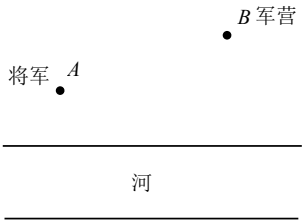
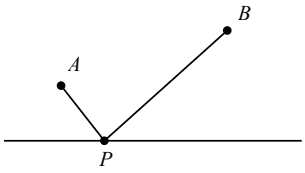
难关必刷 03 轴对称之将军饮马模型（3 种类型 30 题专练）

【模型梳理】

如图，将军在图中点 A 处，现在他要带马去河边喝水，之后返回军营，问：将军怎么走能使得路程最短？



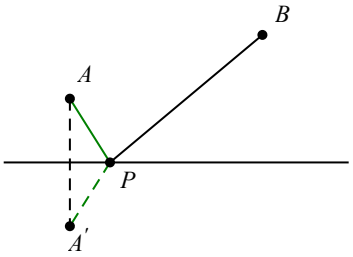
如图，在直线上找一点 P 使得 $PA+PB$ 最小？



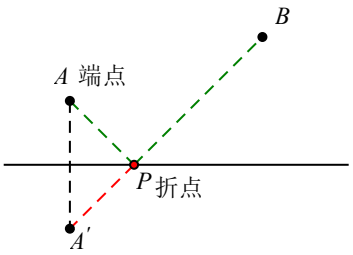
这个问题的难点在于 $PA+PB$ 是一段折线段，通过观察图形很难得出结果，关于最小值，我们知道“两点之间，线段最短”、“点到直线的连线中，垂线段最短”等，所以此处，需转化问题，将折线段变为直线段.

【模型解析】

作点 A 关于直线的对称点 A'，连接 PA'，则 $PA'=PA$，所以 $PA+PB=PA'+PB$

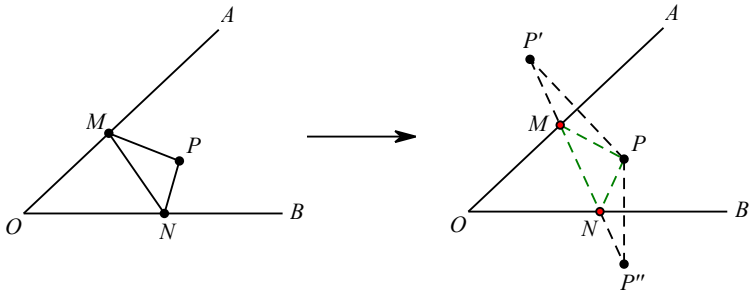


当 A'、P、B 三点共线的时候，$PA'+PB=A'B$，此时为最小值（两点之间线段最短）



类型一：两定一动

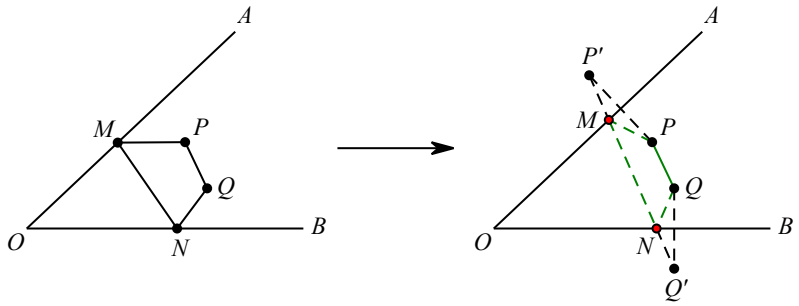
在 OA、OB 上分别取点 M、N，使得△PMN 周长最小.



此处 M、N 均为折点，分别作点 P 关于 OA（折点 M 所在直线）、OB（折点 N 所在直线）的对称点，化折线段 $PM+MN+NP$ 为 $P'M+MN+NP''$，当 P'、M、N、P'' 共线时，△PMN 周长最小.

