

专题 2.6 等腰三角形的轴对称性 (2): 等边三角形

【名师点睛】

1. 等边三角形的性质

(1) 等边三角形的定义: 三条边都相等的三角形叫做等边三角形, 等边三角形是特殊的等腰三角形.

①它可以作为判定一个三角形是否为等边三角形的方法;

②可以得到它与等腰三角形的关系: 等边三角形是等腰三角形的特殊情况. 在等边三角形中, 腰和底、顶角和底角是相对而言的.

(2) 等边三角形的性质: 等边三角形的三个内角都相等, 且都等于 60° .

等边三角形是轴对称图形, 它有三条对称轴; 它的任意一角的平分线都垂直平分对边, 三边的垂直平分线是对称轴.

2. 等边三角形的判定

(1) 由定义判定: 三条边都相等的三角形是等边三角形.

(2) 判定定理 1: 三个角都相等的三角形是等边三角形.

(3) 判定定理 2: 有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形.

说明: 在证明一个三角形是等边三角形时, 若已知或能求得三边相等则用定义来判定; 若已知或能求得三个角相等则用判定定理 1 来证明; 若已知等腰三角形且有一个角为 60° , 则用判定定理 2 来证明.

【典例剖析】

【例 1】(2020 秋·赣榆区期中) 如图 1, 点 P 、 Q 分别是等边 $\triangle ABC$ 边 AB 、 BC 上的动点 (端点除外), 点 P 从顶点 A 、点 Q 从顶点 B 同时出发, 且它们的运动速度相同, 连接 AQ 、 CP 交于点 M .

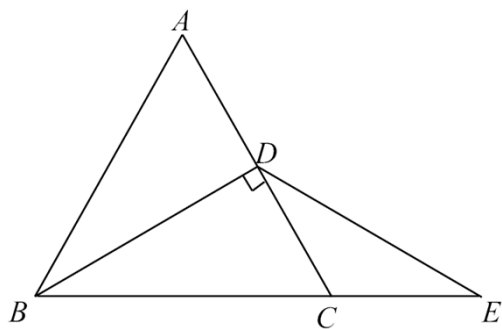
(1) 求证: $\triangle ABQ \cong \triangle CAP$;

(2) 当点 P 、 Q 分别在 AB 、 BC 边上运动时, $\angle QMC$ 变化吗? 若变化, 请说明理由; 若不变, 求出它的度数.

(3) 如图 2, 若点 P 、 Q 在运动到终点后继续在射线 AB 、 BC 上运动, 直线 AQ 、 CP 交点为 M , 则 $\angle QMC$ 变化吗? 若变化, 请说明理由; 若不变, 则求出它的度数.

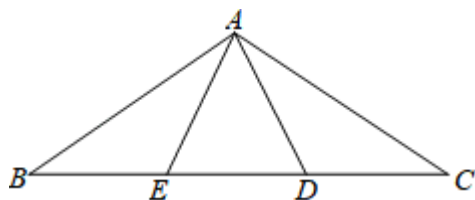
【变式 1】(2021 秋·玄武区期中) 如图, 等边 $\triangle ABC$ 中, BD 是边 AC 上的高, 延长 BC 到点 E , 使 $CE =$

CD ，求证： $BD=DE$ 。



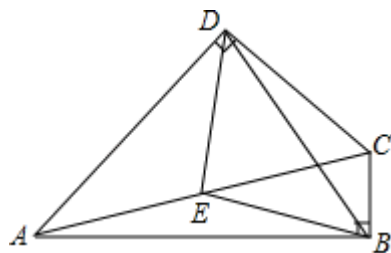
【例 2】（2020 秋•赣榆区期中）如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle BAC=120^\circ$ ，点 D 、 E 在 BC 上，且 $AE=BE$ 。

