浙江省精诚联盟2024届高三下学期适应性联考数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合$A=\{x\mid x<1\}$，$B=\{y\mid y=\lg x\}$，则$A\cup B=$（　）

A．$\mathbf{R}$　　B．$(0,1)$　　C．$(0,+\infty)$　　D．$(-\infty,1)$

2．$\left(x^2-\dfrac{1}{2x}\right)^3$的展开式的常数项为（　）

A．$-\dfrac{3}{2}$　　B．$\dfrac{3}{4}$　　C．$\dfrac{3}{2}$　　D．4

3．已知复数z满足$|z+2-\mathrm{i}|=0$，其中i是虚数单位，则$\overline{z}\cdot z=$（　）

A．2　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{10}$　　D．5

4．已知某种塑料经自然降解后残留量y与时间t年之间的关系为$y=y_0\cdot \mathrm{e}^{\frac{t}{2}\ln 0.8}$，$y_0$为初始量．则该塑料经自然降解，残留量不超过初始量的50%．至少需要（　）年（精确到年）．（参考数据：$\lg 2\approx 0.301$）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

5．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，“$a_{2024}=0$”是“$S_n=S_{4047-n}\left(n<4047,n\in\mathbf{N}^*\right)$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．已知$\cos\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{4}$，则$\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=$（　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

7．定义函数集

$A=\{h(x)|\ h(x)=f_i(x)\otimes f_j(x),1\le i,j\le 4,l,j\in\mathbf{N}^+$,且其中⊗为加、减、乘、除四种运算$\}$

已知函数$f_1(x)=x$，$f_2(x)=\frac{1}{x}$，$f_3(x)=\sqrt{2}\mathrm{e}^x$，$f_4(x)=\sqrt{2}\ln x$．若函数$g(x)\in A$，则在

$g(x)$为奇函数的条件下，$g(x)$存在单调递减区间的概率为（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{3}{8}$　　C．$\frac{3}{16}$　　D．$\frac{1}{6}$

8．已知椭圆$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_2$的直线$l$与椭圆$\Gamma$相交于$A$、$B$两点，与$y$轴相交于点$C$．连接$F_1C$，$F_1A$．若$O$为坐标原点，$F_1C\perp F_1A$，$S_{\triangle COF_2}=2S_{AF_1F_2}$，则椭圆$\Gamma$的离心率为（　　）

A．$\frac{\sqrt{10}}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{10}$

二、多选题

9．已知a，$b\in\mathbf{R}$，有一组样本数据为$2+a$，3，$6-b$，$7-a$，8，10，$11+b$，12，13，若在这组数据中再插入一个数8，则（　　）

A．平均数不变　　B．中位数不变　　C．方差不变　　D．极差不变

10．已知平面α，β，直线a,b，若$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=a$，b与α所成的角为$\frac{\pi}{6}$，则下列结

论中正确的有（　）

A．α 内垂直 a 的直线必垂直于 β

B．α 内的任意直线必垂直于 β 内的无数条直线

C．b 与 β 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$

D．b 与 α 内的任意一条直线所成的角大于等于 $\frac{\pi}{6}$

11．利用不等式“$\ln x-x+1\le 0$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立”可得到许多与 n（$n\ge 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$）有关的结论，则下列结论正确的是（　）

A．$\ln n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$

B．$\ln n>\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}$

C．$(1+2)(1+4)\cdots(1+2^n)>\mathrm{e}\cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

D．$1+2^n+\cdots+n^n<\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\cdot n^n$

三、填空题

12．某工厂生产的一批零件的使用寿命 X（单位：年）近似服从正态分布 $N(80,\delta^2)$．若 $P(60\le X\le 100)=\frac{2}{3}$，则从这批零件中任意取出 1 件，其寿命低于 60 的概率是____．

13．已知函数 $y=f(x+2)-1$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，则 $\sum_{i=1}^{4051}f(i-2024)=$____．

14．已知 E，F 是直角 $\triangle ABC$ 的外接圆上的两个动点，且 $|EF|=8$，P 为 $\triangle ABC$ 的边上的动点，若 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 的最大值为 48，则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为____．