类型二：两定两动

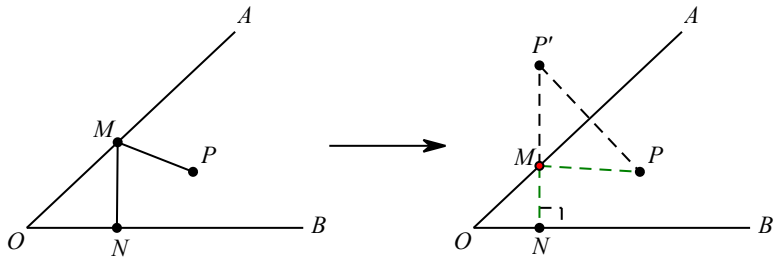
在 OA、OB 上分别取点 M、N 使得四边形 $PMNQ$ 的周长最小。



考虑 PQ 是条定线段，故只需考虑 $PM+MN+NQ$ 最小值即可，类似，分别作点 P、Q 关于 OA、OB 对称，化折线段 $PM+MN+NQ$ 为 $P'M+MN+NQ'$，当 P'、M、N、Q' 共线时，四边形 $PMNQ$ 的周长最小。

类型三：一定两动

在 OA、OB 上分别取 M、N 使得 $PM+MN$ 最小。

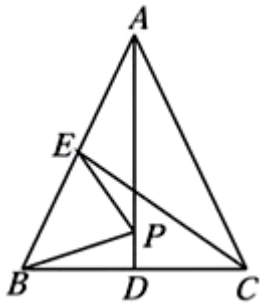


此处 M 点为折点，作点 P 关于 OA 对称的点 P'，将折线段 $PM+MN$ 转化为 $P'M+MN$，即过点 P' 作 OB 垂线分别交 OA、OB 于点 M、N，得 $PM+MN$ 最小值（点到直线的连线中，垂线段最短）

【题型讲解】

类型一：两定一动

【例 1】如图，在ΔABC中，$AB=AC$，AD,CE是ΔABC的两条中线，P是AD上一个动点，则下列线段的长度等于$BP+EP$最小值的是（ ）



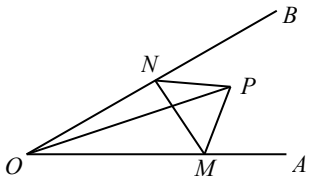
A．BC　　B．CE　　C．AD　　D．AC

【答案】B

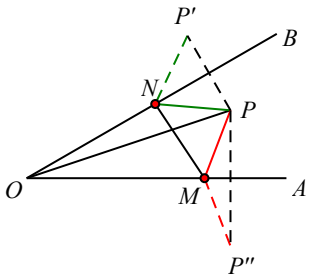
【详解】

在ΔABC中，$AB=AC$，AD是ΔABC的中线，可得点B和点D关于直线AD对称，连结CE，交AD于点P，此时$BP+EP$最小，为EC的长，故选B.

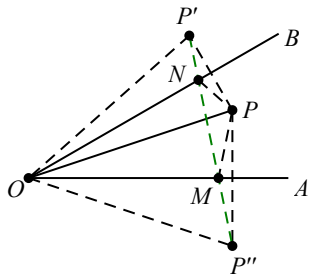
【变式】如图，点P是$\angle AOB$内任意一点，$\angle AOB$=30°，OP=8，点M和点N分别是射线OA和射线OB上的动点，则△PMN周长的最小值为_____.



【分析】△PMN周长即$PM+PN+MN$的最小值，此处M、N均为折点，分别作点P关于OB、OA对称点P'、P''，化$PM+PN+MN$为$P'N+MN+P''M$.

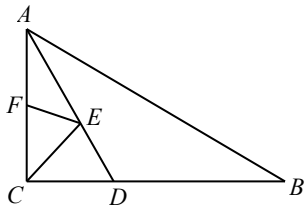


当P'、N、M、P''共线时，得△PMN周长的最小值，即线段$P'P''$长，连接OP'、OP''，可得△$OP'P''$为等边三角形，所以$P'P''=OP'=OP$=8.



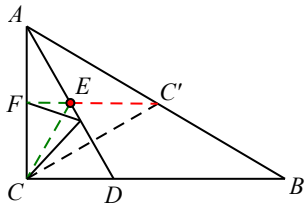
类型二：两定两动

【例 2】如图，在 Rt△*ABC* 中，∠*ACB*=90°，*AC*=6．*AB*=12，*AD* 平分∠*CAB*，点 *F* 是 *AC* 的中点，点 *E* 是 *AD* 上的动点，则 *CE*+*EF* 的最小值为(　　)

