

湖南省长沙市广益实验中学 2023-2024 学年高三最后一模数学试题

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚, 将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出, 确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁, 不要折暴、不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$, 若 $f(a) > f(b)$, 则下列不等关系正确的是 ()

- A. $\frac{1}{a^2+1} < \frac{1}{b^2+1}$ B. $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$
- C. $a^2 < ab$ D. $\ln(a^2+1) > \ln(b^2+1)$

2. $\frac{2+i}{1-i} = (\quad)$

- A. $\frac{1+3i}{2}$ B. $\frac{3+i}{2}$ C. $\frac{3-i}{2}$ D. $\frac{-1+3i}{2}$

3. 将函数 $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{6})$ 的图像向右平移 $m(m > 0)$ 个单位长度, 再将图像上各点的横坐标伸长到原来的 6 倍 (纵坐标不变), 得到函数 $g(x)$ 的图像, 若 $g(x)$ 为奇函数, 则 m 的最小值为 ()

- A. $\frac{\pi}{9}$ B. $\frac{2\pi}{9}$ C. $\frac{\pi}{18}$ D. $\frac{\pi}{24}$

4. 我国古代数学巨著《九章算术》中, 有如下问题: “今有女子善织, 日自倍, 五日织五尺, 问日织几何?” 这个问题用今天的白话叙述为: 有一位善于织布的女子, 每天织的布都是前一天的 2 倍, 已知她 5 天共织布 5 尺, 问这位女子每天分别织布多少? 根据上述问题的已知条件, 若该女子共织布 $\frac{35}{31}$ 尺, 则这位女子织布的天数是 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 1

5. 已知直线 m, n 和平面 α , 若 $m \perp \alpha$, 则“ $m \perp n$ ”是“ $n // \alpha$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 不充分不必要

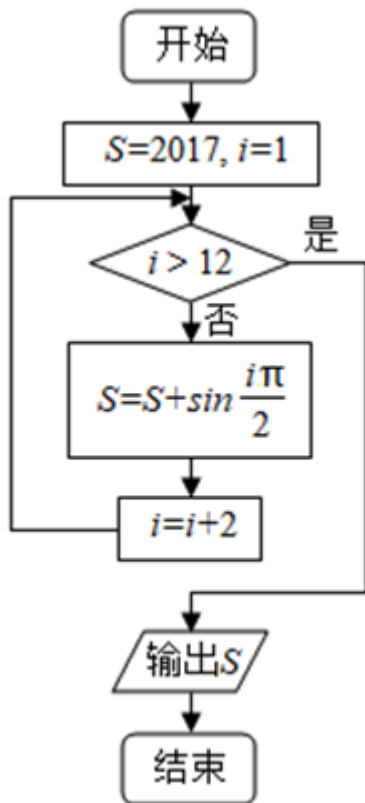
6. 已知双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线为 l , 圆 $C: (x-c)^2 + y^2 = 4$ 与 l 相切于点 A , 若 $\triangle AF_1F_2$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 则双曲线 Γ 的离心率为 ()

- A. 2 B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{\sqrt{21}}{3}$

7. 已知等边 $\triangle ABC$ 内接于圆 $\tau: x^2+y^2=1$, 且 P 是圆 τ 上一点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最大值是 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. 2

8. 运行如图程序, 则输出的 S 的值为 ()



- A. 0 B. 1 C. 2018 D. 2017

9. 将函数 $y = \sin 2x$ 的图像向左平移 $\varphi(\varphi > 0)$ 个单位得到函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图像, 则 φ 的最小值为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{12}$ C. $\frac{11\pi}{12}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

10. 设集合 A 、 B 是全集 U 的两个子集, 则“ $A \subseteq B$ ”是“ $A \cap \complement_U B = \emptyset$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

11. 设 $a = \log_3 3$, $b = \log_{\frac{1}{3}} 7$, $c = 3^{0.7}$, 则 a , b , c 的大小关系是 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $b < c < a$ D. $b < a < c$

12. $(x+1)(2x+1)(3x+1)\cdots(nx+1)(n \in N^*)$ 的展开式中 x 的一次项系数为 ()

- A. C_n^3 B. C_{n+1}^2 C. C_n^{n-1} D. $\frac{1}{2}C_{n+1}^3$

二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。

13.

五声音阶是中国古乐基本音阶，故有成语“五音不全”.中国古乐中的五声音阶依次为：宫、商、角、徵、羽，如果把这五个音阶全用上，排成一个五个音阶的音序，且要求宫、羽两音阶不相邻且在角音阶的同侧，可排成_____种不同的音序.