- （1）求 $\angle CAE$ 的度数；
- （2）若点 D 为线段 EC 的中点，求证： $\triangle ADE$ 是等边三角形。

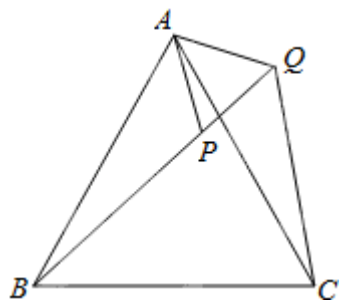


【变式 2.1】（2019 秋•工业园区期末）已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$ ，点 E 是 AC 的中点。

- （1）求证： $\triangle BED$ 是等腰三角形；
- （2）当 $\angle BCD=$ _____° 时， $\triangle BED$ 是等边三角形。



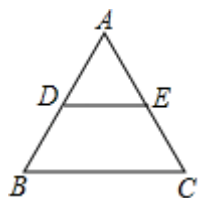
【变式 2.2】等边 $\triangle ABC$ 中，点 P 在 $\triangle ABC$ 内，点 Q 在 $\triangle ABC$ 外，且 $\angle ABP=\angle ACQ$ ， $BP=CQ$ ，问 $\triangle APQ$ 是什么形状的三角形？试说明你的结论。



【满分训练】

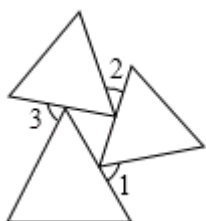
一. 选择题（共 10 小题）

1. （2019 秋•盐都区期中）如图， $\triangle ABC$ 是等边三角形， $DE \parallel BC$ ，若 $AB=10$ ， $BD=6$ ，则 $\triangle ADE$ 的周长为（ ）



- A. 4 B. 30 C. 18 D. 12

2. （2022 春•江都区校级月考）三个等边三角形的摆放位置如图所示，若 $\angle 1 + \angle 2 = 100^\circ$ ，则 $\angle 3$ 的度数为（ ）

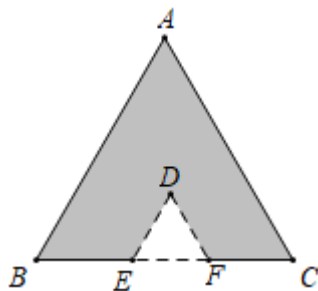


- A. 80° B. 70° C. 45° D. 30°

3. （2021 秋•鼓楼区月考）在等边三角形 ABC 中， AD 是高， $\angle B$ 的平分线交 AD 于 E ，下面判断中错误的是（ ）

- A. 点 E 在 AB 的垂直平分线上
 B. 点 E 到 AB 、 BC 、 AC 的距离相等
 C. 点 E 是 AD 的中点
 D. 过点 E 且垂直于 AB 的直线必经过点 C

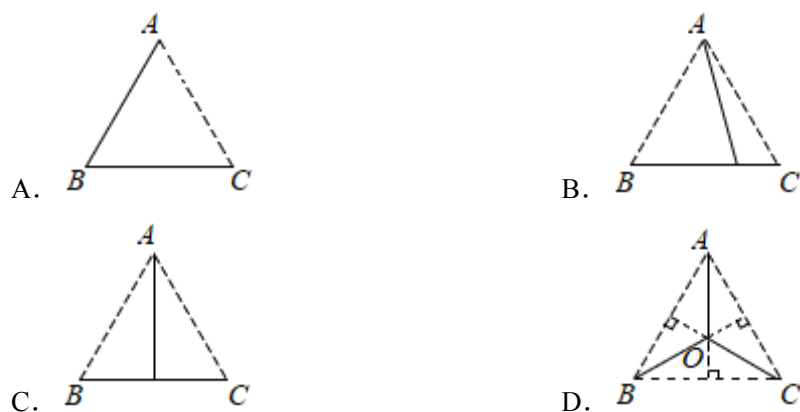
4. （2021 秋•崇川区校级月考）如图，等边三角形纸片 ABC 的周长为 6， E ， F 是边 BC 上的三等分点．分别过点 E ， F 沿着平行于 BA ， CA 的方向各剪一刀，则剪下的 $\triangle DEF$ 的周长是（ ）