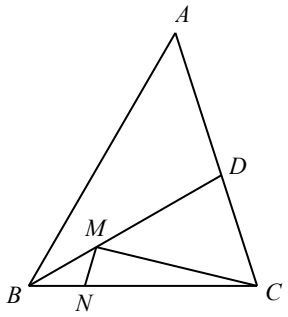


A．3　　B．4　　C．$3\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{3}$

【分析】此处 *E* 点为折点，可作点 *C* 关于 *AD* 的对称，对称点 *C*’在 *AB* 上且在 *AB* 中点，化折线段 *CE*+*EF* 为 *C*’*E*+*EF*，当 *C*’、*E*、*F* 共线时得最小值，*C*’*F* 为 *CB* 的一半，故选 C．

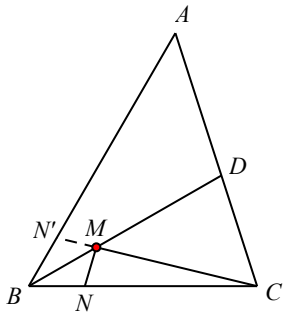


【变式】如图，在锐角三角形 *ABC* 中，*BC*=4，∠*ABC*=60°， *BD* 平分∠*ABC*，交 *AC* 于点 *D*，*M*、*N* 分别是 *BD*，*BC* 上的动点，则 *CM*+*MN* 的最小值是(　　)

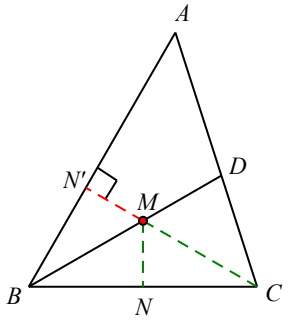


A．$\sqrt{3}$　　B．2　　C．$2\sqrt{3}$　　D．4

【分析】此处 M 点为折点，作点 N 关于 BD 的对称点，恰好在 AB 上，化折线 $CM+MN$ 为 $CM+MN'$.

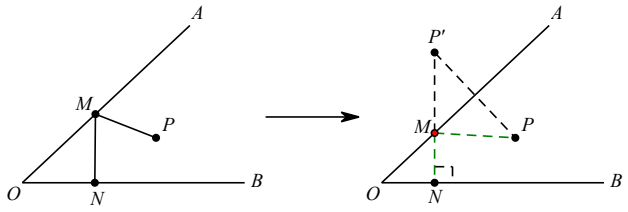


因为 M、N 皆为动点，所以过点 C 作 AB 的垂线，可得最小值，选 C.



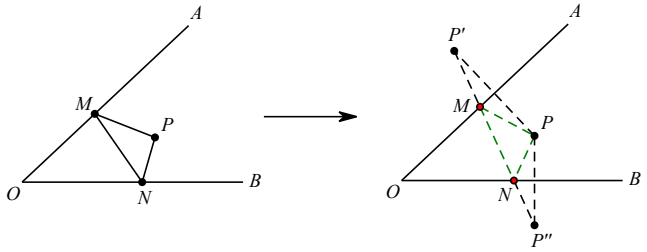
类型三：一定两动

【例 3】点 P 是定点，在 OA、OB 上分别取 M、N，使得 PM+MN 最小。



【解法】作点 P 关于 OA 对称的点 P’，将折线段 PM+MN 转化为 P’M+MN，即过点 P’作 OB 垂线分别交 OA、OB 于点 M、N，得 PM+MN 最小值（垂线段最短）

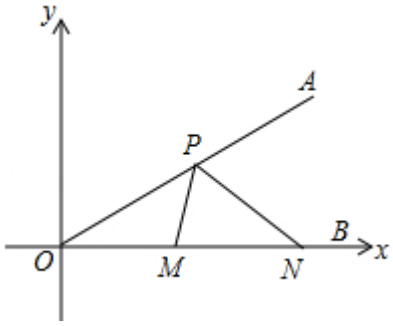
【变式 1】点 P 是定点，在 OA、OB 上分别取点 M、N，使得△PMN 周长最小.



