

专题 4.1 相似三角形重难点模型(1) (3 大模型 6 种题型)



重难点题型归纳

【题型 1: 8 字型】

【题型 2: 反 8 字型】

【题型 3: 平行类 A 字型】

【题型 4: 不平行 A 字型】

【题型 5: 直角三角形中射影定理】

【题型 6: 非直角三角形中射影定理】



满分必练

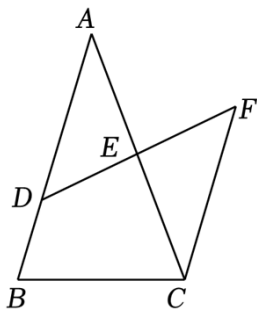
【题型 1: 8 字型】

【基本模型】

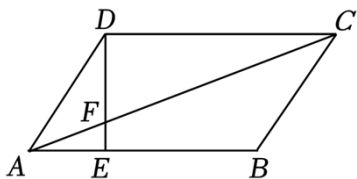
【典例 1】(2023 春·连平县期末) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 AB 上一点, E 是边 AC 的中点, 作 $CF \parallel AB$ 交 DE 的延长线于点 F .

(1) 证明: $\triangle ADE \cong \triangle CFE$;

(2) 若 $AB=AC$, $CE=6$, $CF=8$, 求 DB 的长.



【变式 1-1】(2023·路桥区二模) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 为 AB 上一点, 且 $AE:EB=1:2$, AC 与 DE 相交于点 F , $S_{\triangle AEF}=3$, 则 $S_{\triangle ACD}$ 为 ()



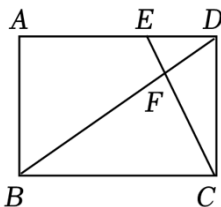
A. 9

B. 12

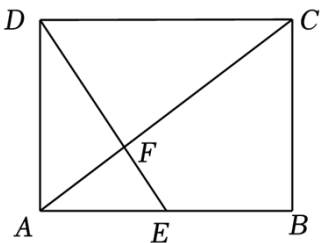
C. 27

D. 36

【变式 1-2】（2023•大兴区一模）如图，在矩形 $ABCD$ 中， E 是 AD 边上一点，且 $AE = 2DE$ ，连接 CE 交对角线 BD 于点 F ．若 $BD = 10$ ，则 DF 的长为 ____．



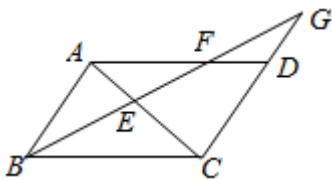
【变式 1-3】（2023•海淀区校级模拟）如图，在矩形 $ABCD$ 中， E 是边 AB 的中点，连接 DE 交对角线 AC 于点 F ，若 $AB = 4$ ， $DE = \sqrt{13}$ ，则 AF 的长为 ____．



【变式 1-4】（2022 秋•南开区校级期末）如图，在 $\square ABCD$ 中， G 是 CD 延长线上一点，连接 BG 交 AC ， AD 于 E ， F ．

(1) 求证： $\triangle ABE \sim \triangle CGE$ ；

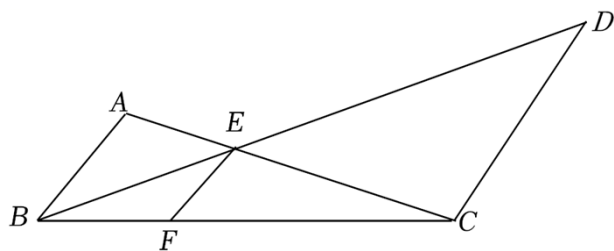
(2) 若 $AF = 2FD$ ，求 $\frac{BE}{EG}$ 的值．



【变式 1-5】（2022 秋•长安区校级月考）如图，已知 $AB \parallel EF \parallel CD$ ， AC ， BD 相交于点 E ， $EF: AB = 2: 3$ ．

(1) 若 $CE = 4$ ，求 AE 的长；

- (2) 若 $CD=6$ ，求 AB 的长；
- (3) 若四边形 $ABFE$ 的面积为 8，直接写出 $\triangle CEF$ 的面积.

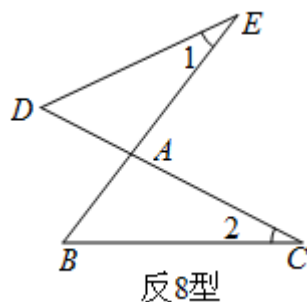


【变式 1-6】（2022 秋•覃塘区期中）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 在 AB 边上， $AE:EB=2:3$ ， DE 交 AC 于点 F 。

- (1) 求 $\triangle AEF$ 与 $\triangle CDF$ 周长之比；
- (2) 如果 $\triangle CDF$ 的面积为 20， $\triangle ADF$ 的面积为 8，求四边形 $BEFC$ 的面积。

【题型 2：反 8 字型】

【基本模型】



【典例 2】（2023 春•清城区期中）已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ ，且 $CA = CB$ 。

（1）求证： $\angle CAD = \angle CBD$ ；

（2）如图 1，当点 C 和点 D 在 AB 的同侧时，求 $\angle ADC$ 的度数；

（3）如图 2，当点 C 和点 D 在 AB 的异侧时， $\triangle CBD$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得 $\triangle CAE$ ，此时 D 、 A 、 E 三点共线。请判断 AD 、 BD 与 CD 三条线段的数量关系，并说明理由。