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. （2021 秋•鼓楼区期中）已知三个城镇中心 A 、 B 、 C 恰好位于等边三角形的三个顶点，在 A 、 B 、 C

之间铺设光缆连接，实线为所铺的路线，四种方案中光缆铺设路线最短的是（ ）



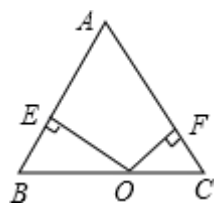
6. (2021 秋•如皋市期中) 等边三角形两条中线相交所成的锐角的度数为（ ）

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 75°

7. (2021 秋•新吴区期中) 在等边 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别为 AB 、 AC 边上的动点， $BD=2AE$ ，连接 DE ，以 DE 为边在 $\triangle ABC$ 内作等边 $\triangle DEF$ ，连接 CF ，当 D 从点 A 向 B 运动（不运动到点 B ）时， $\angle ECF$ 大小的变化情况是（ ）

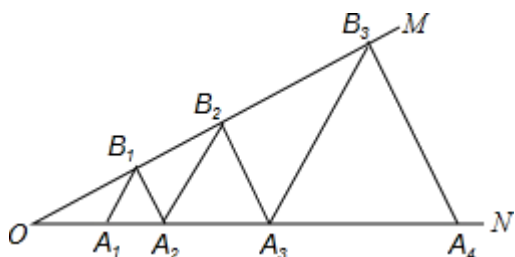
- A. 不变 B. 变小
C. 变大 D. 先变大后变小

8. (2019 秋•玄武区校级期中) 如图，已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，点 O 是 BC 上任意一点， OE ， OF 分别于两边垂直，等边三角形的高为 2 ，则 $OE+OF$ 的值为（ ）



- A. 1 B. 3 C. 2 D. 4

9. (2015 秋•北塘区期中) 如图，已知 $\angle MON=30^\circ$ ，点 A_1 、 A_2 、 $A_3\cdots$ 在射线 ON 上，点 B_1 、 B_2 、 $B_3\cdots$ 在射线 OM 上； $\triangle A_1B_1A_2$ 、 $\triangle A_2B_2A_3$ 、 $\triangle A_3B_3A_4\cdots$ 均为等边三角形。若 $OA_1=1$ ，则 $\triangle A_{2015}B_{2015}A_{2016}$ 的边长为（ ）

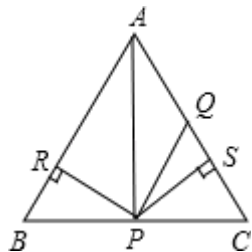


A. 4028

B. 4030

C. 2^{2014} D. 2^{2015}

10. (2016 秋·建湖县期末) 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形, $AQ=PQ$, $PR \perp AB$ 于点 R , $PS \perp AC$ 于点 S , $PR=PS$, 则下列结论: ①点 P 在 $\angle A$ 的角平分线上; ② $AS=AR$; ③ $QP \parallel AR$; ④ $\triangle BRP \cong \triangle QSP$. 正确的有 ()



A. 1 个

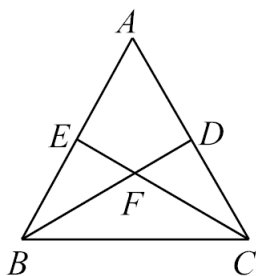
B. 2 个

C. 3 个

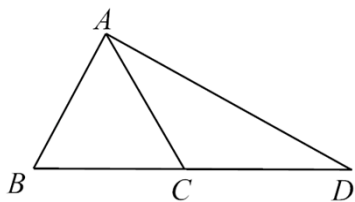
D. 4 个

二. 填空题 (共 8 小题)

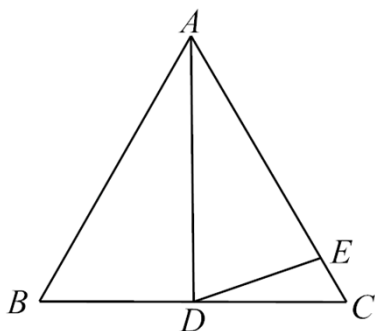
11. (2021 秋·泰兴市月考) 如图, BD 、 CE 是等边 $\triangle ABC$ 的中线, 则 $\angle EFD$ 的度数为 _____.