【解法】分别作点 P 关于 OA（折点 M 所在直线）、OB（折点 N 所在直线）的对称点，化折线段

PM+MN+NP 为 P’M+MN+NP’’，当 P’、M、N、P’’共线时，△PMN 周长最小．

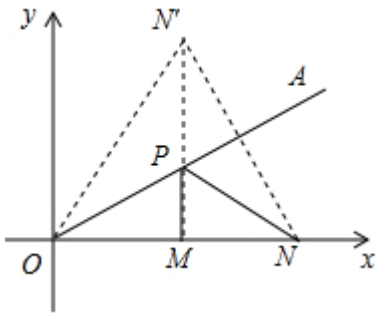
【变式 2】如图，∠*AOB* 的边 *OB* 与 *x* 轴正半轴重合，点 *P* 是 *OA* 上的一动点，点 *N*（3，0）是 *OB* 上的一定点，点 *M* 是 *ON* 的中点，∠*AOB*=30°，要使 *PM*+*PN* 最小，则点 *P* 的坐标为_____．



【答案】（$\frac{3}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$）．

【详解】

解：作 *N* 关于 *OA* 的对称点 *N*′，连接 *N*′*M* 交 *OA* 于 *P*，则此时，*PM*+*PN* 最小，∵*OA* 垂直平分 *NN*′，∴*ON*=*ON*′，∠*N*′*ON*=2∠*AON*=60°，∴△*NON*′是等边三角形，∵点 *M* 是 *ON* 的中点，∴*N*′*M*⊥*ON*，∵点 *N*（3，0），∴*ON*=3，∵点 *M* 是 *ON* 的中点，∴*OM*=1.5，∴*PM*=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴*P*（$\frac{3}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$）．故答案为：（$\frac{3}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$）．



【题型专练】

1．（2021 秋•苏州期末）在平面直角坐标系中，已知点 *A*（﹣1，2），点 *B*（﹣5，6），在 *x* 轴上确定点 *C*，使得△*ABC* 的周长最小，则点 *C* 的坐标是（　　）

A．（﹣4，0）　　B．（﹣3，0）　　C．（﹣2，0）　　D．（﹣2.5，0）

【分析】作 *B* 点关于 *x* 轴的对称点 *B*′，连接 *AB*′交 *x* 轴于点 *C*，连接 *BC*，此时△*ABC* 的周长最小，求出直线 *AB*′的解析式 *y*＝2*x*+4 与 *x* 轴的交点即可．

【解答】解：作 B 点关于 x 轴的对称点 B'，连接 AB'交 x 轴于点 C，连接 BC，

∴$BC=B'C$，

∴$BC+AC=B'C+AC\geqslant AB'$，此时△$ABC$ 的周长最小，

∵B（﹣5，6），

∴B'（﹣5，﹣6），

设直线 AB'的解析式为 $y=kx+b$，

将点 A（﹣1，2），B'（﹣5，﹣6）代入，

得$\begin{cases}-k+b=2\\-5k+b=-6\end{cases}$，

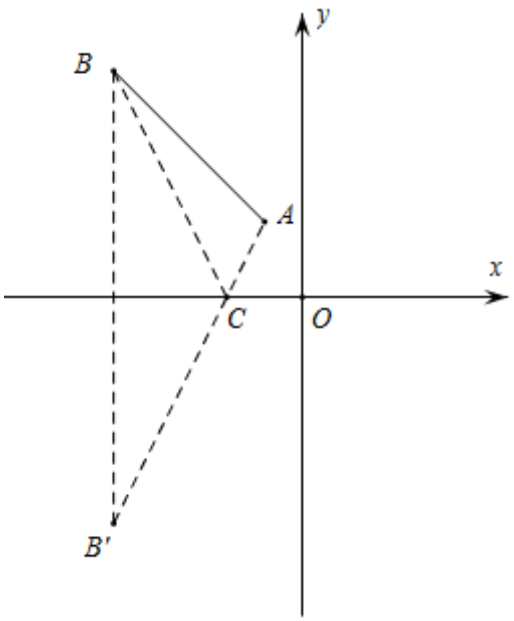
∴$\begin{cases}k=2\\b=4\end{cases}$，

∴$y=2x+4$，

令 $y=0$，则 $x=-2$，

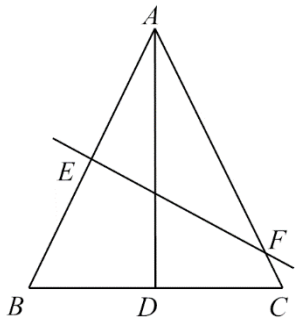
∴C（﹣2，0），

故选：C.



【点评】本题考查轴对称求最短距离，熟练掌握轴对称求最短距离的方法，用待定系数法求函数解析式是解题的关键.