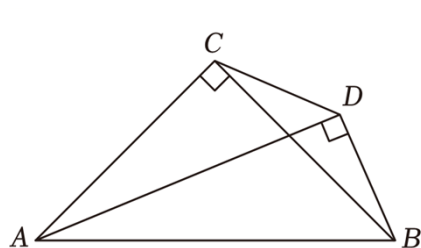


图1

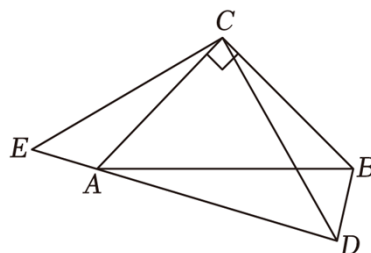
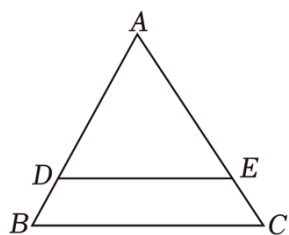


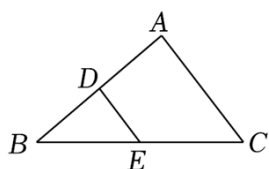
图2

【变式 2-1】（2023•巴南区开学）如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 AB 边上一点，过点 D 作 $DE \parallel BC$ 交 AC 于点 E ，若 $AD:DB = 3:1$ ，则 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}$ 的值为（ ）



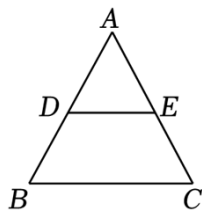
- A. B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{16}{9}$ D. $\frac{9}{16}$

【变式 2-2】（2023 春•东莞市期中）如图，点 D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 边 BA 、 BC 的中点， $AC = 3$ ，则 DE 的长为（ ）



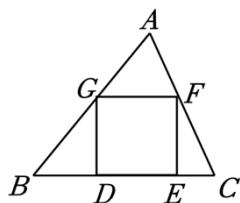
- A. 2 B. $\frac{3}{4}$ C. 3 D. $\frac{3}{2}$

【变式 2-3】（2023 春•滑县期中）如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D ， E 分别是 AB ， AC 的中点， $\angle C=45^\circ$ ， $\angle A=50^\circ$ ，则 $\angle ADE$ 的度数为（ ）



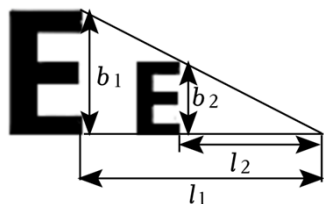
- A. 95° B. 85° C. 75° D. 50°

【变式 2-4】（2023•浦东新区二模）如图，已知正方形 $DEFG$ 的顶点 D 、 E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，顶点 G 、 F 分别在边 AB 、 AC 上，如果 $BC=8$ ， $\triangle ABC$ 的面积是 32，那么这个正方形的边长是（ ）



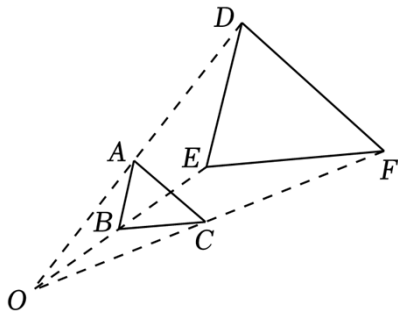
- A. 4 B. 8 C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{16}{3}$

【变式 2-5】（2023•郁南县校级模拟）视力表对我们来说并不陌生，如图，现需制作标准视力表，要求测试距离 $l_1=5$ 米，此时字母 E 的高度为 b_1 米．由于场地有限，需要缩小测试距离为 $l_2=3$ 米，修改后视力表字母 E 的高度为 b_2 米，则 b_1 与 b_2 的关系为（ ）



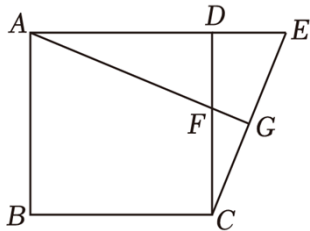
- A. $\frac{b_1}{b_2} = \frac{5}{2}$ B. C. D.

【变式 2-6】（2023•锦江区校级模拟）如图， $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 位似，点 O 为位似中心．已知 $OA:AD=2:3$ ，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积比为 ____．



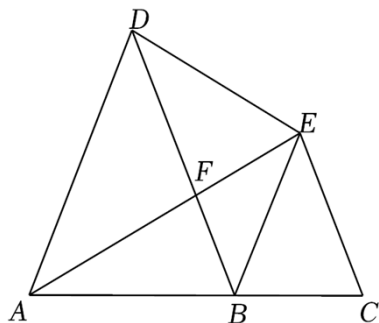
【变式 2-7】（2023·新吴区二模）如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 1，点 F 在 CD 边上，延长 AD 到点 E ，使得 $DE = DF$ ，连接 CE 。

- (1) 求证： $\triangle ADF \cong \triangle CDE$ ；
- (2) 若延长 AF 与 CE 恰好相交于中点 G ，求 DE 的长。



【变式 2-8】（2022·松江区二模）已知：如图，两个 $\triangle DAB$ 和 $\triangle EBC$ 中， $DA = DB$ ， $EB = EC$ ， $\angle ADB = \angle BEC$ ，且点 A 、 B 、 C 在一条直线上，联结 AE 、 ED ， AE 与 BD 交于点 F 。

- (1) 求证： $\frac{DF}{BF} = \frac{AB}{BC}$ ；
- (2) 如果 $BE^2 = BF \cdot BD$ ，求证： $DF = BE$ 。

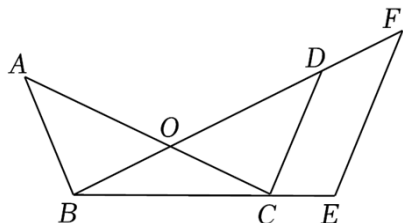


【变式 2-9】（2023·茂南区三模）如图， AC 与 BD 交于点 O ， $OA = OD$ ， $\angle ABO = \angle DCO$ ， E 为 BC 延长线上一点，过点 E 作 $EF \parallel CD$ ，交 BD 的延长线于点

F.