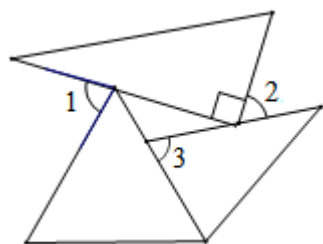
12. (2021 秋·工业园区校级期中) 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形, 延长 BC 到点 D , 使 $CD=AC$, 连接 AD . 若 $AB=3$, 则 AD 的长为 _____.



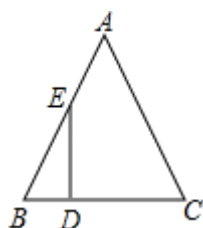
13. (2021 秋·东台市期中) 如图, 等边 $\triangle ABC$ 中, AD 是中线, 点 E 是 AC 边上一点, $AD=AE$, 则 $\angle EDC$ = _____.



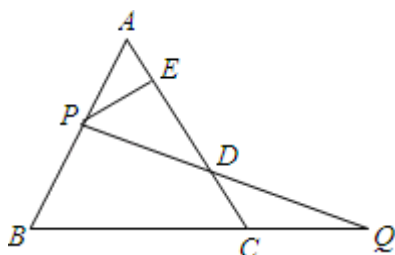
14. (2019 秋•崇川区校级月考) 一个等边三角形, 一个直角三角形以及一个等腰三角形如图放置, 等腰三角形的底角 $\angle 3 = 80^\circ$, 则 $\angle 1 + \angle 2 =$ _____.



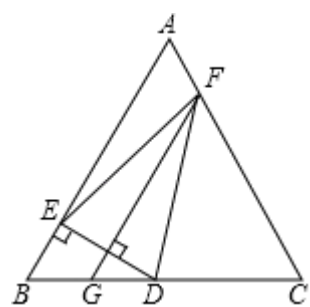
15. (2019 秋•鼓楼区期末) 如图, $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形, D 是 BC 上一点, $BD = 2$, $DE \perp BC$ 交 AB 于点 E , 则 $AE =$ _____.



16. (2021 秋•新吴区期中) 如图, 过边长为 4 的等边 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点 P , 作 $PE \perp AC$ 于 E , Q 为 BC 延长线上一点, 当 $PA = CQ$ 时, 连 PQ 交 AC 边于 D , 则 DE 的长为 _____.



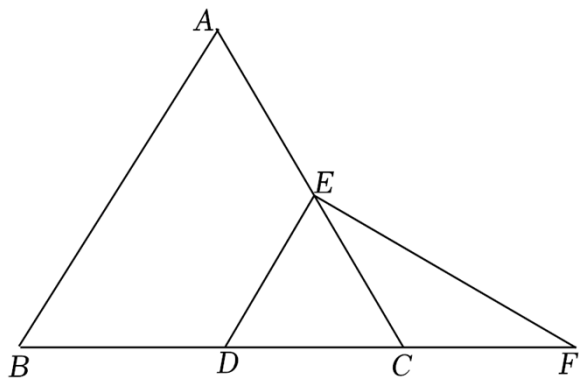
17. (2019 秋•江阴市期中) 在下列结论中: ①有三个角是 60° 的三角形是等边三角形; ②有一个外角是 120° 的等腰三角形是等边三角形; ③有一个角是 60° , 且是轴对称的三角形是等边三角形; ④有一腰上的高也是这腰上的中线的等腰三角形是等边三角形. 其中正确的是 _____.
18. (2020 春•淮安区校级期末) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形, D 是 BC 边上的一个动点 (异于点 B 、 C), 过点 D 作 $DE \perp AB$, 垂足为 E , DE 的垂直平分线分别交 AC 、 BC 于点 F 、 G , 连接 FD , FE . 当点 D 在 BC 边上移动时, 有下列三个结论: ① $\triangle DEF$ 一定为等腰三角形, ② $\triangle CFG$ 一定为等边三角形, ③ $\triangle FDC$ 可能为等腰三角形. 其中正确的是 _____ (填写序号)