2.（2022 秋•江都区月考）如图，△ABC 中，$AB=AC$，$BC=3$，$S_{\triangle ABC}=6$，$AD\perp BC$ 于点 D，EF 是 AB 的垂直平分线，交 AB 于点 E，交 AC 于点 F，在 EF 上确定一点 P，使 $PB+PD$ 最小，则这个最小值为（　　）



A．3.5　　B．4　　C．4.5　　D．5

【分析】由垂直平分线的性质知 $AP=BP$，则 $PB+PD=AP+PD$，从而 $PB+PD$ 最小值为 AD 的长，利用面积即可求出 AD 的长．

【解答】解：∵EF 是 AB 的垂直平分线，

∴$AP=BP$，

∴$PB+PD=AP+PD$，

即点 P 在 AD 上时，$PB+PD$ 最小值为 AD 的长，

∵$BC=3$，$S_{\triangle ABC}=6$，

∴$\frac{1}{2}\times 3\times AD=6$，

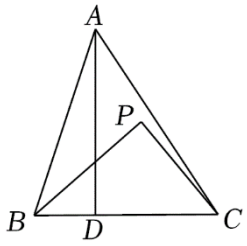
∴$AD=4$，

∴$PB+PD$ 最小值为 4，

故选：B．

【点评】本题主要考查了轴对称 - 最短路线问题，线段垂直平分线的性质等知识，将 $PB+PD$ 最小值转化为 AD 的长是解题的关键．

3．（2020 秋•如皋市期末）如图，$\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$，垂足为 D，$AD=BC$，P 为直线 BC 上方的一个动点，$\triangle PBC$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 的面积的 $\frac{1}{2}$，则当 $PB+PC$ 最小时，$\angle PBC$ 的度数为（　　）



A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．90°

【分析】由题意可知作 B 点关于该垂直平分线的对称点 B'，连接 $B'C$，交垂直平分线于 P 点，此时 $PB+PC$ 最小，证明 $\triangle BCB'$ 是等腰直角三角形，即可求 $\angle PBC$．

【解答】解：∵$\triangle PBC$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 的面积的 $\frac{1}{2}$，

∴P 点在 AD 的垂直平分线上，

作 B 点关于该垂直平分线的对称点 B'，连接 $B'C$，交垂直平分线于 P 点，

由对称性可知，$B'P=BP$，

∴$BP+PC=B'P+PC=B'C$，此时 $PB+PC$ 最小，

∵$AD=BB'$，$AD=BC$，

∴$BB'=BC$，

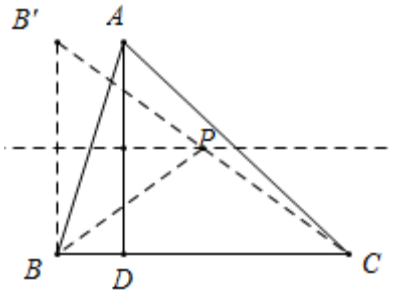
∴$\triangle BCB'$是等腰直角三角形，

∴$\angle B'CB=\angle B'=45°$，

∴$\angle B'BP=45°$，

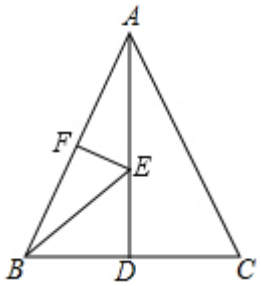
∴$\angle PBC=45°$，

故选：B.



【点评】本题考查轴对称求最短距离，熟练掌握轴对称求最短距离的方法，等腰直角三角形的性质是解题的关键.

4.（2022 秋•和平区校级期末）如图，在等边三角形 ABC 中，BC 边上的高 $AD=8$，E 是高 AD 上的一个动点，F 是边 AB 的中点，在点 E 运动的过程中，存在 $EB+EF$ 的最小值，则这个最小值是（　　）



A．5　　B．6　　C．7　　D．8

【分析】连接 CF 交 AD 于点 E，连接 BE，此时 $BE+EF$ 的值最小，求出 CF 即可.

【解答】解：连接 CF 交 AD 于点 E，连接 BE，

∵$\triangle ABC$ 是等边三角形，AD 是高，

∴$BE=CE$，

∴$BE+EF=CE+EF\geqslant CF$，此时 $BE+EF$ 的值最小，

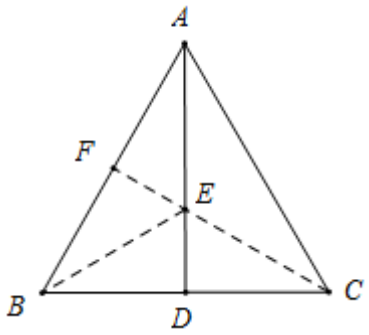
∵F 是 AB 边上的中点，

∴$CF=AD$，

∵$AD=8$，

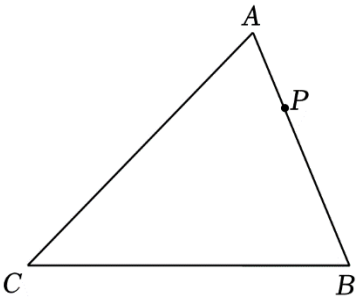
∴$CF=8$，

故选：D.