(1) 求证: $\triangle AOB \cong \triangle DOC$;

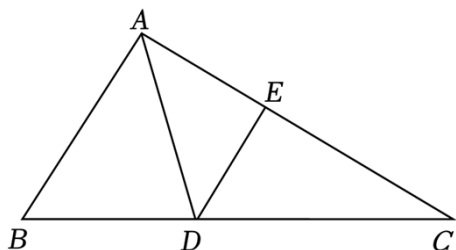
(2) 若 $AB=4$, $BC=6$, $CE=2$, 求 EF 的长.



【变式 2-10】 (2023·江岸区二模) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$, 点 E 在 AC 上, 且 $\angle EAD = \angle ADE$.

(1) 求证: $\triangle DCE \sim \triangle BCA$;

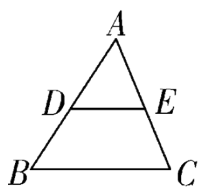
(2) 若 $AB=6$, $AC=8$, 求 $\frac{BD}{CD}$ 的值.



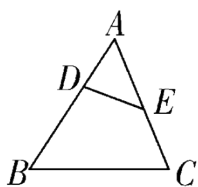
【题型 3: 平行类 A 字型】

【基本模型】

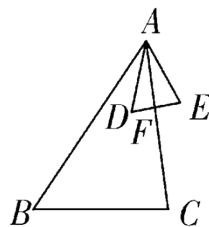
有一个公共角 (图①、图②) 或角有公共部分 (图③, $\angle BAC$ 及 $\angle DAE$ 有公共部分 $\angle DAF$), 此时需要找另一对角相等, 另外若题中未明确相似三角形对应顶点, 则需要分类讨论, 如图③中可找条件 $\angle D = \angle C$ 或 $\angle D = \angle B$.



图①
(平行)



图②
(不平行)

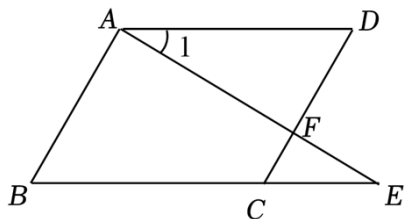


图③
(旋转型: 由 A 字型旋转得到)

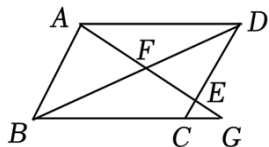
【典例 3】 (2023·硚口区模拟) 如图, 点 E 在四边形 $ABCD$ 的边 BC 延长线上, AE 交 CD 于 F , $\angle 1 = \angle E$, $\angle B = \angle D$.

(1) 求证: $\angle BAF + \angle AFC = 180^\circ$;

(2) 若 $BC = 2CE$, 直接写出: ① $\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle FCE}}$ 的值; ② $\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\text{四边形CFAB}}}$ 的值.



【变式 3-1】(2022 秋·南华县期末) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 是 CD 上的点, AE 交 BD 于点 F , 交 BC 延长线于点 G , 若 $DE:CE=3:1$, 则 $AF:FG=(\quad)$



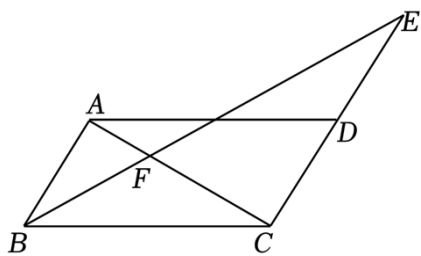
A. 3: 4

B. 3: 5

C. 9: 16

D. 9: 25

【变式 3-2】(2023·裕安区校级二模) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 延长 CD 至点 E , 使 $DE=DC$, 连接 BE 交 AC 于点 F , 则 $\frac{AF}{FC}$ 的值是 $(\quad)$



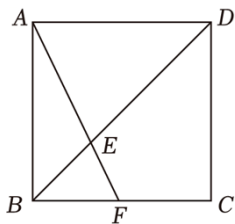
A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{3}{8}$

【变式 3-3】(2023·太原一模) 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 6, 点 F 是 BC 边上一点, 连接 AF 交对角线 BD 于点 E . 若 $DE=2BE$, 则 EF 的长为 $(\quad)$

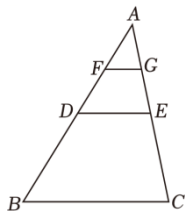


A. 2

B. $\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{2}$

D. 3

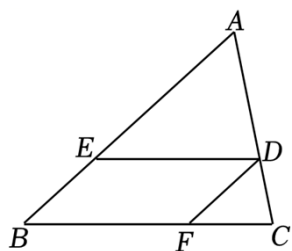
【变式 3-4】（2023 春•八步区期末）如图，在 $\triangle ABC$ 中， D ， E 分别为 AB ， AC 的中点， F 是 AD 的中点， $FG \parallel DE$ ，若 $BC + FG = 15$ ，则 DE 的长为 ____.



【变式 3-5】（2023 春•西湖区校级月考）如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是 AC 上的点，过点 D 作 $DE \parallel BC$ 交 AB 于点 E ， $AB = 3BE$ ，过 D 作 $DF \parallel AB$ 交 BC 于点 F .

