专题 02 不等式与基本不等式

目 录

题型一：不等式性质及解法

易错点 01：忽略不等式性质成立的前提条件

易错陷阱与避错攻略

典例 2．（24-25 高三上·上海·期中）若 a、b、$c\in\mathrm{R}$，$a>b$，则下列不等式中成立的是（ ）

A．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B．$a^2>b^2$

C．$\frac{a}{c^2+1}>\frac{b}{c^2+1}$　　D．$a|c|>b|c|$

【答案】C

【分析】由不等式的性质和反例即可判断.

【详解】对于 AB：取 $a=1,b=-1$，满足 $a>b$，显然 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，$a^2>b^2$ 不成立，错误；

对于 C：因为 $\frac{1}{c^2+1}>0$，所以 $\frac{a}{c^2+1}>\frac{b}{c^2+1}$，正确；

对于 D：取 $c=0$，显然 $a|c|>b|c|$ 不成立，错误，

故选：C

【易错剖析】

在应用不等式性质进行判断时，若忽略 *a,b* 是否同号，容易错选 *A*，若忽略 *a,b* 不一定同大于零，容易错选 *B*，由于忽略 *c* 是否为零，容易错选 *D*.

【避错攻略】

1 不等式的性质及推论

性质 1：不等式的传递性：设 a，b，c 均为实数，如果 $a>b$ 且 $b>c$，那么 $a>c$

性质 2：不等式的加法性质：设 a，b，c 均为实数，如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$

性质 3：不等式的乘法性质：设 a，b，c 均为实数，如果 $a>b$ 且 $c>0$，那么 $ac>bc$，如果 $a>b$ 且 $c<0$，那么 $ac<bc$

推论 1. 如果$a>b,c>d$那么$a+c>b+d$

推论 2. 如果$a>b,c<d$那么$a-c>b-d$

推论 3. 如果$a>b>0,c>d>0$那么$ac>bd$

推论 4. 如果$a>b>0$,那么$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

推论 5. 如果$a>b>0,d>c>0$那么$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

推论 6. 如果$a>b>0$,那么$a^n>b^n$(n是正自然数)

推论 7. 如果$a>b>0$,那么$a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$ (n是正自然数)

【提醒】（1）不等式的性质 3 中在不等式两边同乘一个因式时一定要判断正负；

（2）推论 1 逆命题不成立，且“同向不等式只能相加，不等号方向不变，不能相减”.

（3）推论 3、推论 5、推论 6、推论 7 中要注意成立的前提条件，即均为正数的同向不等式相乘，得同向不等式，并无相除式.

2 判断不等关系成立的常用方法：

（1）直接利用不等式的性质进行推理判断.；

（2）比较法：一是作差比较：即作差、变形、判断差式与 0 的大小、下结论；二是作商法：即作商、变形、判断商式与 1 的大小、下结论.

（3）构造函数利用函数的单调性；

（4）特殊值排除法.

易错提醒：(1)一般数学结论都有前提，不等式性质也是如此．在运用不等式性质之前，一定要准确把握前提条件，一定要注意不可随意放宽其成立的前提条件.

(2)不等式性质包括“充分条件(或者是必要条件)”和“充要条件”两种，前者一般是证明不等式的理论基础，后者一般是解不等式的理论基础.

举一反三

1．（24-25 高三上·河北沧州·期中）已知$a>b>c$，则下列不等式一定成立的是（　）

A．$ab>bc$　　　　B．$ac^2>bc^2$

C．$\frac{a}{a-c}>\frac{b}{a-c}$　　D．$a(a-c)>b(b-c)$

【答案】C

【分析】对 A，举反例；对 B，举反例；对 C，根据不等式性质推理可得；对 D，举反例说明.

【详解】对于 A，当$a=1,b=-1,c=-2$时，不满足$ab>bc$，故 A 错误；

对于 B，当$c=0$时，$ac^2=bc^2$，故 B 错误；

对于 C，因为$a>b>c$，所以$a-c>0$，所以$\frac{1}{a-c}>0$，则$\frac{a}{a-c}>\frac{b}{a-c}$，故 C 正确；

对于 D，当$a=-1,b=-2,c=-3$时，不满足$a(a-c)>b(b-c)$，故 D 错误.

故选：C.

2．（2024·福建泉州·一模）若实数$a>b>0$，则下列不等式一定不成立的是（　）

A．$0.3^a<0.3^b$　　B．$\lg a>\lg b$　　C．$\frac{1}{a-1}<\frac{1}{b-1}$　　D．$\sqrt{a}>\sqrt{b}$

【答案】C

【分析】根据指数函数的性质判断 A，根据对数函数的性质判断 B，利用特殊值判断 C，根据幂函数的性质判断 D.

