，则$a_1=$（　　）

A. -2　　　　B. $\frac{7}{3}$　　　　C. 1　　　　D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】由$S_5=S_{10}$结合等差中项的性质可得$a_8=0$，即可计算出公差，即可得a_1的值.

【详解】由$S_{10}-S_5=a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=5a_8=0$，则$a_8=0$，

则等差数列$\{a_n\}$的公差$d=\frac{a_8-a_5}{3}=-\frac{1}{3}$，故$a_1=a_5-4d=1-4\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{3}$.

故选：B.

5. 已知双曲线$C:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的上、下焦点分别为$F_1(0,4),F_2(0,-4)$，点$P(-6,4)$在该双曲线上，则该双曲线的离心率为（　　）

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】由焦点坐标可得焦距$2c$，结合双曲线定义计算可得$2a$，即可得离心率.

【详解】由题意，$F_1(0,-4)$、$F_2(0,4)$、$P(-6,4)$，

则$|F_1F_2|=2c=8$，$|PF_1|=\sqrt{6^2+(4+4)^2}=10$，$|PF_2|=\sqrt{6^2+(4-4)^2}=6$，

则$2a=|PF_1|-|PF_2|=10-6=4$，则$e=\frac{2c}{2a}=\frac{8}{4}=2$.

故选：C.

6. 设函数$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x+2\sin x}{1+x^2}$，则曲线$y=f(x)$在$(0,1)$处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】借助导数的几何意义计算可得其在点$(0,1)$处的切线方程，即可得其与坐标轴交点坐标，即可得其面积.

【详解】$f'(x)=\frac{(\mathrm{e}^x+2\cos x)(1+x^2)-(\mathrm{e}^x+2\sin x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$，

则$f'(0)=\frac{(\mathrm{e}^0+2\cos 0)(1+0)-(\mathrm{e}^0+2\sin 0)\times 0}{(1+0)^2}=3$，

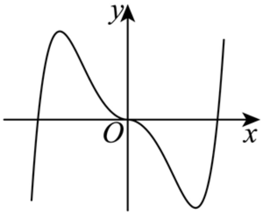
即该切线方程为$y-1=3x$，即$y=3x+1$，

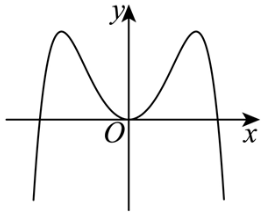
令$x=0$，则$y=1$，令$y=0$，则$x=-\frac{1}{3}$，

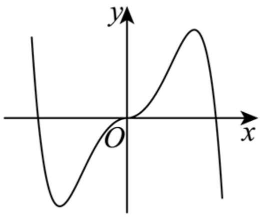
故该切线与两坐标轴所围成的三角形面积$S=\frac{1}{2}\times1\times\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{6}$.

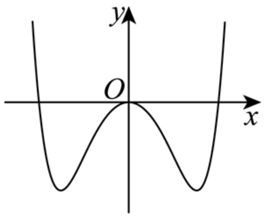
故选：A.

7. 函数$f\left(x\right)=-x^2+\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)\sin x$在区间$[-2.8,2.8]$的大致图像为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】B

【解析】

【分析】利用函数的奇偶性可排除A、C，代入$x=1$可得$f\left(1\right)>0$，可排除D.

【详解】$f\left(-x\right)=-x^2+\left(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x\right)\sin\left(-x\right)=-x^2+\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)\sin x=f\left(x\right)$,

又函数定义域为$\left[-2.8,2.8\right]$，故该函数为偶函数，可排除A、C，

又$f\left(1\right)=-1+\left(\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\sin1>-1+\left(\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\mathrm{e}}{2}-1-\frac{1}{2\mathrm{e}}>\frac{1}{4}-\frac{1}{2\mathrm{e}}>0$,

故可排除D.

故选：B.