(1) 若 $BC = 15$ ，求线段 DE 的长；

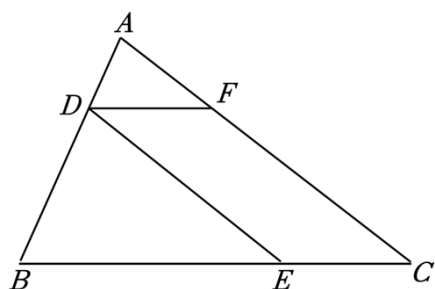
(2) 若 $\triangle ADE$ 的面积为 16，求 $\triangle CDF$ 的面积.



【变式 3-6】（2023•平罗县二模）已知：如图， $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 、 F 分别在边 AB 、 BC 、 AC 上，且 $DE \parallel AC$ ， $\frac{AF}{FC} = \frac{CE}{EB}$.

(1) 求证： $DF \parallel BC$ ；

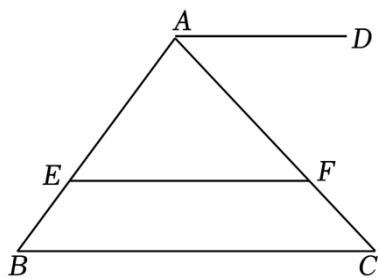
(2) 如果 $DF = 2$ ， $BE = 5$ ，求 $\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle ABC}}$ 的值.



【变式 3-7】（2023•硚口区模拟）如图， E ， F 分别在 AB ， AC 上， $\angle AFE = \angle C$ ， $\angle DAB + \angle B = 180^\circ$.

(1) 求证： $\angle DAF = \angle AFE$.

(2) 若 $AE = 2EB$ ，直接写出 $\triangle AEF$ 与 $\triangle ABC$ 的周长之比.



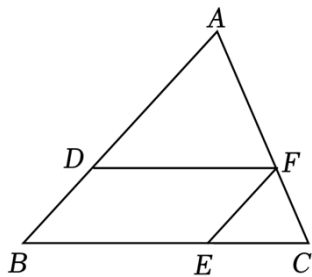
【变式 3-8】（2023•西湖区模拟）如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 、 F 分别在 AB 、 BC 、 AC 上，且 $DF \parallel BC$ ， $EF \parallel AB$ 。

（1）求证： $\triangle FEC \sim \triangle ADF$ ；

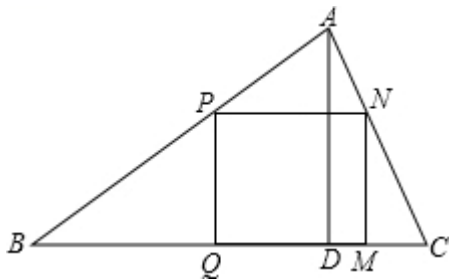
（2）设 $CF = \frac{1}{3}AC$ 。

①若 $EF = 3$ ，求线段 AB 的长；

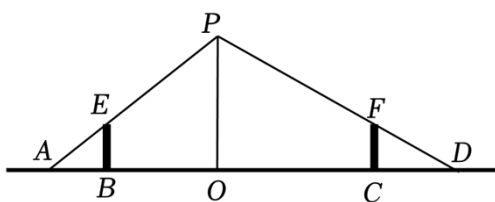
②若 $S_{\triangle FEC} = 1$ ，求 $S_{\triangle ADF}$ 的值。



【变式 3-9】（2022 秋•丹阳市期中）如图，在 $\triangle ABC$ 中，边 $BC = 12cm$ ，高 $AD = 6cm$ ，正方形 $PQMN$ 的一边在 BC 上，其余两个顶点分别在 AB ， AC 上。求这个正方形的边长。



【变式 3-10】（2022 秋•昌图县期末）已知小明、小强的身高都是 $1.6m$ 。如图，小明和小强在路灯正下方分别向西和东各走几步，此时两人之间的水平距离 $BC = 10m$ ，小明的影长 $AB = 2m$ ，小强的影长 $CD = 3m$ ，求这盏路灯 OP 的高度。

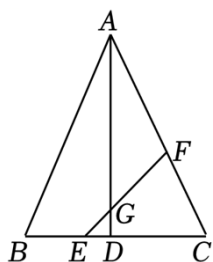


【题型 4：不平行 A 字型】

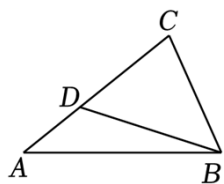
【典例 4】（2022 秋·杭州期末）如图，在等腰三角形 ABC 中， $AB=AC$ ，点 D 是 BC 的中点，点 E, F 分别在线段 BD, AC 上，连结 AD, EF 交于点 G ， $\angle CEF=2\angle CAD$ 。

（1）求证： $\triangle ABC \sim \triangle EFC$ 。

（2）若 $BE=2DE$ ， $\frac{AF}{CF}=\frac{3}{2}$ ，求 $\frac{FG}{GE}$ 的值。



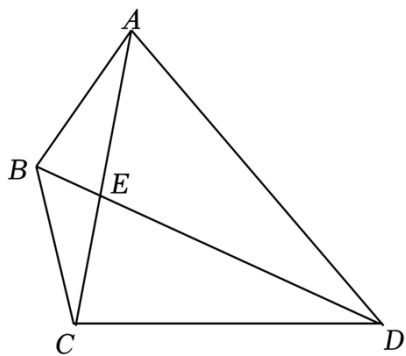
【变式 4-1】（2023·九台区模拟）如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 为 AC 边上一点， $\angle DBC = \angle A$ ， $BC=\sqrt{6}$ ， $AC=3$ ，求 AD 的长。