三. 解答题 (共 11 小题)

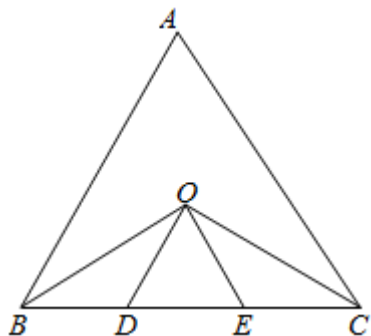
19. (2021 秋•徐州期中) 如图, 在等边 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, 过点 D 作 $DE \parallel AB$ 交 AC 于点 E , 过点 E 作 $EF \perp DE$, 交 BC 的延长线于点 F .

- (1) 求 $\angle F$ 的度数;
- (2) 求证: $DC = CF$.



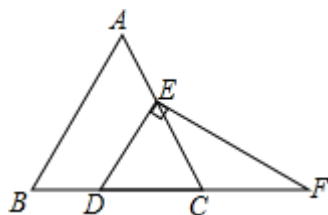
20. (2021 秋•连云港期末) 如图, 在等边 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 O , 且 $OD \parallel AB$, $OE \parallel AC$.

- (1) 试判定 $\triangle ODE$ 的形状, 并说明你的理由;
- (2) 若 $BC = 10$, 求 $\triangle ODE$ 的周长.

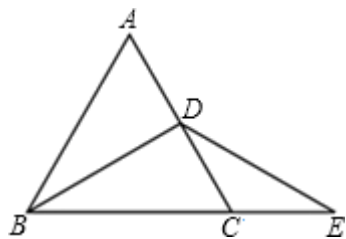


21. (2021 秋•崇川区校级月考) 如图, 在等边 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别在边 BC, AC 上, $DE \parallel AB$, 过点 E 作 $EF \perp DE$, 交 BC 的延长线于点 F .

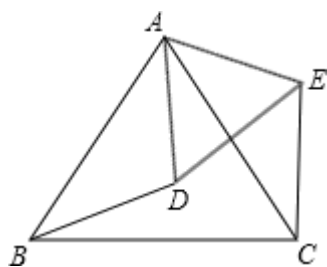
- (1) 求 $\angle F$ 的度数.
- (2) 求证: $DC = CF$.



22. (2019 秋•平山县期中) 如图 $\triangle ABC$ 是等边三角形, BD 是中线, 延长 BC 到 E , 使 $CE=CD$. 求证: $DB=DE$.

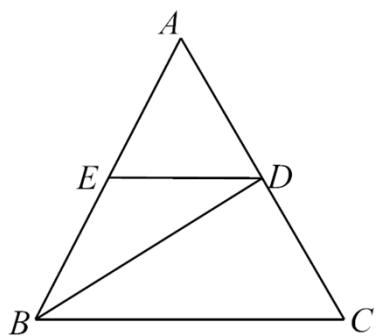


23. (2011 秋•启东市校级月考) 如图: $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是等边三角形. 证明: $BD=CE$.



24. (2021 秋•宝应县期中) 如图, $\triangle ABC$ 为等边三角形, BD 平分 $\angle ABC$, BD 交 AC 于点 D , $DE \parallel BC$, DE 交 AB 于点 E .