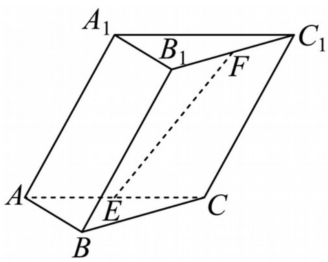
四、解答题

15．已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}+x-1}{\mathrm{e}^{x}}$．

(1)求函数$f\left(x\right)$的单调区间；

(2)若曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(0,0\right)$处的切线与二次曲线$y=ax^{2}+\left(2a+5\right)x-2$只有一个公共点，求实数$a$的值．

16．如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，底面ABC是边长为2的正三角形，平面$ACC_1A_1\perp$底面ABC，$\angle A_1AC=\dfrac{\pi}{3}$，$AA_1=2$，$E$，$F$分别是$AC$，$B_1C_1$的中点，$P$是线段$EF$上的动点．



(1)当P是线段EF的中点时，求点P到平面ABB_1A_1的距离；

(2)当平面PCC_1与平面BB_1C_1C的夹角的余弦值为$\dfrac{9\sqrt{145}}{145}$时，求EP．

17．已知等比数列$\left\{a_n\right\}$和等差数列$\left\{b_n\right\}$，满足$a_{n+1}>a_n$，$a_1=b_1=1$，$a_2=b_2$，$3a_3=4b_3$．

(1)求数列$\left\{a_n\right\}$，$\left\{b_n\right\}$的通项公式；

(2)记数列$\left\{a_n\cdot b_n\right\}$的前$n$项和为$T_n$，数列$\left\{\dfrac{T_n}{b_n\cdot b_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$P_n$．证明：$P_n<\dfrac{2^{n+1}}{n+1}-1$．

18．已知双曲线$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的实轴长为4，左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，其中$F_2$到其渐近线的距离为1．

(1)求双曲线Γ的标准方程；

(2)若点P是双曲线Γ在第一象限的动点，双曲线Γ在点P处的切线l_1与x轴相交于点T.

（i）证明：射线PT是$\angle F_1PF_2$的角平分线；

（ii）过坐标原点O的直线l_2与l_1垂直，与直线PF_1相交于点Q，求$\triangle QF_1F_2$面积的取值范围．

19．为提高学生的思想政治觉悟，激发爱国热情，增强国防观念和国家安全意识，某校进行军训打靶竞赛．规则如下：每人共有3次机会，击中靶心得1分，否则得0分、已知甲选手第一枪击中靶心的概率为$\frac{2}{3}$，且满足：如果第n次射击击中靶心概率为p，那么当第n次击中靶心时，第$n+1$次击中靶心的概率也为p，否则第$n+1$次击中靶心的概率为$\frac{p}{2}$．

(1)求甲选手得分X的分布列及其数学期望；

(2)有如下定义：设X是一个随机变量，x是任意实数，函数$F\left(x\right)=P\left(X\le x\right)$，$x\in\mathbf{R}$称为$X$的分布函数，对于任意实数$x_1$，$x_2\left(x_1<x_2\right)$，有$P\left(x_1<X\le x_2\right)=P\left(X\le x_2\right)-P\left(X\le x_1\right)=F\left(x_2\right)-F\left(x_1\right)$．因此，若已知$X$的分布函数，我们就知道$X$落在任一区间$\left(x_1,x_2\right]$上的概率．

（i）写出（1）中甲选手得分X的分布函数（分段函数形式）；

（ii）靶子是半径为2的一个圆盘，设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积

成正比，假如选手射击都能中靶，以Y表示弹着点与圆心的距离．试求随机变量Y的分布函数．

参考答案：

1．A

【分析】根据对数函数的性质求出集合B，再根据并集的定义计算可得.

【详解】因为$B=\{y\mid y=\lg x\}=\mathrm{R}$，又$A=\{x\mid x<1\}$，

所以$A\cup B=\mathbf{R}$.

故选：A

2．B

【分析】先求出展开式的通项，令指数等于0，求得$r=2$，即可求解.

【详解】通项$T_{r+1}=\mathrm{C}_3^r\left(x^2\right)^{3-r}\left(-\frac{1}{2x}\right)^r=\mathrm{C}_3^r\left(-\frac{1}{2}\right)^r x^{6-3r}$为常数项，

令$6-3r=0$可得$r=2$，

所以$T_3=\mathrm{C}_3^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，

故选：B.