【变式 4-2】（2022 秋·阳谷县期末）如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 交于点 E ， DB 平分 $\angle ADC$ ，且 $AB^2=BE \cdot BD$ 。

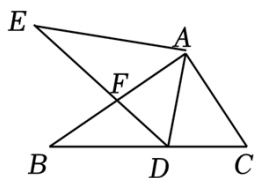
（1）求证： $\triangle ABE \sim \triangle DCE$ ；

（2） $AE \cdot CD = BC \cdot ED$ 。



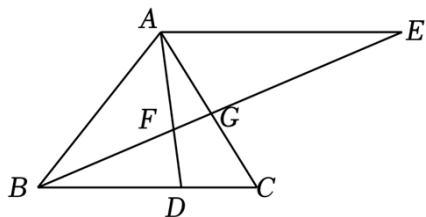
【变式 4-3】（2023·桐乡市校级开学）如图，已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ ，边 AB ， DE 交于点 F ， AD 平分 $\angle BAC$ ， AF 平分 $\angle EAD$ ， $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$ 。

- (1) 求证： $\triangle AED \sim \triangle ABC$ ；
- (2) 若 $BD=3$ ， $BF=2$ ，求 AB 的长。



【变式 4-4】（2022 秋·金山区校级期末）已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上， $AE \parallel BC$ ， BE 与 AD 、 AC 分别相交于点 F 、 G ， $AF^2 = FG \cdot FE$ 。

- (1) 求证： $\triangle CAD \sim \triangle CBG$ ；
- (2) 联结 DG ，求证： $DG \cdot AE = AB \cdot AG$ 。



【变式 4-5】（2022 秋·巨野县期中）如图所示，在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=10\text{cm}$ ， $BC=16\text{cm}$ 。点 D 由点 A 出发沿 AB 方向向点 B 匀速运动，同时点 E 由点 B 出发沿 BC 方向向点 C 匀速运动，它们的速度均为 1cm/s 。连接 DE ，设运动时间为 t （ s ）（ $0 < t < 10$ ），解答下列问题：

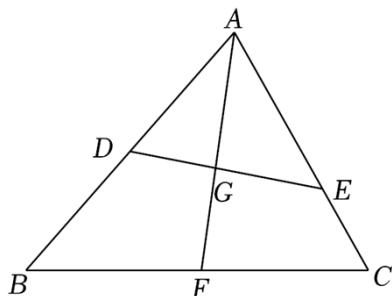
- (1) 当 t 为何值时， $DE \perp BC$ ；

(2) 在点 D, E 的运动中, 是否存在时间 t , 使得 $\triangle BDE$ 与 $\triangle ABC$ 相似? 若存在, 请求出对应的时间 t ; 若不存在, 请说明理由.

【变式 4-6】(2022 秋·碑林区校级期中) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是 AB, AC 上的点, $\angle AED = \angle ABC$, $\angle BAC$ 的平分线 AF 交 DE 于点 G , 交 BC 于点 F .

(1) 求证: $\triangle AGE \sim \triangle AFB$.

(2) 若 $\frac{AG}{GF} = \frac{3}{2}$, $GE = 2$, 求 BF 的长.



【题型 5: 直角三角形中射影定理】

【解题方法】

射影定理 直角三角形斜边上的高是它分斜边所得两条线段的比例中项; 且每条直角边都是它在斜边上的射影和斜边的比例中项。

如图 (1): $Rt\triangle ABC$ 中, 若 CD 为高,
 则有 $CD^2 = BD \cdot AD$ 、
 $BC^2 = BD \cdot AB$ 或
 $AC^2 = AD \cdot AB$ 。(证明略)

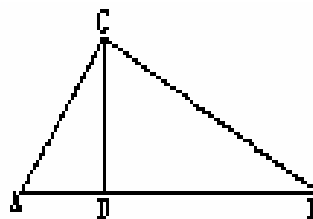


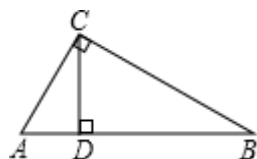
图 (1)

【典例 5】（2022•北京二模）如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，过点 A 作 $AE \perp BC$ 交 BC 于点 E ，点 F 在 BC 的延长线上，且 $CF=BE$ ，连接 DF 。

（1）求证：四边形 $AEFD$ 是矩形；

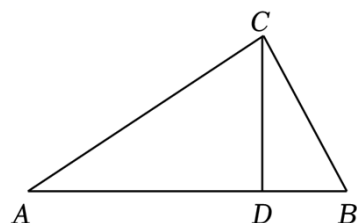
（2）连接 AC ，若 $\angle ACD=90^\circ$ ， $AE=4$ ， $CF=2$ ，求 EC 和 AC 的长。

【变式 5-1】（2023 春•宣汉县校级期末）如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $CD \perp AB$ 于 D ，若 $AD=1$ ， $BD=4$ ，则 $CD=（\quad）$



- A. 2 B. 4 C. $\sqrt{2}$ D. 3

【变式 5-2】（2023•杨浦区一模）如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，垂足为点 D ，下列结论中，错误的是（ $\quad$ ）



- A. $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$ B. $\frac{AD}{AC} = \frac{CD}{BC}$ C. $\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC}$ D. $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$