- (1) 判断 $\triangle ADE$ 的形状, 并说明理由.
(2) 判断 AE 与 AB 的数量关系, 并说明理由.



专题 2.6 等腰三角形的轴对称性 (2): 等边三角形

【名师点睛】

1. 等边三角形的性质

(1) 等边三角形的定义: 三条边都相等的三角形叫做等边三角形, 等边三角形是特殊的等腰三角形.

①它可以作为判定一个三角形是否为等边三角形的方法;

②可以得到它与等腰三角形的关系: 等边三角形是等腰三角形的特殊情况. 在等边三角形中, 腰和底、顶角和底角是相对而言的.

(2) 等边三角形的性质: 等边三角形的三个内角都相等, 且都等于 60° .

等边三角形是轴对称图形, 它有三条对称轴; 它的任意一角的平分线都垂直平分对边, 三边的垂直平分线是对称轴.

2. 等边三角形的判定

(1) 由定义判定: 三条边都相等的三角形是等边三角形.

(2) 判定定理 1: 三个角都相等的三角形是等边三角形.

(3) 判定定理 2: 有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形.

说明: 在证明一个三角形是等边三角形时, 若已知或能求得三边相等则用定义来判定; 若已知或能求得三个角相等则用判定定理 1 来证明; 若已知等腰三角形且有一个角为 60° , 则用判定定理 2 来证明.

【典例剖析】

【例 1】(2020 秋·赣榆区期中) 如图 1, 点 P 、 Q 分别是等边 $\triangle ABC$ 边 AB 、 BC 上的动点 (端点除外), 点 P 从顶点 A 、点 Q 从顶点 B 同时出发, 且它们的运动速度相同, 连接 AQ 、 CP 交于点 M .

(1) 求证: $\triangle ABQ \cong \triangle CAP$;

(2) 当点 P 、 Q 分别在 AB 、 BC 边上运动时, $\angle QMC$ 变化吗? 若变化, 请说明理由; 若不变, 求出它的度数.

(3) 如图 2, 若点 P 、 Q 在运动到终点后继续在射线 AB 、 BC 上运动, 直线 AQ 、 CP 交点为 M , 则 $\angle QMC$ 变化吗? 若变化, 请说明理由; 若不变, 则求出它的度数.

【分析】(1) 根据等边三角形的性质, 利用 SAS 证明 $\triangle ABQ \cong \triangle CAP$;

(2) 由 $\triangle ABQ \cong \triangle CAP$ 根据全等三角形的性质可得 $\angle BAQ = \angle ACP$, 从而得到 $\angle QMC = 60^\circ$;

(3) 由 $\triangle ABQ \cong \triangle CAP$ 根据全等三角形的性质可得 $\angle BAQ = \angle ACP$, 从而得到 $\angle QMC = 120^\circ$.

【解答】(1) 证明: $\because \triangle ABC$ 是等边三角形

$$\therefore \angle ABQ = \angle CAP, AB = CA,$$

又 $\because$ 点 P 、 Q 运动速度相同,

$$\therefore AP = BQ,$$

在 $\triangle ABQ$ 与 $\triangle CAP$ 中,

$\therefore$,

$$\therefore \triangle ABQ \cong \triangle CAP \text{ (SAS)};$$

(2) 解: 点 P 、 Q 在运动的过程中, $\angle QMC$ 不变.