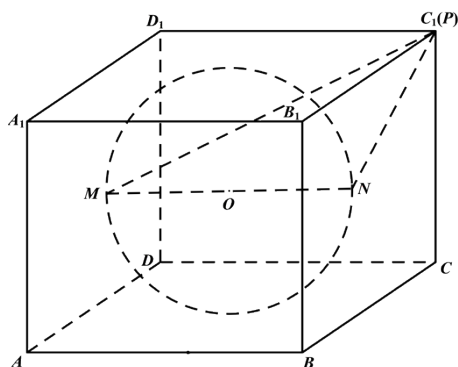
14. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c .若 $\cos B + \sqrt{3} \sin B - 2 = 0$ ；且 $b = 1$ ，则 $\triangle ABC$ 周长的范围为_____.

15. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数，且 $3a_2, \frac{1}{2}a_3, 4a_1$ 成等差数列，则

$$\log_2(a_3 + a_4) - \log_2(a_4 + a_5) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

16. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2， MN 是它的内切球的一条弦(我们把球面上任意两点之间的线段称为球的弦)，

P 为正方体表面上的动点，当弦 MN 的长度最大时， $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的取值范围是_____.



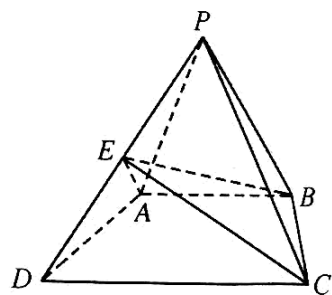
三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c .已知 $c = 4\sqrt{2}$ ， $\sin \frac{C}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1) 若 $a = 1$ ，求 $\sin A$ ；

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积 S 的最大值.

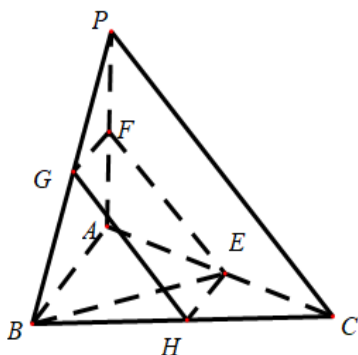
18. (12分) 如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为等腰梯形， $AB \parallel CD, CD = 2AB = 4, AD = \sqrt{2}$ ， $\triangle PAB$ 为等腰直角三角形， $PA = PB$ ，平面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$ ， E 为 PD 的中点.



(1) 求证： $AE \parallel$ 平面 PBC ；

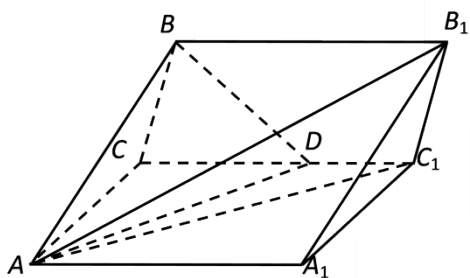
(2) 若平面 EBC 与平面 PAD 的交线为 l ，求二面角 $P-l-B$ 的正弦值.

19. (12分) 如图, 已知在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , E, F, G 分别为 AC, PA, PB 的中点, 且 $AC = 2BE$.



- (1) 求证: $PB \perp BC$;
 (2) 设平面 EFG 与 BC 交于点 H , 求证: H 为 BC 的中点.

20. (12分) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 已知四边形 AA_1C_1C 为矩形, $AA_1 = 6$, $AB = AC = 4$, $\angle BAC = \angle BAA_1 = 60^\circ$, $\angle A_1AC$ 的角平分线 AD 交 CC_1 于 D .



- (1) 求证: 平面 $BAD \perp$ 平面 AA_1C_1C ;
 (2) 求二面角 $A-B_1C_1-A_1$ 的余弦值.

21. (12分) 对于非负整数集合 S (非空), 若对任意 $x, y \in S$, 或者 $x + y \in S$, 或者 $|x - y| \in S$, 则称 S 为一个好集合. 以下记 $|S|$ 为 S 的元素个数.

- (1) 给出所有的元素均小于 3 的好集合. (给出结论即可)
 (2) 求出所有满足 $|S| = 4$ 的好集合. (同时说明理由)
 (3) 若好集合 S 满足 $|S| = 2019$, 求证: S 中存在元素 m , 使得 S 中所有元素均为 m 的整数倍.