3．D

【分析】先根据条件求出复数z，从而可求出结果

【详解】设$z=a+b\mathrm{i}$，a，$b\in\mathbf{R}$，则$|z+2-\mathrm{i}|=0\Rightarrow(a+2)^2+(b-1)^2=0$

则$a=-2$，$b=1$．$\therefore z=-2+\mathrm{i}$，$\bar{z}=-2-\mathrm{i}$，

所以$\bar{z}\cdot z=5$，

故选：D.

4．C

【分析】由题意可得$y_0\cdot\mathrm{e}^{\frac{t}{2}\ln 0.8}<0.5y_0$，求解可得$t>6.2$，可得结论.

【详解】若残留量不足初始量的50%，则$y_0 \cdot e^{\frac{t}{2}\ln 0.8} < 0.5y_0$，

所以$(0.8)^{\frac{t}{2}} < 0.5$，两边取常用对数得$\frac{t}{2}\lg 0.8 < \lg 0.5$，$t > \frac{-2\lg 2}{3\lg 2 - 1} \approx 6.2$，

所以至少需要7年.

故选：C.

5．C

【分析】根据题意，分$n \leqslant 2023$和$n > 2023$两种情况讨论，结合等差数列的性质及充分条件、必要条件的定义分析判断即可.

【详解】当$n \leqslant 2023$时，$S_n = S_{4047-n} \Leftrightarrow 0 = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{4047-n} = \frac{a_{n+1} + a_{4047-n}}{2}(4047 - 2n)$，

得$a_{2024} = 0$；

当$n > 2023$时，$S_n = S_{4047-n} \Leftrightarrow 0 = a_{4048-n} + a_{4046-n} + \cdots + a_n = \frac{a_n + a_{4048-n}}{2}(4047 - 2n)$，得

$a_{2024} = 0$，

所以“$a_{2024} = 0$”是“$S_n = S_{4047-n}\left(n < 4047, n \in \mathbf{N}^*\right)$”的充要条件，

故选：C.

6．A

【分析】根据诱导公式和二倍角公式化简等式，在利用二倍角公式计算得到结果；

【详解】$\because \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{1}{2}\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos(\theta + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{4}$，

$\therefore \cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，

$\therefore \cos\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)-1=-\frac{1}{2}$，

故选：A．

7．A

【分析】首先根据奇偶性的知识找出符合条件的所有函数，然后在这些函数中找出存在单调递减区间的函数，得出答案.

【详解】解析：集合A中的函数为奇函数的有$\mathrm{y}=\mathrm{x}+\frac{1}{\mathrm{x}}$，$y=x-\frac{1}{x}$，$y=\frac{1}{x}-x$，

而有单调递减区间的函数有$\mathrm{y}=\mathrm{x}+\frac{1}{\mathrm{x}}$和$y=\frac{1}{x}-x$，所以概率为$\frac{2}{3}$.

故选：A．

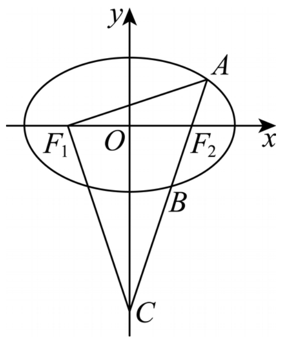
8．A

【分析】由三角形面积关系得出$|F_2C|=4t=|F_1C|$，再由勾股定理及椭圆定义求出t，利用余弦定理及$\cos\angle AF_2F_1+\cos\angle CF_2O=0$求解即可.