理由: $\because \triangle ABQ \cong \triangle CAP$,

$$\therefore \angle BAQ = \angle ACP,$$

$$\therefore \angle QMC = \angle ACP + \angle MAC,$$

$$\therefore \angle QMC = \angle BAQ + \angle MAC = \angle BAC = 60^\circ \cdots (6 \text{ 分})$$

(3) 解: 点 P 、 Q 在运动到终点后继续在射线 AB 、 BC 上运动时, $\angle QMC$ 不变. (7 分)

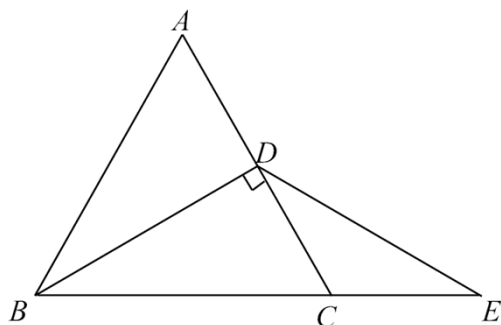
理由: $\because \triangle ABQ \cong \triangle CAP$,

$$\therefore \angle BAQ = \angle ACP,$$

$$\therefore \angle QMC = \angle BAQ + \angle APM,$$

$$\therefore \angle QMC = \angle ACP + \angle APM = 180^\circ - \angle PAC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

【变式 1】(2021 秋·玄武区期中) 如图, 等边 $\triangle ABC$ 中, BD 是边 AC 上的高, 延长 BC 到点 E , 使 $CE = CD$, 求证: $BD = DE$.



【分析】由等边三角形的性质得出 $\angle ABD = \angle CBD = 30^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$, 证出 $\angle CDE = \angle CED = 30^\circ$, 则可得出结论.

【解答】证明: $\because$ 等边 $\triangle ABC$ 中, BD 是边 AC 上的高,

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = 30^\circ, \angle ACB = 60^\circ,$$

$$\therefore CE = CD,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle CED = 30^\circ ,$$

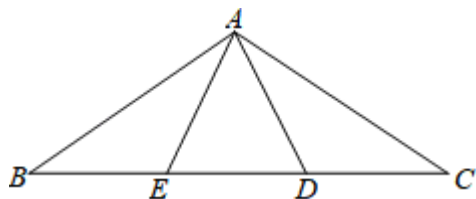
$$\therefore \angle DBC = \angle CED,$$

$$\therefore BD = DE.$$

【例 2】（2020 秋•赣榆区期中）如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ，点 D 、 E 在 BC 上，且 $AE = BE$ 。

（1）求 $\angle CAE$ 的度数；

（2）若点 D 为线段 EC 的中点，求证： $\triangle ADE$ 是等边三角形。



【分析】（1）根据等腰三角形的性质和三角形内角和是 180° ，可以求得 $\angle CAE$ 的度数；

（2）根据直角三角形的性质和等边三角形的判定，可以得到结论成立。

【解析】（1） $\because AB = AC$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ，

$$\therefore \angle B = \angle C = 30^\circ ,$$

$$\because AE = BE,$$

$$\therefore \angle B = \angle EAB,$$

$$\therefore \angle EAB = 30^\circ ,$$

$$\because \angle BAC = 120^\circ ,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle BAC - \angle EAB = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ ,$$

即 $\angle CAE = 90^\circ$ ；

（2）方法一：证明：由（1）知， $\angle CAE = 90^\circ$ ，

$$\because \angle C = 30^\circ ,$$

$$\therefore \angle AEC = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle DEA = 60^\circ ,$$

$\because$ 点 D 为线段 EC 的中点，

$$\therefore AD = DE,$$

$$\therefore \angle DEA = \angle DAE,$$

$$\text{又} \because \angle DEA = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle DEA = \angle DAE = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle ADE = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle DEA = \angle DAE = \angle ADE,$$

$\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形。

方法二：证明：由（1）知， $\angle CAE = 90^\circ$ ，

$$\because \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AEC = 60^\circ, \quad AE = \frac{1}{2}CE,$$

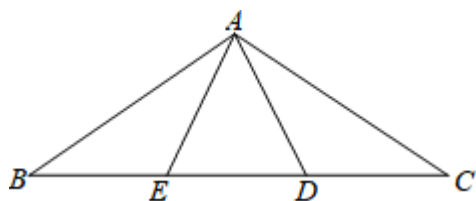
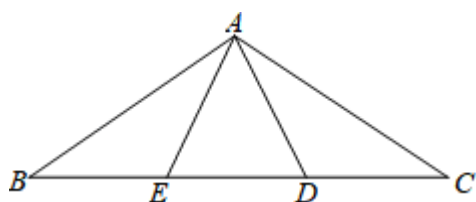
$$\therefore \angle DEA = 60^\circ,$$