22. (10分) 在极坐标系中, 曲线 C 的方程为 $\rho \cos^2 \theta = a \sin \theta (a > 0)$, 以极点为原点, 极轴所在直线为 x

轴建立直角坐标，直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}), l \text{ 与 } C \text{ 交于 } M, N \text{ 两点.}$$

(1) 写出曲线 C 的直角坐标方程和直线 l 的普通方程;

(2) 设点 $P(2, -1)$; 若 $|PM|$ 、 $|MN|$ 、 $|PN|$ 成等比数列，求 a 的值

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

利用函数的单调性得到 a, b 的大小关系，再利用不等式的性质，即可得答案.

【详解】

$\because f(x)$ 在 R 上单调递增，且 $f(a) > f(b)$ ， $\therefore a > b$.

$\because a, b$ 的符号无法判断，故 a^2 与 b^2 ， a^2 与 ab 的大小不确定，

对 A，当 $a=1, b=-1$ 时， $\frac{1}{a^2+1} = \frac{1}{b^2+1}$ ，故 A 错误；

对 C，当 $a=1, b=-1$ 时， $a^2=1, ab=-1$ ，故 C 错误；

对 D，当 $a=1, b=-1$ 时， $\ln(a^2+1) = \ln(b^2+1)$ ，故 D 错误；

对 B，对 $a > b$ ，则 $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$ ，故 B 正确.

故选：B.

【点睛】

本题考查分段函数的单调性、不等式性质的运用，考查函数与方程思想、转化与化归思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力，属于基础题.

2、A

【解析】

直接利用复数代数形式的乘除运算化简得答案.

【详解】

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+3i+i^2}{2} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

本题正确选项: A

【点睛】

本题考查复数代数形式的乘除运算, 是基础的计算题.

3、C

【解析】

根据三角函数的变换规则表示出 $g(x)$, 根据 $g(x)$ 是奇函数, 可得 m 的取值, 再求其最小值.

【详解】

解: 由题意知, 将函数 $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{6})$ 的图像向右平移 $m(m > 0)$ 个单位长度, 得 $y = \sin\left[3\left(x - m\right) + \frac{\pi}{6}\right]$, 再将

$y = \sin\left[3x - 3m + \frac{\pi}{6}\right]$ 图像上各点的横坐标伸长到原来的 6 倍 (纵坐标不变), 得到函数 $g(x)$ 的图像,

$$\therefore g(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x - 3m + \frac{\pi}{6}\right),$$

因为 $g(x)$ 是奇函数,

$$\text{所以 } -3m + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in Z, \text{ 解得 } m = \frac{\pi}{18} - \frac{k\pi}{3}, k \in Z,$$

因为 $m > 0$, 所以 m 的最小值为 $\frac{\pi}{18}$.

故选: C

【点睛】

本题考查三角函数的变换以及三角函数的性质, 属于基础题.

4、B

【解析】

将问题转化为等比数列问题, 最终变为求解等比数列基本量的问题.

【详解】

根据实际问题可以转化为等比数列问题,

在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 公比 $q = 2$, 前 n 项和为 S_n , $S_5 = 5$, $S_m = \frac{35}{31}$, 求 m 的值.

因为 $S_5 = \frac{a_1(1-2^5)}{1-2} = 5$, 解得 $a_1 = \frac{5}{31}$, $S_m = \frac{\frac{5}{31}(1-2^m)}{1-2} = \frac{35}{31}$, 解得 $m = 3$. 故选 B.

【点睛】

本题考查等比数列的实际应用, 难度较易. 熟悉等比数列中基本量的计算, 对于解决实际问题很有帮助.

5、B

【解析】

由线面关系可知 $m \perp n$, 不能确定 n 与平面 α 的关系, 若 $n // \alpha$ 一定可得 $m \perp n$, 即可求出答案.

【详解】

Q $m \perp \alpha, m \perp n$,

不能确定 $n \subset \alpha$ 还是 $n \not\subset \alpha$,

$\therefore m \perp n \not\Rightarrow n // \alpha$,

当 $n // \alpha$ 时, 存在 $a \subset \alpha, n // a$,

由 $m \perp \alpha \Rightarrow m \perp a$,

又 $n // a$, 可得 $m \perp n$,

所以“ $m \perp n$ ”是“ $n // \alpha$ ”的必要不充分条件,

故选: B

【点睛】

本题主要考查了必要不充分条件, 线面垂直, 线线垂直的判定, 属于中档题.

6、D

【解析】

由圆 $C: (x-c)^2 + y^2 = 4$ 与 l 相切可知, 圆心 $C(c, 0)$ 到 l 的距离为 2, 即 $b = 2$. 又 $S_{\Delta AF_1F_2} = 2S_{\Delta AOF_2} = ab = 2\sqrt{3}$, 由此求出 a 的值, 利用离心率公式, 求出 e .