8. 已知$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，则$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$（　　）

A. $2\sqrt{3}+1$　　B. $2\sqrt{3}-1$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $1-\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】先将$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$弦化切求得$\tan\alpha$，再根据两角和的正切公式即可求解.

【详解】因为 $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，

所以 $\dfrac{1}{1-\tan\alpha}=\sqrt{3}$，$\Rightarrow \tan\alpha=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=2\sqrt{3}-1$，

故选：B.

9. 已知向量 $\vec{a}=(x+1,x),\vec{b}=(x,2)$，则（　　）

A. “$x=-3$”是“$\vec{a}\perp\vec{b}$”的必要条件

B. “$x=-3$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的必要条件

C. “$x=0$”是“$\vec{a}\perp\vec{b}$”的充分条件

D. “$x=-1+\sqrt{3}$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的充分条件

【答案】C

【解析】

【分析】根据向量垂直和平行的坐标表示即可得到方程，解出即可.

【详解】对 A，当 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 时，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

所以 $x\cdot(x+1)+2x=0$，解得 $x=0$ 或 -3，即必要性不成立，故 A 错误；

对 C，当 $x=0$ 时，$\vec{a}=(1,0),\vec{b}=(0,2)$，故 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

所以 $\vec{a}\perp\vec{b}$，即充分性成立，故 C 正确；

对 B，当 $\vec{a}//\vec{b}$ 时，则 $2(x+1)=x^2$，解得 $x=1\pm\sqrt{3}$，即必要性不成立，故 B 错误；

对 D，当 $x=-1+\sqrt{3}$ 时，不满足 $2(x+1)=x^2$，所以 $\vec{a}//\vec{b}$ 不成立，即充分性不立，故 D 错误.

故选：C.

10. 设 α、β 是两个平面，m、n 是两条直线，且 $\alpha\cap\beta=m$. 下列四个命题：

①若 $m//n$，则 $n//\alpha$ 或 $n//\beta$　　②若 $m\perp n$，则 $n\perp\alpha,n\perp\beta$

③若 $n//\alpha$，且 $n//\beta$，则 $m//n$　　④若 n 与 α 和 β 所成的角相等，则 $m\perp n$

其中所有真命题的编号是（　　）

A. ①③　　B. ②④　　C. ①②③　　D. ①③④

【答案】A

【解析】

【分析】根据线面平行的判定定理即可判断①；举反例即可判断②④；根据线面平行的性质即可判断③.

【详解】对①，当$n \subset \alpha$，因为$m // n$，$m \subset \beta$，则$n // \beta$，

当$n \subset \beta$，因为$m // n$，$m \subset \alpha$，则$n // \alpha$，

当n既不在α也不在β内，因为$m // n$，$m \subset \alpha, m \subset \beta$，则$n // \alpha$且$n // \beta$，故①正确；

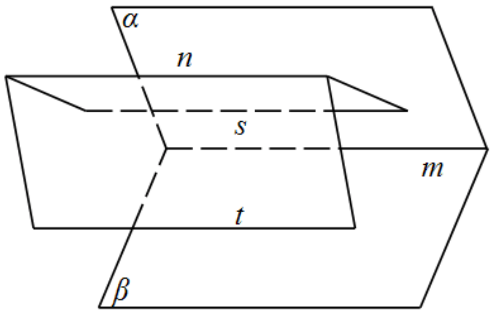
对②，若$m \perp n$，则n与α, β不一定垂直，故②错误；

对③，过直线n分别作两平面与α, β分别相交于直线s和直线t，

因为$n // \alpha$，过直线n的平面与平面α的交线为直线s，则根据线面平行的性质定理知$n // s$，

同理可得$n // t$，则$s // t$，因为$s \not\subset$平面β，$t \subset$平面β，则$s //$平面β，

因为$s \subset$平面α，$\alpha \cap \beta = m$，则$s // m$，又因为$n // s$，则$m // n$，故③正确；



对④，若$\alpha \cap \beta = m, n$与α和β所成的角相等，如果$n // \alpha, n // \beta$，则$m // n$，故④错误；

综上只有①③正确，

故选：A.

