

北京市东直门中学 2023-2024 学年度第二学期 6 月学情调研

高一数学

2024.06

命题人：王保国 审题人：盛晓艳

考试时间：120 分钟 总分：150 分

班级：

姓名：

学号：

一、选择题：（共 12 小题，每小题 4 分，共 48 分）

1. 已知向量 $\vec{a} = (x, 2), \vec{b} = (3, -1)$. 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $x =$ ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. -3 D. -6

2. $\sin 72^\circ \cos 42^\circ - \cos 72^\circ \sin 42^\circ =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 要得到函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象，只要将函数 $y = \sin 2x$ 的图象 ()

- A. 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度 B. 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度
C. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度 D. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

4. 在复平面内，复数 $i^2(1-i)$ 对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

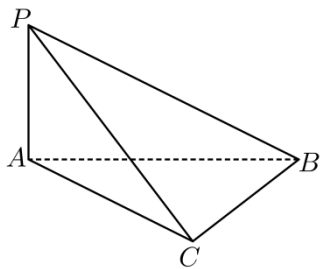
5. 设 l 是一条直线， α, β 是两个平面，下列结论正确的是 ()

- A. 若 $l \parallel \alpha, l \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$ B. 若 $\alpha \perp \beta, l \parallel \alpha$, 则 $l \perp \beta$
C. 若 $l \parallel \alpha, l \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$ D. 若 $\alpha \perp \beta, l \perp \alpha$, 则 $l \parallel \beta$

6. 已知 A, B, C, D 是平面内四个不同的点，则“ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ”是“四边形 $ABCD$ 为平行四边形”的 ()

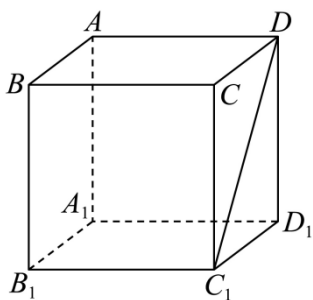
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 如图， $PA \perp$ 平面 ABC ， $\triangle ABC$ 中， $BC \perp AC$ ，则 $\triangle PBC$ 是 ()



- A. 直角三角形
B. 锐角三角形
C. 钝角三角形
D. 以上都有可能

8. 如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，与直线 DC_1 互为异面直线的是（ ）



- A. CD
B. AB_1
C. CD_1
D. A_1D_1

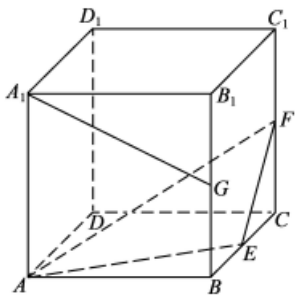
9. 已知正四棱锥 $S - ABCD$ ，底面边长是 2，体积是 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，那么这个四棱锥的侧棱长为（ ）

- A. $\sqrt{3}$
B. 2
C. $\sqrt{5}$
D. $2\sqrt{2}$

10. 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 为非零向量， $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则“ $\vec{a}, \vec{b}$ 夹角为钝角”是“ $|\vec{a} + \vec{b}| < \sqrt{2}|\vec{a}|$ ”的（ ）

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

11. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2， E, F, G 分别为 BC, CC_1, BB_1 的中点，则下列结论中正确的是（ ）



- ①直线 D_1D 与直线 AF 垂直；
②直线 A_1G 与平面 AEF 平行；
③点 C 与点 G 到平面 AEF 的距离相等；
④平面 AEF 截正方体所得的截面面积为 $\frac{9}{2}$ 。

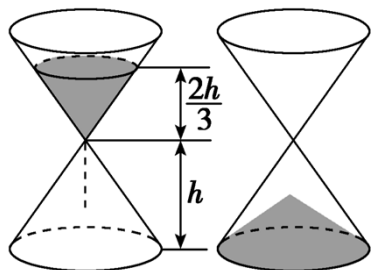
A. ①②

B. ②③

C. ②④

D. ③④

12. 沙漏是古代的一种计时装置，它由两个形状完全相同的容器和一个狭窄的连接管道组成，开始时细沙全部在上部容器中，利用细沙全部流到下部容器所需要的时间进行计时.如图，某沙漏由上、下两个圆锥组成.这两个圆锥的底面直径和高分别相等，细沙全部在上部时，其高度为圆锥高度（ h ）的 $\frac{2}{3}$ （细管长度忽略不计）.假设细沙全部漏入下部后，恰好堆成一个盖住沙漏底部的圆锥形沙堆.这个沙堆的高与圆锥的高 h 的比值为（ ）

A. $\frac{8}{27}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

二、填空题：（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

13. 函数 $f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的初始相位为_____.