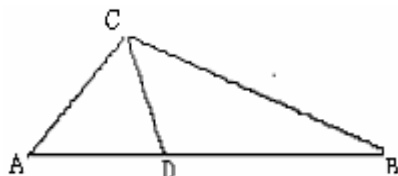
【题型 6：非直角三角形中射影定理】

【解题方法】

若 $\triangle ABC$ 不为直角三角形，当点 D 满足一定条件时，类似地仍有部分结论成立。

（后文简称：射影定理变式（2））

如图（2）： $\triangle ABC$ 中， D 为 AB 上一点，若 $\angle CDB = \angle ACB$ ，或 $\angle DCB = \angle A$ ，则有 $\triangle CDB \sim \triangle ACB$ ，可得 $BC^2 = BD \cdot AB$ ；反之，若 $\triangle ABC$ 中， D 为 AB 上一点，且有 $BC^2 = BD \cdot AB$ ，则有 $\triangle CDB \sim \triangle ACB$ ，可得到 $\angle CDB = \angle ACB$ ，或 $\angle DCB = \angle A$ 。



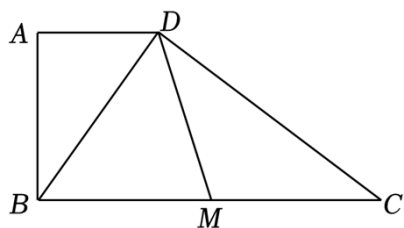
图（2）

【典例 6】（2022 秋·嘉定区期中）已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $BD \perp DC$ ，且 $BD^2 = AD \cdot BC$ ，

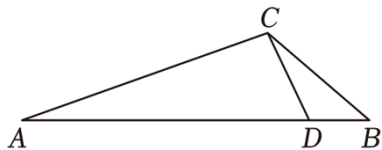
点 M 是边 BC 的中点．

（1）求证： $AD \parallel BC$ ；

（2）作 $BE \perp DM$ ，垂足为点 E ，并交 CD 于点 F ．求证： $2AD \cdot DM = DF \cdot DC$ ．



【变式 6-1】（2023·海曙区模拟）如图， $\angle DCB = \angle A$ ， $CD = 4$ ， $BD = 2$ ， $\angle CDB = 120^\circ$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为 ____．



专题 4.1 相似三角形重难点模型(1) (3 大模型 6 种题型)



重难点题型归纳

【题型 1: 8 字型】

【题型 2: 反 8 字型】

【题型 3: 平行类 A 字型】

【题型 4: 不平行 A 字型】

【题型 5: 直角三角形中射影定理】

【题型 6: 非直角三角形中射影定理】



满分必练

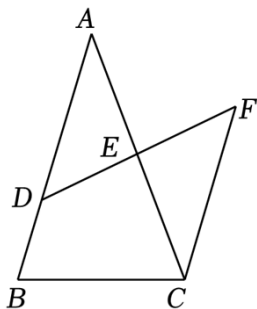
【题型 1: 8 字型】

【基本模型】

【典例 1】 (2023 春·连平县期末) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 AB 上一点, E 是边 AC 的中点, 作 $CF \parallel AB$ 交 DE 的延长线于点 F .

(1) 证明: $\triangle ADE \cong \triangle CFE$;

(2) 若 $AB=AC$, $CE=6$, $CF=8$, 求 DB 的长.



【答案】 (1) 证明见解析过程;

(2) 4.

【解答】 (1) 证明: $\because$ 点 E 是边 AC 的中点,

$\therefore AE=CE$,

又 $\because CF \parallel AB$,

$\therefore \angle A = \angle ACF$, $\angle ADF = \angle F$,

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CFE$ 中，

，

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CFE \text{ (AAS)} ;$$

$$(2) \text{ 解: } \because \triangle ADE \cong \triangle CFE, CF=8,$$

$$\therefore CF=AD=8,$$

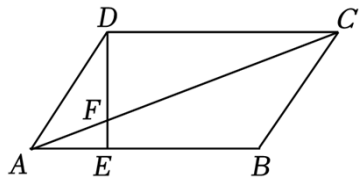
$$\because AB=AC, \text{ 点 } E \text{ 是边 } AC \text{ 的中点}, CE=6,$$

$$\therefore AC=2CE=12,$$

$$\therefore AB=12,$$

$$\therefore DB=AB-AD=12-8=4.$$

【变式 1-1】（2023•路桥区二模）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 为 AB 上一点，且 $AE:EB=1:2$ ， AC 与 DE 相交于点 F ， $S_{\triangle AEF}=3$ ，则 $S_{\triangle ACD}$ 为（ ）



A. 9

B. 12

C. 27

D. 36

【答案】D

【解答】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD, AB=CD.$$

$$\because AE:EB=1:2,$$

$$\therefore AE:AB=1:3,$$

$$\therefore AE:CD=1:3.$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle CDF,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle CDF}} = \left(\frac{AE}{CD}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$\therefore S_{\triangle CDF} = 9S_{\triangle AEF} = 27.$$

$$\because \triangle AEF \sim \triangle CDF,$$

$$\therefore \frac{EF}{DF} = \frac{AE}{CD} = \frac{1}{3},$$

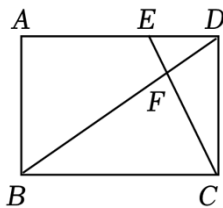
$$\therefore S_{\triangle AEF}:S_{\triangle ADF}=EF:DF=1:3,$$

$$\therefore S_{\triangle ADF} = 3S_{\triangle AEF} = 9,$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = S_{\triangle CDF} + S_{\triangle ADF} = 27 + 9 = 36,$$

故选：D.

【变式 1-2】（2023•大兴区一模）如图，在矩形 $ABCD$ 中， E 是 AD 边上一点，且 $AE = 2DE$ ，连接 CE 交对角线 BD 于点 F ．若 $BD = 10$ ，则 DF 的长为 2.5．



【答案】2.5.