【点评】本题考查轴对称求最短距离，熟练掌握轴对称求最短距离的方法，等边三角形的性质是解题的关键.

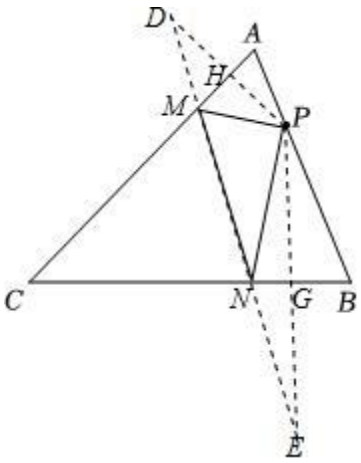
5.（2022 秋•乌鲁木齐期末）如图，在锐角△ABC 中，$\angle C=40°$；点 P 是边 AB 上的一个定点，点 M、N 分别是 AC 和 BC 边上的动点，当△PMN 的周长最小时，$\angle MPN$ 的度数是（　　）



A．90°　　B．100°　　C．110°　　D．80°

【分析】分别作 P 关于 BC，AC 的对称点 E，D，连接 DE，交 AC 于 M，交 BC 于 N，此时△MNP 的周长最小，由条件求出 $\angle DPE$ 的度数，由轴对称的性质，等腰三角形的性质得到 $\angle MPD+\angle NPE=\angle D+\angle E=40°$，从而求出 $\angle MPN$ 的度数.

【解答】解：分别作 P 关于 BC，AC 的对称点 E，D，连接 DE，交 AC 于 M，交 BC 于 N，此时△MNP 的周长最小，



∵∠*PHM*＝∠*PGN*＝90°，∠*C*＝40°，

∴∠*DPE*＝360°﹣∠*PHM*﹣∠*PGN*﹣∠*C*＝360°﹣90°﹣90°﹣40°＝140°，

∴∠*D*+∠*E*＝180°﹣∠*DPE*＝180°﹣140°＝40°，

∵*PM*＝*DM*，*NP*＝*NE*，

∴∠*MPD*＝∠*D*，∠*NPE*＝∠*E*，

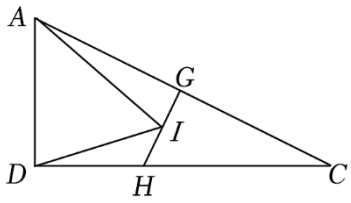
∴∠*MPD*+∠*NPE*＝∠*D*+∠*E*＝40°，

∴∠*MPN*＝∠*DPE*﹣（∠*MPD*+∠*NPE*）＝140°﹣40°＝100°．

故选：*B*．

【点评】本题考查轴对称的性质，关键是分别作 *P* 关于 *BC*，*AC* 的对称点 *E*，*D*，连接 *DE*，交 *AC* 于 *M*，交 *BC* 于 *N*，找到周长最小的△*PMN*．

6．（2020 秋•瑞安市校级月考）如图，在 Rt△*ADC* 中，*AD*＝3，∠*ADC*＝90°，∠*C*＝30°，*AC* 的中垂线 *GH* 分别交 *AC*、*DC* 于点 *G*、*H*，*I* 为 *HG* 上一动点，则△*ADI* 的周长的最小值为（　　）