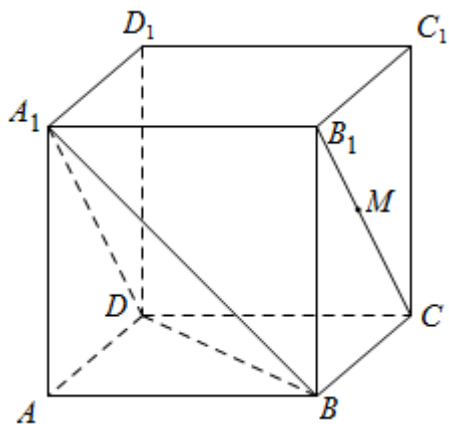
14. 已知复数 $z_1 = 1 - i$ ， $z_2 = 2 + i$ ，那么 $z_1 \cdot z_2 =$ _____.

15. 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 均为单位向量，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$ ，那么 $|\vec{a} + 2\vec{b}| =$ _____.

16. 已知在 $\triangle ABC$ 中， $a = \sqrt{6}$ ， $b = 3\sqrt{2}$ ， $A = 30^\circ$ ，则 $B =$ _____.

17. 已知 l, m 是两条不同的直线， α, β 是两个不同的平面，给出下列四个论断：① $l \parallel m$ ，② $\alpha \parallel \beta$ ，③ $m \perp \alpha$ ，④ $l \perp \beta$. 以其中的两个论断作为命题的条件， $l \perp \alpha$ 作为命题的结论，写出一个真命题：_____.

18. 如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 为线段 B_1C 上异于 B_1, C 的动点，则下列四个命题：



① $\triangle A_1DB$ 是等边三角形；

② 平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 A_1BD ；

③设 $CM = x$ ，则三棱锥 $A_1 - ADM$ 的体积随着 x 增大先减少后增大；

④连接 D_1M ，总有 $D_1M \parallel$ 平面 A_1BD 。

其中正确的命题是_____。

三、解答题：（解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤，共 6 道题，共 72 分）

19. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $b \sin A = a \sin(B + \frac{\pi}{3})$ 。

（I）求角 B 的大小；

（II）若 $a = 2$ ， $b = \sqrt{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

20. 已知向量 $\vec{a} = (-1, 3)$, $\vec{b} = (1, 2)$ 。

（1）求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ；

（2）求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的大小；

（3）求 $|2\vec{a} - \vec{b}|$ 。

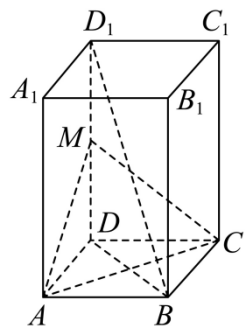
21. 已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ， $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ 。

（1）求 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{3})$ 的值；

（2）求 $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{3})$ 的值；

（3）在平面直角坐标系 xOy 中，以 Ox 为始边，已知角 β 的终边与角 α 的终边关于 y 轴对称，求 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值。

22. 如图，在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = 1$ ， $AA_1 = 2$ ， M 是 DD_1 的中点。



（1）求证： $BD_1 \parallel$ 平面 AMC ；

（2）证明： $AC \perp BD_1$ ；

（3）求点 D 到平面 MAC 的距离。

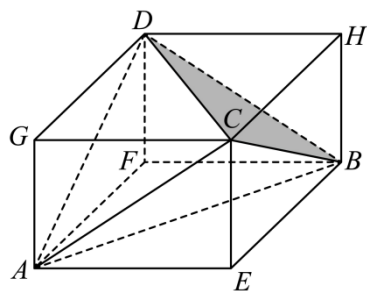
23. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos^2 x - 1$.

(1) 求 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(3) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, m]$ 上有且只有两个零点, 求 m 的取值范围.

24. 如图, 从长、宽、高分别为 a , b , c 的长方体 $AEBF-GCHD$ 中截去部分几何体后, 所得几何体为三棱锥 $A-BCD$.



(1) 求三棱锥 $A-BCD$ 的体积;

(2) 证明: 三棱锥 $A-BCD$ 的每个面都是锐角三角形;

(3) 直接写出一组 a , b , c 的值, 使得二面角 $D-AB-C$ 是直二面角.

北京市东直门中学 2023-2024 学年度第二学期 6 月学情调研

高一数学

2024.06

命题人：王保国 审题人：盛晓艳

考试时间：120 分钟 总分：150 分

班级：

姓名：

学号：

一、选择题：（共 12 小题，每小题 4 分，共 48 分）

1. 已知向量 $\vec{a} = (x, 2), \vec{b} = (3, -1)$. 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $x =$ ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. -3 D. -6

【答案】A

【解析】

【分析】由 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 列方程求解即可.