【详解】设$|F_2A|=t$，由$S_{\triangle COF_2}=2S_{\triangle AF_1F_2}$

可得$S_{\triangle F_1CF_2}=2S_{\triangle COF_2}=4S_{\triangle AF_1F_2}$，由于$\triangle F_1CF_2$与$\triangle AF_1F_2$等高，

所以$|F_2C|=4t=|F_1C|$，



又 $F_1C \perp F_1A$， $|AC| = 5t$， $\therefore |F_1A| = 3t$，

又 $|AF_1| + |AF_2| = 2a = 4t$， $\therefore t = \frac{a}{2}$，

在 $\triangle CF_2O$ 中， $\cos\angle CF_2O = \frac{c}{2a}$，

$\because \cos\angle AF_2F_1 + \cos\angle CF_2O = 0$，

$\therefore \cos\angle AF_2F_1 = -\frac{c}{2a}$

在 $\triangle AF_2F_1$ 中， $\cos\angle AF_2F_1 = \frac{|AF_2|^2 + |F_1F_2|^2 - |AF_1|^2}{2|F_2A|\cdot|F_1F_2|} = \frac{2c^2 - a^2}{ac} = -\frac{c}{2a}$，

化简可得 $2a^2 = 5c^2$，解得 $e = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$，

故选：A．

【点睛】关键点点睛：本题关键点之一根据三角形面积关系得出 $|F_2C| = |F_1C| = 4t$，其次需要根据 $\cos\angle AF_2F_1 + \cos\angle CF_2O = 0$ 建立 a,c 关系.

9．AD

【分析】求出样本数据的平均数，判断A的真假；令 a,b 取特殊值，验证B的真假；利用方差的计算公式求方差判断C的真假；因为8不是最值，所以插入8不影响极差，可判断D的真假.

【详解】对于A选项，原数据的平均数为8，插入一个数8，平均数不变，正确；

对于B选项，取$a=-2$，$b=1$，原数据的中位数为9，新数据的中位数为8.5，错误；

对于C选项，新数据的方差为$s'^2=\frac{1}{10}\left[(2+a-8)^2+(3-8)^2+\cdots(13-8)^2+(8-8)^2\right]$

$<\frac{1}{9}\left[(2+a-8)^2+(3-8)^2+\cdots(13-8)^2\right]=s^2$，错误；

对于D选项，因为$3<8<13$，所以8不是最值，故新数据的极差不变，正确.

故选：AD

10．ABD

【分析】由平面与平面垂直的性质定理可判断AB；线面位置关系可判断C；由最小角定理可判断D.

【详解】对于A选项，由平面与平面垂直的性质定理可知，α内垂直a的直线必垂直于β，A正确；

对于B选项，在β内作a的垂线，则此垂线必垂直于α，

自然也就垂直α内的任意直线，这种垂线可以作无数条，所以B正确；

对于C选项，b与α所成的角为$\frac{\pi}{6}$，但b与β的位置关系不确定，不能确定b与β所成的角，

特殊情况下可以是$b//\beta$，所以C错误；

对于D选项，由最小角定理可知，线面角是线与面内的任意直线所成角中的最小的角，故D正确.

故选：ABD.

11．ABD

【分析】对于A：令$x=1+\frac{1}{n}(n\geq 2)$，代入可得$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$，运算整理即可；对于B：可

得 $\ln(1-x)\le -x$，令 $x=\frac{1}{n}\ne 0$，可得 $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)<-\frac{1}{n}$，运算整理即可；对于 C：取特值 $n=2$

检验即可；对于 D：令 $x=\frac{i}{n}$，可得 $\ln\frac{i}{n}\le\frac{i}{n}-1$，结合等比数列求和公式分析证明.

【详解】对于不等式 $\ln x\le x-1$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，

对于选项 A：令 $x=1+\frac{1}{n}(n\ge 2)$，则 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{n}-1=\frac{1}{n}$，

可得 $\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$，

其中 $\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=\ln2-\ln1+\ln3-\ln2+\cdots+\ln(n)-\ln(n-1)$

$=\ln(n)-\ln1=\ln(n)$，

所以 $\ln(n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$，A 正确；

对于选项 B：将 x 替换为 $1-x$，可得 $\ln(1-x)\le 1-x-1=-x$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立.

令 $x=\frac{1}{n}\ne 0$，可得 $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)<-\frac{1}{n}$，整理可得 $\ln n-\ln(n-1)>\frac{1}{n}$，

故 $\ln2-\ln1+\ln3-\ln2+\cdots+\ln2n-\ln(2n-1)>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}$，

即 $\ln(2n)>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}$，

所以 $\ln(n)>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ln2+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}$，故 B 正确；