【解答】解：∵ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$$\therefore AD \parallel BC, AD = BC.$$

$$\therefore \triangle EDF \sim \triangle CBF,$$

$$\therefore \frac{DF}{BF} = \frac{ED}{BC}.$$

$$\therefore AE = 2DE,$$

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore,$$

$$\therefore,$$

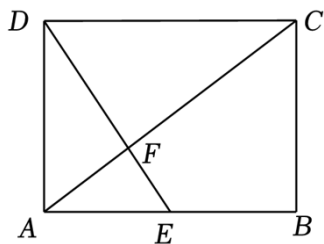
$$\therefore.$$

$$\therefore BD = 10,$$

$$\therefore DF = 10 \times \frac{1}{4} = 2.5.$$

故答案为：2.5.

【变式 1-3】（2023•海淀区校级模拟）如图，在矩形 $ABCD$ 中， E 是边 AB 的中点，连接 DE 交对角线 AC 于点 F ，若 $AB = 4$ ， $DE = \sqrt{13}$ ，则 AF 的长为 $\frac{5}{3}$ ．



【答案】 $\frac{5}{3}$.

【解答】解：∵ 四边形 $ABCD$ 为矩形， $AB=4$ ，

∴ $AB=CD=4$ ， $AB \parallel CD$ ， $\angle ADC = \angle DAB = 90^\circ$ ，

∵ E 是边 AB 的中点，

∴ $AE=BE=\frac{1}{2}AB=2$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DAE$ 中， $DE=\sqrt{13}$ ， $AE=2$ ，

∴ $AD=\sqrt{DE^2-AE^2}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-2^2}=3$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中， $AD=3$ ， $CD=4$ ，

∴ $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ ，

∵ $AB \parallel CD$ ，

∴ $\angle EAF = \angle DCF$ ， $\angle AEF = \angle CDF$ ，

∴ $\triangle AEF \sim \triangle CDF$ ，

∴ $\frac{AF}{CD} = \frac{AE}{CD} = \frac{1}{2}$ ，

∴，

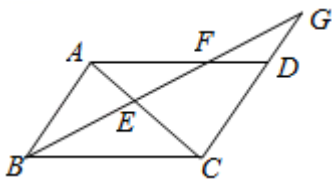
∴ $AF = \frac{1}{3}AC = \frac{5}{3}$.

故答案为： $\frac{5}{3}$.

【变式 1-4】（2022 秋•南开区校级期末）如图，在 $\square ABCD$ 中， G 是 CD 延长线上一点，连接 BG 交 AC ， AD 于 E ， F 。

(1) 求证： $\triangle ABE \sim \triangle CGE$ ；

(2) 若 $AF=2FD$ ，求 $\frac{BE}{EG}$ 的值。



【答案】 (1) 见解答;

(2) $\frac{2}{3}$.

【解答】 (1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CGE,$$

$$\text{又} \because \angle AEB = \angle CGE,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CGE.$$

(2) 解: 设 $FD = m$, 则 $AF = 2m$,

$$\therefore AD = 3m,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC, BC = AD = 3m,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle ECB, \angle AFE = \angle CBE,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle CEB$$

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AF}{BC} = \frac{2}{3},$$

又 $\because \triangle ABE \sim \triangle CGE$,

$$\therefore \frac{BE}{EG} = \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}.$$

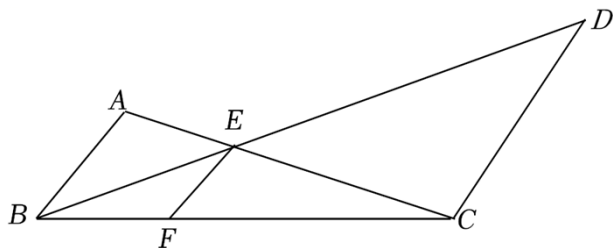
即 $\frac{BE}{EG}$ 的值为 $\frac{2}{3}$.

【变式 1-5】 (2022 秋·长安区校级月考) 如图, 已知 $AB \parallel EF \parallel CD$, AC , BD 相交于点 E , $EF: AB = 2: 3$.

(1) 若 $CE = 4$, 求 AE 的长;

(2) 若 $CD = 6$, 求 AB 的长;

(3) 若四边形 $ABFE$ 的面积为 8, 直接写出 $\triangle CEF$ 的面积.



【答案】 (1) 2; (2) 3; (3) $\frac{32}{5}$.

【解答】解：（1） $\because AB \parallel EF$,

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore EF: AB = 2: 3 = CE: CA,$$

$$\because CE = 4,$$

$$\therefore 2: 3 = 4: CA,$$

$$\therefore CA = 6,$$

$$\therefore AE = CA - CE = 6 - 4 = 2;$$

$$(2) \because AB \parallel EF \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CDE,$$

$$\therefore AB: CD = AE: CE,$$

$$\because EF: AB = 2: 3 = CE: CA,$$

$$\therefore CE: EA = 2: 1,$$

$$\therefore AE: CE = AB: CD = 1: 2,$$

而 $CD = 6$,

$$\therefore AB = 3;$$

$$(3) \because \triangle CEF \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore S_{\triangle CEF}: S_{\triangle CAB} = \left(\frac{EF}{AB}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CEF} + S_{\text{四边形}ABFE}} = \frac{4}{9},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CEF} + 8} = \frac{4}{9},$$

$$\therefore S_{\triangle CEF} = \frac{32}{5}.$$

【变式 1-6】（2022 秋•覃塘区期中）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 在 AB 边上， $AE: EB = 2: 3$ ， DE 交 AC 于点 F 。

（1）求 $\triangle AEF$ 与 $\triangle CDF$ 周长之比；

（2）如果 $\triangle CDF$ 的面积为 20， $\triangle ADF$ 的面积为 8，求四边形 $BEFC$ 的面积。

【答案】 (1) $\frac{2}{5}$; (2) $\frac{124}{5}$.