【详解】因为 $\vec{a} = (x, 2), \vec{b} = (3, -1)$, $\vec{a} \perp \vec{b}$,

所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3x - 2 = 0$, 解得 $x = \frac{2}{3}$.

故选：A

2. $\sin 72^\circ \cos 42^\circ - \cos 72^\circ \sin 42^\circ =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】直接用正弦和差角公式即可得到结果.

【详解】因为 $\sin 72^\circ \cos 42^\circ - \cos 72^\circ \sin 42^\circ = \sin(72^\circ - 42^\circ)$

$= \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

故选:A.

3. 要得到函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象, 只要将函数 $y = \sin 2x$ 的图象 ()

- A. 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度 B. 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度
C. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度 D. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

【答案】D

【解析】

【分析】

由题意利用函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律，得出结论.

【详解】解：只要将函数 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，

即可得到函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象，

故选：D.

【点睛】此题考查函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换，属于基础题

4. 在复平面内，复数 $i^2(1-i)$ 对应的点位于（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】B

【解析】

【分析】化简复数，找出对应点得到答案.

【详解】 $i^2(1-i) = -1+i$ 对应点为 $(-1,1)$ 在第二象限

故答案选 B

【点睛】本题考查了复数的化简，属于简单题.

5. 设 l 是一条直线， α ， β 是两个平面，下列结论正确的是（ ）

- A. 若 $l // \alpha$ ， $l // \beta$ ，则 $\alpha // \beta$ B. 若 $\alpha \perp \beta$ ， $l // \alpha$ ，则 $l \perp \beta$
- C. 若 $l // \alpha$ ， $l \perp \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$ D. 若 $\alpha \perp \beta$ ， $l \perp \alpha$ ，则 $l // \beta$

【答案】C

【解析】

【分析】由线面平行的性质和面面的位置关系，可判断 A；由线面的位置关系可判断 B；由线面平行与垂直的性质定理和面面垂直的判定定理，可判断 C；由面面垂直的性质定理和线面的位置关系可判断 D.

【详解】解： l 是一条直线， α ， β 是两个不同的平面，

若 $l // \alpha$ ， $l // \beta$ ，可得 $\alpha // \beta$ 或 α 、 β 相交，故 A 错误；

若 $\alpha \perp \beta$ ， $l // \alpha$ ，可得 $l // \beta$ 或 $l \subset \beta$ 、 l 与 β 相交，故 B 错误；

若 $l // \alpha$ ，可得过 l 的平面 γ 与 α 的交线 $m // l$ ，由 $l \perp \beta$ ，可得 $m \perp \beta$ ，又 $m \subset \alpha$ ，则 $\alpha \perp \beta$ ，故 C 正确；

若 $\alpha \perp \beta$ ， $l \perp \alpha$ ，可得 $l // \beta$ 或 $l \subset \beta$ ，故 D 错误.

故选：C.

6. 已知 A, B, C, D 是平面内四个不同的点，则“ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ”是“四边形 $ABCD$ 为平行四边形”的 ()

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】

根据必要条件、充分条件的定义即可判断.

【详解】解：由 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 可不一定推出四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

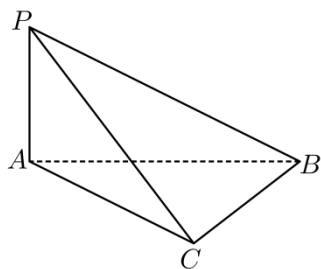
但由四边形 $ABCD$ 为平行四边形一定可得 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，

故“ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ”是“四边形 $ABCD$ 为平行四边形”的必要而不充分条件，

故选：B.

【点睛】此题考查充分条件和必要条件的判断，考查推理能力，属于基础题

7. 如图， $PA \perp$ 平面 ABC ， $\triangle ABC$ 中， $BC \perp AC$ ，则 $\triangle PBC$ 是 ()



A. 直角三角形

B. 锐角三角形

C. 钝角三角形

D. 以上都有可能

【答案】A

【解析】

【分析】由线面垂直判定定理证明 $BC \perp$ 平面 PAC ，再证明 $BC \perp PC$ ，由此判断 $\triangle PBC$ 的形状.