11. 在$\triangle ABC$中内角A, B, C所对边分别为a, b, c，若$B = \frac{\pi}{3}$，$b^2 = \frac{9}{4}ac$，则$\sin A + \sin C =$（　　）

A. $\frac{3}{2}$　　　　B. $\sqrt{2}$　　　　C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$　　　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用正弦定理得$\sin A \sin C = \frac{1}{3}$，再利用余弦定理有$a^2 + c^2 = \frac{13}{4}ac$，再利用正弦定理得到$\sin^2 A + \sin^2 C$的值，最后代入计算即可.

【详解】因为$B = \frac{\pi}{3}, b^2 = \frac{9}{4}ac$，则由正弦定理得$\sin A \sin C = \frac{4}{9}\sin^2 B = \frac{1}{3}$.

由余弦定理可得:$b^2 = a^2 + c^2 - ac = \frac{9}{4}ac$，

即: $a^2+c^2=\frac{13}{4}ac$，根据正弦定理得 $\sin^2 A+\sin^2 C=\frac{13}{4}\sin A\sin C=\frac{13}{12}$，

所以 $(\sin A+\sin C)^2=\sin^2 A+\sin^2 C+2\sin A\sin C=\frac{7}{4}$，

因为 A,C 为三角形内角，则 $\sin A+\sin C>0$，则 $\sin A+\sin C=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

故选：C.

12. 已知 b 是 a,c 的等差中项，直线 $ax+by+c=0$ 与圆 $x^2+y^2+4y-1=0$ 交于 A,B 两点，则 $|AB|$ 的最小值为（　　）

A. 2　　　　B. 3　　　　C. 4　　　　D. $2\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】结合等差数列性质将 c 代换，求出直线恒过的定点，采用数形结合法即可求解.

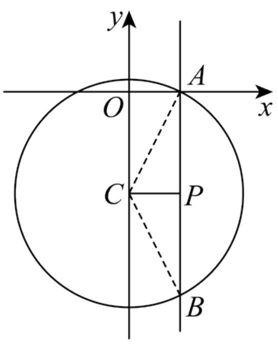
【详解】因为 a,b,c 成等差数列，所以 $2b=a+c$，$c=2b-a$，代入直线方程 $ax+by+c=0$ 得

$ax+by+2b-a=0$，即 $a(x-1)+b(y+2)=0$，令 $\begin{cases}x-1=0\\y+2=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$，

故直线恒过 $(1,-2)$，设 $P(1,-2)$，圆化为标准方程得：$C:x^2+(y+2)^2=5$，

设圆心为 C，画出直线与圆的图形，由图可知，当 $PC\perp AB$ 时，$|AB|$ 最小，

$|PC|=1,|AC|=|r|=\sqrt{5}$，此时 $|AB|=2|AP|=2\sqrt{AC^2-PC^2}=2\sqrt{5-1}=4$.



故选：C

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\left(\frac{1}{3}+x\right)^{10}$ 的展开式中，各项系数的最大值是______.

【答案】5

【解析】

【分析】先设展开式中第 $r+1$ 项系数最大，则根据通项公式有 $\begin{cases} C_{10}^{r}\left(\frac{1}{3}\right)^{10-r} \geq C_{10}^{r+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{9-r} \\ C_{10}^{r}\left(\frac{1}{3}\right)^{10-r} \geq C_{10}^{r-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{11-r} \end{cases}$，进而求出 r 即可求解.