A．6　　B．$6+3\sqrt{3}$　　C．$3+3\sqrt{3}$　　D．$3+\sqrt{3}$

【分析】连接 *IC*，当 *D*、*C*、*I* 三点共线时，*DI*+*AI* 最小，则△*ADI* 的周长的最小值为 *AD*+*CD*．

【解答】解：连接 *IC*，

∵*GH* 是线段 *AC* 的垂直平分线，

∴*AI*＝*IC*，

∴*DI*+*AI*＝*IC*+*DI*≥*CD*，

∴当 *D*、*C*、*I* 三点共线时，*DI*+*AI* 最小，

∵*AD*＝3，∠*ADC*＝90°，∠*C*＝30°，

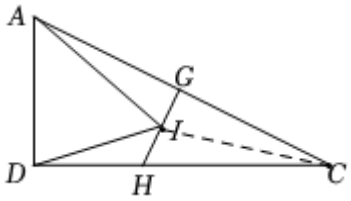
∴$AC=6$，

∴$CD=3\sqrt{3}$，

∴△ADI 的周长＝$AD+CD=3+3\sqrt{3}$，

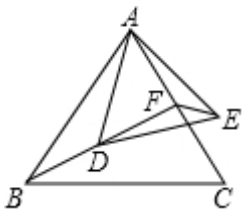
∴△AID 的周长最小值为 $3+3\sqrt{3}$，

故选：C.



【点评】本题考查轴对称求最短距离，熟练掌握轴对称求最短距离的方法，线段垂直平分线的性质，直角三角形的性质是解题的关键.

7.（2022 秋•如东县期末）如图，边长为 a 的等边△ABC 中，BF 是 AC 上中线且 $BF=b$，点 D 在 BF 上，连接 AD，在 AD 的右侧作等边△ADE，连接 EF，则△AEF 周长的最小值是（　　）



A．$\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b$　　B．$\frac{1}{2}a+b$　　C．$a+\frac{1}{2}b$　　D．$\frac{3}{2}a$

【分析】首先证明点 E 在射线 CE 上运动（$\angle ACE=30°$），作点 A 关于直线 CE 的对称点 M，连接 FM 交 CE 于 E'，此时 $AE'+FE'$ 的值最小.

【解答】解：如图，∵△ABC，△ADE 都是等边三角形，

∴$AB=AC=a$，$AD=AE$，$\angle BAC=\angle DAE=\angle ABC=60°$，

∴$\angle BAD=\angle CAE$，

∴△BAD≌△CAE（SAS），

∴$\angle ABD=\angle ACE$，

∵$AF=CF=\frac{1}{2}a$，$BF=b$，

∴$\angle ABD=\angle CBD=\angle ACE=30°$，$BF\perp AC$，

∴点 E 在射线 CE 上运动（$\angle ACE=30°$），

作点 A 关于直线 CE 的对称点 M，连接 FM 交 CE 于 E'，此时 $AE'+FE'$ 的值最小，

∵$CA=CM$，$\angle ACM=60°$，

∴△ACM 是等边三角形，

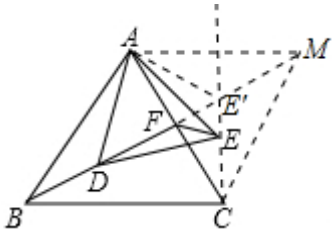
∴$AM=AC$，

∵$BF\perp AC$，

∴$FM=BF=b$，

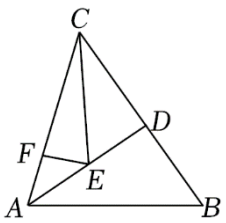
∴△AEF 周长的最小值$=AF+FE'+AE'=AF+FM=\frac{1}{2}a+b$，

故选：B．



【点评】本题考查轴对称最短问题、等边三角形的性质和判定，全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是证明点 E 在射线 CE 上运动（$\angle ACE=30°$），本题难度比较大，属于中考填空题中的压轴题．

8．（2022 秋•句容市月考）如图，在△ABC 中，$AB=AC=10$，$BC=12$，$AD=8$，AD 是$\angle BAC$ 的角平分线，若 E，F 分别是 AD 和 AC 上的动点，则 $EC+EF$ 的最小值是 ____．



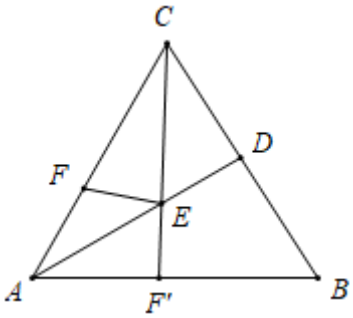
【分析】作 F 关于 AD 的对称点 F'，由角的对称性知，点 F'在 AB 上，当 $CF'\perp AB$ 时，$EC+EF$ 的最小值为 CF'，再利用面积法求出 CF'的长即可．

