6.4.3　余弦定理、正弦定理

第1课时　余弦定理

自主预习·新知导学

合作探究·释疑解惑

易　错　辨　析

自主预习·新知导学

一、余弦定理

1.已知一个三角形的两条边及其夹角,这个三角形的大小、形状能完全确定吗?

提示:根据三角形全等的判断方法可知,这个三角形的大小、形状是完全确定的.

2.在$\triangle ABC$中,三个角A,B,C所对的边分别是a,b,c,如果已知边a,b和角C,那么从向量的角度考虑,边c的长度可视为什么?向量$\vec{AB}$如何用已知边所对应的向量表示?如何求出$|\vec{AB}|$?边c的长度用边a,b和角C如何表示?

提示:边c的长度可视为$|\vec{AB}|$;$\vec{AB}=\vec{CB}-\vec{CA}$;通过向量的数量积求$|\vec{AB}|$;$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

3.(1)文字语言:三角形中任何一边的平方,等于其他两边平方的和____这两边与它们夹角的____的积的两倍.

(2)符号语言:

$a^2=$________________,

$b^2=$________________,

$c^2=$________________.

4.在$\triangle ABC$中,$AB=1$,$BC=2$,$B=60°$,则$AC=$____________.

解析:由余弦定理,得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$

$=1+4-2\times1\times2\times\frac{1}{2}=3$.故 $AC=\sqrt{3}$.

答案:$\sqrt{3}$

二、余弦定理的推论

1.在$\triangle ABC$中,三个角A,B,C所对的边分别是a,b,c,已知三条边,如何求出其三个内角?

提示: 可将余弦定理中的三个公式变形为 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$求解.

2.余弦定理的推论:

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

3.在$\triangle ABC$中,角A,B,C的对边分别是a,b,c.若$a=6$,$b=8$, $c=5$,则角B为(　　)

A.锐角　　B.直角

C.钝角　　D.不确定

解析:由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{5^2+6^2-8^2}{2\times5\times6}=-\frac{1}{20}<0$.

因为 $0°<B<180°$,所以角 B 为钝角.

答案:C

三、解三角形

(1)一般地,三角形的三个角________和它们的对边________叫做三角形的元素.

(2)已知三角形的几个元素求__________的过程叫做解三角形.

合作探究·释疑解惑

探究一

探究二

探究三

探究一 已知两边及一角解三角形

【例1】 在$\triangle ABC$中,三个角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知$b=3,c=3\sqrt{3}$,$A=30°$,求a.

分析:已知两边及其夹角,利用余弦定理求a.

解:由余弦定理,得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=3^2+(3\sqrt{3})^2-2\times3\times3\sqrt{3}\cos 30°=9$,故 $a=3$.

延伸探究

1.本例中将条件“$A=30°$”改为“$B=30°$”,其他条件不变,求a.

解:把 $b=3,c=3\sqrt{3},B=30°$ 代入 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,可得

$3^2=a^2+(3\sqrt{3})^2-2a\cdot 3\sqrt{3}\cos 30°$,即 $a^2-9a+18=0$,解得 $a=6$ 或 $a=3$.

2.本例中将条件“$A=30°$”改为“$C=60°$”,其他条件不变,求a.

解:把 $b=3,c=3\sqrt{3},C=60°$ 代入 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,

可得$(3\sqrt{3})^2=a^2+3^2-2a\cdot 3\cos 60°$,即 $a^2-3a-18=0$,

解得 $a=6$ 或 $a=-3$(舍去),故 $a=6$.

反思感悟

已知三角形的两边及一角解三角形的方法:

已知三角形的两边及一角解三角形,必须先判断该角是给出两边的夹角,还是其中一边的对角.若是给出两边的夹角,则可以由余弦定理求第三边;若是给出两边中一边的对角,则可以利用余弦定理建立一元二次方程,解方程求出第三条边.

【变式训练 1】 (1)在$\triangle ABC$中,$\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$BC=1$,$AC=5$,则$AB$等于(   )

A.$4\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{30}$　　C.$\sqrt{29}$　　D.$2\sqrt{5}$

(2)在$\triangle ABC$中,$\cos A=\frac{3}{5}$,$a=4$,$b=3$,则$c=$________.

解析:(1)$\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}-1=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=-\frac{3}{5}$,在$\triangle ABC$中,由余弦定理$AB^2=CA^2+CB^2-2CA\cdot CB\cos C$,得$AB^2=25+1-2\times5\times1\times\left(-\frac{3}{5}\right)=32$,故$AB=4\sqrt{2}$.

(2)由余弦定理,得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,即$16=9+c^2-6\times\frac{3}{5}c$,整理得$5c^2-18c-35=0$,解得$c=5$或$c=-\frac{7}{5}$(舍去),故$c=5$.

答案:(1)A　(2)5