【详解】因为 $PA \perp$ 平面 ABC ， $BC \subset$ 平面 ABC ，

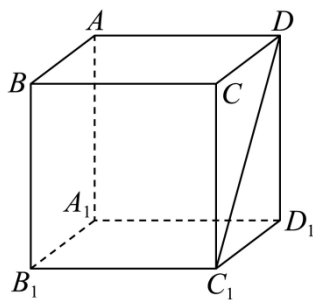
所以 $PA \perp BC$ ，又 $BC \perp AC$ ， $PA \cap AC = A$ ， $PA, AC \subset$ 平面 PAC ，

所以 $BC \perp$ 平面 PAC ，又 $PC \subset$ 平面 PAC ，

所以 $BC \perp PC$ ，故 $\triangle PBC$ 是直角三角形，

故选：A.

8. 如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，与直线 DC_1 互为异面直线的是 ()



- A. CD B. AB_1 C. CD_1 D. A_1D_1

【答案】D

【解析】

【分析】由异面直线的定义对选项一一判断即可得出答案.

【详解】对于选项 A, $DC_1 \cap CD = D$, 故 A 不正确;

对于选项 B, $DC_1 \parallel AB_1$, 故 B 不正确;

对于选项 C, 直线 DC_1 与直线 CD_1 相交, 故 C 不正确;

对于选项 D, 因为直线 DC_1 与直线 A_1D_1 不同在任意一个平面, 所以直线 DC_1 与直线 A_1D_1 是异面直线, 故 D 正确.

故选: D.

9. 已知正四棱锥 $S-ABCD$, 底面边长是 2, 体积是 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 那么这个四棱锥的侧棱长为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】设正四棱锥的高为 h , 由体积是 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 求出 $h = \sqrt{3}$. 利用勾股定理求出侧棱长.

【详解】因为正四棱锥 $S-ABCD$, 底面边长是 2, 所以底面积为 $2 \times 2 = 4$.

设正四棱锥的高为 h , 由 $V = \frac{1}{3} \times 4h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 所以 $h = \sqrt{3}$.

所以侧棱长为 $l = \sqrt{h^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3+2} = \sqrt{5}$.

即侧棱长为 $\sqrt{5}$.

故选: C

10. 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 为非零向量, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 则“ $\vec{a}, \vec{b}$ 夹角为钝角”是“ $|\vec{a} + \vec{b}| < \sqrt{2}|\vec{a}|$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】

【分析】将模的关系平方得到 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ，进而判断即可.

【详解】由 $\left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right| < \sqrt{2} \left| \frac{1}{a} \right|$,

平方得, $\frac{r_2}{a} + 2a \cdot \frac{r}{b} + \frac{r_2}{b} < 2\frac{r_2}{a}$,

即 $2a \cdot b + b^2 < a^2$,

又因为 $\left| \overset{\cdot}{a} \right| = \left| \overset{\cdot}{b} \right|$, 即 $\overset{\cdot}{a}^2 = \overset{\cdot}{b}^2$,

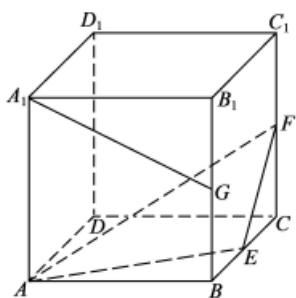
所以 $\overset{\cdot}{a} \cdot \overset{\cdot}{b} < 0$, 所以 $\overset{\cdot}{a}, \overset{\cdot}{b}$ 夹角为钝角或平角,

所以“ $\overset{!}{a}, \overset{!}{b}$ 夹角为钝角”是“ $\left| \overset{!}{a} + \overset{!}{b} \right| < \sqrt{2} \left| \overset{!}{a} \right|$ ”的充分不必要条件.

故选：A

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, E, F, G 分别为 BC, CC_1, BB_1 的中点, 则下列结论中正确的是

()



①直线 D_1D 与直线 AF 垂直;

②直线 A_1G 与平面 AEF 平行;

③点 C 与点 G 到平面 AEF 的距离相等; ④平面 AEF 截正方体所得的截面面积为 $\frac{9}{2}$.

A. ①②

B. ②③

C. ②④

D. ③④

【答案】C

【解析】

【分析】由 $\angle AFC$ 即为直线 AF 与直线 D_1D 所成的角，即可判断①；对于②，连接 AD_1, D_1F, GF ，由线面平行的判定即可判断②；由平面 AEF 不过 CG 的中点即可判断③；先找出截面，再计算面积即可判断④.

【详解】解：对于①，由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 得 $D_1D \parallel CC_1$ ，则 $\angle AFC$ 即为直线 AF 与直线 D_1D 所成的角，

连接 AC ，而 $CC_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ，所以 $CC_1 \perp AC$ ，所以在 $\triangle AFC$ 中，则 $\angle AFC$ 不可能是直角，直线 AF 与直线

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/818070051031006121>