【解答】解：作 F 关于 AD 的对称点 F'，

∵AD 是$\angle BAC$ 的平分线，

∴点 F'在 AB 上，

∴$EF=EF'$，



∴当 $CF'\perp AB$ 时，$EC+EF$ 的最小值为 CF'，

∵$AB=AC$，AD 是$\angle BAC$ 的平分线，

∴$AD\perp BC$，

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\times AD=\frac{1}{2}AB\times CF'$，

∴$12\times 8=10\times CF$，

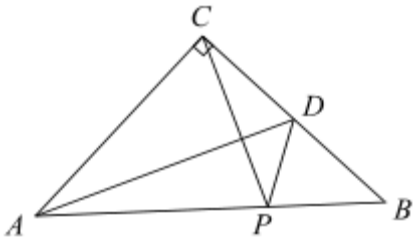
∴$CF=\frac{48}{5}$，

∴$EC+EF$ 的最小值为$\frac{48}{5}$，

故答案为：$\frac{48}{5}$.

【点评】本题主要考查了等腰三角形的性质，轴对称 - 最短路线问题，三角形的面积等知识，熟练掌握将军饮马的基本模型是解题的关键.

9.（2022 秋•江宁区校级月考）如图，等腰直角△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=4$，D 为 BC 的中点，$AD=2\sqrt{5}$，若 P 为 AB 上一个动点，则 $PC+PD$ 的最小值为____.



【分析】作点 D 关于 AB 的对称点 E，连接 PE，BE，依据轴对称的性质，即可得到 $DB=EB$，$DP=EP$，$\angle ABC=\angle ABE=45°$，根据 $PC+PD=PC+PE$，可得当 C，P，E 在同一直线上时，$PC+PE$ 的最小值等于 CE 的长，根据全等三角形的对应边相等，即可得出 $PC+PD$ 的最小值为 $2\sqrt{5}$.

【解答】解：如图所示，作点 D 关于 AB 的对称点 E，连接 PE，BE，

则 $DB=EB$，$DP=EP$，$\angle ABC=\angle ABE=45°$，$\angle CBE=90°$，

∵D 是 BC 的中点，

∴$BD=\frac{1}{2}BC=2$，

∴$BE=2$，

∵$PC+PD=PC+PE$，

∴当 C，P，E 在同一直线上时，$PC+PE$ 的最小值等于 CE 的长，此时，$PC+PD$ 最小，

∵$AC=BC=4$，D 为 BC 的中点，

∴$CD=DB=BE$，

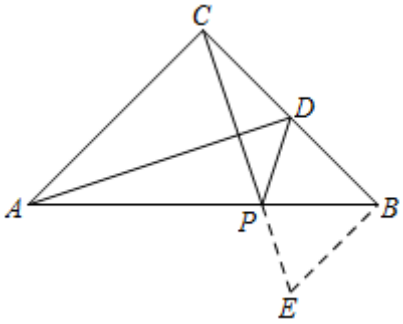
又∵$\angle ACD=\angle CBE=90°$，

∴△ACD≌△CBE（SAS），

∴$CE=AD=2\sqrt{5}$，

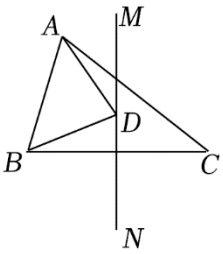
∴$PC+PD$ 的最小值为 $2\sqrt{5}$.

故答案为：$2\sqrt{5}$.



【点评】此题考查了轴对称 - 线路最短的问题，凡是涉及最短距离的问题，一般要考虑线段的性质定理，结合轴对称变换来解决，多数情况要作点关于某直线的对称点.

10.（2022 秋•灵宝市期末）如图，在△ABC 中，AB＝5，AC＝7．MN 为 BC 边上的垂直平分线，若点 D 在直线 MN 上，连接 AD，BD，则△ABD 周长的最小值为 ____.



【分析】MN 与 AC 的交点为 D，$AD+BD$ 的值最小，即△ABD 的周长最小值为 $AB+AC$ 的长.

【解答】解：MN 与 AC 的交点为 D，

∵MN 是 BC 边上的垂直平分线，

∴AD＝CD，

∴$AD+BD$＝$AD+CD$＝AC，

此时 $AD+BD$ 的值最小，

∴△ABD 的周长＝$AB+AD+BD$＝$AB+AC$ 最小，

∵AB＝5，AC＝7，

∴$AB+AC$＝12，

∴△ABD 的周长最小值为 12，

故答案为：12.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/825020042243011244