$\because$ 点 D 为 EC 的中点,

$$\therefore AD = \frac{1}{2}CE = DE,$$

$$\therefore AD = DE = AE,$$

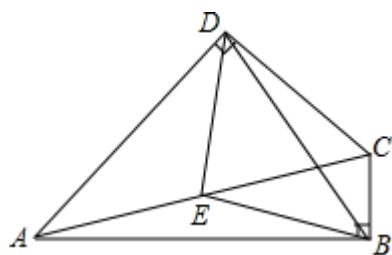
$\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形.



【变式 2.1】(2019 秋·工业园区期末) 已知: 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, 点 E 是 AC 的中点.

(1) 求证: $\triangle BED$ 是等腰三角形;

(2) 当 $\angle BCD = \underline{150}^\circ$ 时, $\triangle BED$ 是等边三角形.



【分析】(1) 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得 $BE = \frac{1}{2}AC$, $DE = \frac{1}{2}AC$, 从而得到 $BE = DE$.

(2) 利用等边对等角以及三角形外角的性质得出 $\frac{1}{2}\angle DEB = \angle DAB$, 即可得出 $\angle DAB = 30^\circ$, 然后根据四边形内角和即可求得答案.

【解答】证明: (1) $\because \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, 点 E 是 AC 边的中点,

$$\therefore BE = \frac{1}{2}AC, \quad DE = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore BE = DE,$$

$\therefore \triangle BED$ 是等腰三角形;

(2) $\because AE=ED$,

$\therefore \angle DAE=\angle EDA$,

$\because AE=BE$,

$\therefore \angle EAB=\angle EBA$,

$\because \angle DAE+\angle EDA=\angle DEC$,

$\angle EAB+\angle EBA=\angle BEC$,

$\therefore \angle DAB=\frac{1}{2}\angle DEB$,

$\because \triangle BED$ 是等边三角形,

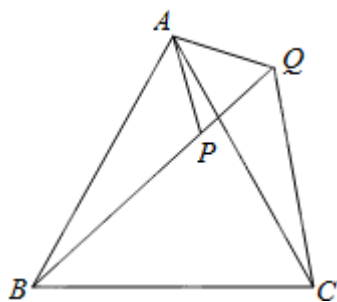
$\therefore \angle DEB=60^\circ$,

$\therefore \angle BAD=30^\circ$,

$\therefore \angle BCD=360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

故答案为: 150.

【变式 2.2】等边 $\triangle ABC$ 中, 点 P 在 $\triangle ABC$ 内, 点 Q 在 $\triangle ABC$ 外, 且 $\angle ABP=\angle ACQ$, $BP=CQ$, 问 $\triangle APQ$ 是什么形状的三角形? 试说明你的结论.



【分析】先证 $\triangle ABP \cong \triangle ACQ$ 得 $AP=AQ$, 再证 $\angle PAQ=60^\circ$, 从而得出 $\triangle APQ$ 是等边三角形.

【解析】 $\triangle APQ$ 为等边三角形.

证明: $\because \triangle ABC$ 为等边三角形,

$\therefore AB=AC$.

在 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ACQ$ 中,

$\because$,

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle ACQ$ (SAS).

$\therefore AP=AQ$, $\angle BAP=\angle CAQ$.

$\because \angle BAC=\angle BAP+\angle PAC=60^\circ$,

$\therefore \angle PAQ=\angle CAQ+\angle PAC=60^\circ$,

$\therefore \triangle APQ$ 是等边三角形.

【满分训练】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。
如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/825132304114011331>