【详解】

由题意得 $b = 2$, $S_{\Delta AF_1F_2} = ab = 2\sqrt{3}$,

$$\therefore a = \sqrt{3}, \therefore e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

故选: D.

【点睛】

本题考查了双曲线的几何性质, 直线与圆相切的性质, 离心率的求法, 属于中档题.

7、D

【解析】

如图所示建立直角坐标系，设 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ ，则 $\vec{PA} \cdot (\vec{PB} + \vec{PC}) = 1 - \cos\theta$ ，计算得到答案.

【详解】

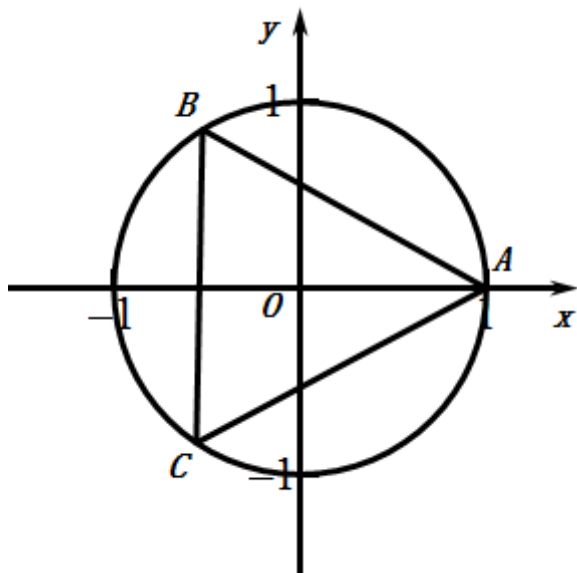
如图所示建立直角坐标系，则 $A(1, 0)$ ， $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，设 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ ，

$$\text{则 } \vec{PA} \cdot (\vec{PB} + \vec{PC}) = (1 - \cos\theta, -\sin\theta) \cdot (-1 - 2\cos\theta, -2\sin\theta)$$

$$= (1 - \cos\theta)(-1 - 2\cos\theta) + 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 + 2\sin^2\theta = 1 - \cos\theta \leq 2.$$

当 $\theta = -\pi$ ，即 $P(-1, 0)$ 时等号成立.

故选：D.



【点睛】

本题考查了向量的计算，建立直角坐标系利用坐标计算是解题的关键.

8、D

【解析】

依次运行程序框图给出的程序可得

第一次： $S = 2017 + \sin \frac{\pi}{2} = 2018, i = 3$ ，不满足条件；

第二次： $S = 2018 + \sin \frac{3\pi}{2} = 2018 - 1 = 2017, i = 5$ ，不满足条件；

第三次： $S = 2017 + \sin \frac{5\pi}{2} = 2018, i = 7$ ，不满足条件；

第四次： $S = 2018 + \sin \frac{7\pi}{2} = 2018 - 1 = 2017, i = 9$ ，不满足条件；

第五次: $S = 2017 + \sin \frac{9\pi}{2} = 2018, i = 11$, 不满足条件;

第六次: $S = 2018 + \sin \frac{11\pi}{2} = 2018 - 1 = 2017, i = 13$, 满足条件, 退出循环. 输出 1. 选 D.

9、B

【解析】

根据三角函数的平移求出函数的解析式, 结合三角函数的性质进行求解即可.

【详解】

将函数 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\varphi (\varphi > 0)$ 个单位,

得到 $y = \sin 2(x + \varphi) = \sin(2x + 2\varphi)$,

此时与函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图象重合,

则 $2\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$, 即 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{12}$, $k \in Z$,

\therefore 当 $k = 0$ 时, φ 取得最小值为 $\varphi = \frac{\pi}{12}$,

故选: B.

【点睛】

本题主要考查三角函数的图象和性质, 利用三角函数的平移关系求出解析式是解决本题的关键.

10、C

【解析】

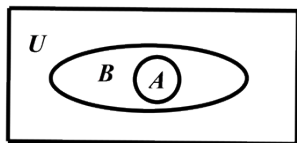
作出韦恩图, 数形结合, 即可得出结论.

【详解】

如图所示, $A \subseteq B \Rightarrow A \cap \complement B = \emptyset$,

同时 $A \cap \complement B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$.

故选:C.



【点睛】

本题考查集合关系及充要条件, 注意数形结合方法的应用, 属于基础题.

11、D

【解析】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/818015044027006062>