【解答】解：(1) $\because AE:EB=2:3$,

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{2}{5}.$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore BA \parallel CD, AB=CD$,

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AE}{CD} = \frac{2}{5}.$$

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle CDF$,

$$\therefore \frac{\triangle AEF \text{ 的周长}}{\triangle CDF \text{ 的周长}} = \frac{AE}{CD} = \frac{2}{5};$$

(2) $\because \triangle CDF$ 的面积为 20, $\triangle ADF$ 的面积为 8,

$\therefore \triangle ADC$ 的面积 $= \triangle CDF$ 的面积 $+ \triangle ADF$ 的面积 $= 28$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB \parallel CD, AB=CD$,

$\therefore \triangle ADC$ 与 $\triangle ABC$ 是等底等高的三角形,

$\therefore \triangle ADC$ 的面积 $= \triangle ABC$ 的面积 $= 28$.

由 (1) 知: $\triangle AEF \sim \triangle CDF$,

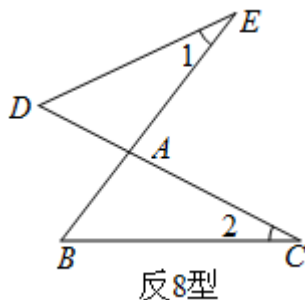
$\therefore$,

$$\therefore S_{\triangle AEF} = 20 \times \frac{4}{25} = \frac{16}{5},$$

$$\therefore \text{四边形 } BEFC \text{ 的面积} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AEF} = 28 - \frac{16}{5} = \frac{124}{5}.$$

【题型 2: 反 8 字型】

【基本模型】



【典例 2】（2023 春•清城区期中）已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ ，且 $CA = CB$ 。

（1）求证： $\angle CAD = \angle CBD$ ；

（2）如图 1，当点 C 和点 D 在 AB 的同侧时，求 $\angle ADC$ 的度数；

（3）如图 2，当点 C 和点 D 在 AB 的异侧时， $\triangle CBD$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得 $\triangle CAE$ ，此时 D 、 A 、 E 三点共线。请判断 AD 、 BD 与 CD 三条线段的数量关系，并说明理由。

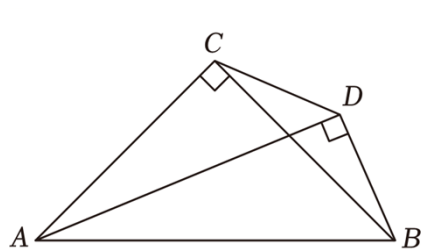


图1

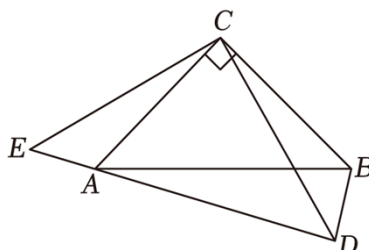


图2

【答案】（1）见解析过程；

（2） 45° ；

（3） $AD + BD = \sqrt{2}CD$ 。证明见解析过程。

【解答】（1）证明： $\because \angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ACO = \angle DBO = 90^\circ$ ，

又 $\because \angle AOC = \angle DOB$ ，

$\therefore \angle CAD = \angle CBD$ ；

（2）解：如图 1，在 AD 上截取 $AE = BD$ ，连接 CE ，

$\because \angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ ，且 $\angle AOC = \angle BOD$ ，

$\therefore \angle CAE = \angle DBC$ ，

又 $\because AC = BC$ ，

$\therefore \triangle CAE \cong \triangle CBD$ （SAS），

$\therefore CE = CD$ ， $\angle ACE = \angle DCB$ ，

$\therefore \angle ECD = \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle CDE$ 为等腰直角三角形，

$\therefore \angle ADC = 45^\circ$ ；

$$(3) AD+BD=\sqrt{2} CD.$$

证明：如图 2，由旋转的性质得： $\triangle CAE \cong \triangle CBD$ ， $\angle ECD = \angle ACB = 90^\circ$ ，

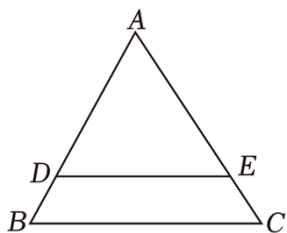
$$\therefore CE = CD, AE = BD,$$

$\therefore \triangle CDE$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore DE = \sqrt{2} CD, \text{ 即 } AD + AE = \sqrt{2} CD,$$

$$\therefore AD + BD = \sqrt{2} CD.$$

【变式 2-1】（2023•巴南区开学）如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 AB 边上一点，过点 D 作 $DE \parallel BC$ 交 AC 于点 E ，若 $AD:DB=3:1$ ，则 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}$ 的值为（ ）



- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{16}{9}$ D. $\frac{9}{16}$

【答案】D

【解答】解： $\because DE \parallel BC$ ，

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

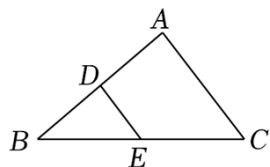
$$\because AD:DB=3:1,$$

$$\therefore AD:AB=3:4,$$

$$\therefore S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

故选：D.

【变式 2-2】（2023 春•东莞市期中）如图，点 D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 边 BA 、 BC 的中点， $AC=3$ ，则 DE 的长为（ ）



- A. 2 B. $\frac{3}{4}$ C. 3 D. $\frac{3}{2}$

【答案】D

【解答】解： $\because$ 点 D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BA 、 BC 的中点，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/825041042020011330>