【详解】由题展开式通项公式为 $T_{r+1}=C_{10}^{r}\left(\frac{1}{3}\right)^{10-r} x^{r}$，$0 \leq r \leq 10$ 且 $r \in \mathbf{Z}$，

设展开式中第 $r+1$ 项系数最大，则 $\begin{cases} C_{10}^{r}\left(\frac{1}{3}\right)^{10-r} \geq C_{10}^{r+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{9-r} \\ C_{10}^{r}\left(\frac{1}{3}\right)^{10-r} \geq C_{10}^{r-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{11-r} \end{cases}$，

$\Rightarrow \begin{cases} r \geq \frac{29}{4} \\ r \leq \frac{33}{4} \end{cases}$，即 $\frac{29}{4} \leq r \leq \frac{33}{4}$，又 $r \in \mathbf{Z}$，故 $r=8$，

所以展开式中系数最大的项是第 9 项，且该项系数为 $C_{10}^{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}=5$.

故答案为：5.

14. 已知甲、乙两个圆台上、下底面的半径均为 r_1 和 r_2，母线长分别为 $2\left(r_2-r_1\right)$ 和 $3\left(r_2-r_1\right)$，则两个圆台的体积之比 $\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=$______.

【答案】$\frac{\sqrt{6}}{4}$

【解析】

【分析】先根据已知条件和圆台结构特征分别求出两圆台的高，再根据圆台的体积公式直接代入计算即可得解.

【详解】由题可得两个圆台的高分别为 $h_{甲}=\sqrt{\left[2\left(r_1-r_2\right)\right]^2-\left(r_1-r_2\right)^2}=\sqrt{3}\left(r_1-r_2\right)$，

$h_{乙}=\sqrt{\left[3\left(r_1-r_2\right)\right]^2-\left(r_1-r_2\right)^2}=2\sqrt{2}\left(r_1-r_2\right)$，

所以 $\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=\frac{\frac{1}{3}\left(S_2+S_1+\sqrt{S_2S_1}\right)h_{甲}}{\frac{1}{3}\left(S_2+S_1+\sqrt{S_2S_1}\right)h_{乙}}=\frac{h_{甲}}{h_{乙}}=\frac{\sqrt{3}\left(r_1-r_2\right)}{2\sqrt{2}\left(r_1-r_2\right)}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

15. 已知$a>1$，$\dfrac{1}{\log_8 a}-\dfrac{1}{\log_a 4}=-\dfrac{5}{2}$，则$a=$______.

【答案】64

【解析】

【分析】将$\log_8 a,\log_a 4$利用换底公式转化成$\log_2 a$来表示即可求解.

【详解】由题$\dfrac{1}{\log_8 a}-\dfrac{1}{\log_a 4}=\dfrac{3}{\log_2 a}-\dfrac{1}{2}\log_2 a=-\dfrac{5}{2}$，整理得$\left(\log_2 a\right)^2-5\log_2 a-6=0$，

$\Rightarrow \log_2 a=-1$或$\log_2 a=6$，又$a>1$，

所以$\log_2 a=6=\log_2 2^6$，故$a=2^6=64$

故答案为：64.

16. 有6个相同的球，分别标有数字1、2、3、4、5、6，从中不放回地随机抽取3次，每次取1个球.记m为前两次取出的球上数字的平均值，n为取出的三个球上数字的平均值，则m与n差的绝对值不超过$\frac{1}{2}$的概率是______.

【答案】$\dfrac{7}{15}$

【解析】

【分析】根据排列可求基本事件的总数，设前两个球的号码为a,b，第三个球的号码为c，则$a+b-3\le 2c\le a+b+3$，就c的不同取值分类讨论后可求随机事件的概率.

【详解】从6个不同的球中不放回地抽取3次，共有$A_6^3=120$种，

设前两个球的号码为a,b，第三个球的号码为c，则$\left|\dfrac{a+b+c}{3}-\dfrac{a+b}{2}\right|\le\dfrac{1}{2}$，

故$\left|2c-(a+b)\right|\le 3$，故$-3\le 2c-(a+b)\le 3$，

故$a+b-3\le 2c\le a+b+3$，

若$c=1$，则$a+b\le 5$，则(a,b)为：$(2,3),(3,2)$，故有2种，

若$c=2$，则$1\le a+b\le 7$，则(a,b)为：$(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(3,4)$，

$(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(4,3)$，故有10种，