【详解】因为$y=0.3^x$在定义域R上单调递减且$a>b>0$，所以$0.3^a<0.3^b$，故 A 正确；

因为$y=\lg x$在定义域$(0,+\infty)$上单调递增且$a>b>0$，所以$\lg a>\lg b$，故 B 正确；

当$a>1>b>0$时，$\frac{1}{a-1}>0>\frac{1}{b-1}$，故 C 不正确；

因为$y=\sqrt{x}$在定义域$[0,+\infty)$上单调递增且$a>b>0$，所以$\sqrt{a}>\sqrt{b}$，故 D 正确.

故选：C.

3．（24-25 高三上·山东泰安·期中）（多选）已知 a，b，$x\in\mathbf{R}$，则下列命题正确的是（　）

A．若$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，则$a>b$　　B．若$a>b$，则$ae^x>be^x$

C．若$a>b>0$，则$\frac{b+1}{a+1}>\frac{b}{a}$　　D．若$\ln\frac{a}{b}>0$，则$a>b$

【答案】BC

【分析】由不等式的基本性质即可判定各个选项.

【详解】A 选项：当$a=-1$，$b=2$时，$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，但$a<b$，故 A 错误；

B 选项：$\because e^x>0$，$\therefore$当$a>b$时，$ae^x>be^x$，故 B 正确；

C 选项：$\because a>b>0$，$\therefore a+ab>b+ab$，$a(1+b)>b(1+a)$，由$\because a+1>0,a>0$，

$\therefore \frac{1+b}{1+a}=\frac{a(1+b)}{a(1+a)}>\frac{b(1+a)}{a(1+a)}=\frac{b}{a}$，故 C 正确；

D 选项：$\ln\frac{a}{b}>0$，则 $\frac{a}{b}>1$，当 $b<0$ 时，$a<b$，故 D 错误.

故选：BC.

易错题通关

1．（24-25 高三上·上海·期中）已知 $a<b<0$，则（　）

A．$\frac{a}{b}<1$　　B．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　C．$ab<b^2$　　D．$a^2>b^2$

【答案】D

【分析】根据不等式的性质判断，错误的可举例说明.

【详解】$a<b<0$，例如 $a=-2,b=-1$，此时 $\frac{a}{b}=2>1$，$\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}>-1=\frac{1}{b}$，$ab=2>1=b^2$，ABC 均错；

$a<b<0$ 时，$a-b<0,a+b<0$，$a^2-b^2=(a-b)(a+b)>0$，即 $a^2>b^2$，D 正确.

故选：D.

2．（23-24 高三上·四川泸州·阶段练习）若 $a>b>0$，$c<0$，则下列结论正确的是（　）

A．$ac>bc$　　B．$a+c<b+c$

C．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　D．$a-c<b-c$

【答案】C

【分析】根据不等式的性质以及作差法可求得结果.

【详解】对于 A：因为 $a>b>0$，$c<0$，利用不等式的性质得 $ac<bc$，故 A 错误；

对于 B：根据不等式可加性可知：$a>b>0$，$c<0$，则 $a+c>b+c$，故 B 错误；

对于 C：作差可得 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$，因为 $a>b>0$，所以 $ab>0,b-a<0$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，故 C 正确；

对于 D：$c<0$，则 $-c>0$，根据不等式可加性可知：$a-c>b-c$，故 D 错误.

故选：C.

3．（24-25 高三上·山东临沂·期中）已知非零实数 a，b 满足 $a>b$，则（　）

A．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B．$a^2>b^2$　　C．$a^3>b^3$　　D．$ac^2>bc^2$

【答案】C

【分析】根据给定的条件，结合不等式的性质以及作差法，可得答案.

【详解】对于 A，当$a>0>b$时，$\frac{1}{a}>0>\frac{1}{b}$，故 A 错误；

对于 B，当$a=1,b=-2$时，显然$a>b$，但是$a^2<b^2$，故 B 错误；

对于 C，当$ab>0$时，$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)>0$，当$ab<0$时，$a>0>b$，则$a^3>0>b^3$，故 C 正确；

对于 D，当$c=0$时，$ac^2=bc^2=0$，故 D 错误.

4．（24-25 高三上·广东·阶段练习）下列结论正确的是（　）

A．若$a>b>0$，则$ac^2>bc^2$　　　　B．若$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，则$a<b$

C．$a+\frac{1}{a}\geqslant 2$　　　　D．$a^2\geqslant 2a-3$

【答案】D

【分析】对于 A,B,C 用特殊值即可排除,对于 D,用作差法即可比较大小.

【详解】对于 A,取$c^2=0$,此时$ac^2=bc^2$,故 A 错误；

对于 B,取$a=1,b=-1$,满足$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,此时$a>b$,故 B 错误；

对于 C,取$a=-1$,此时$a+\frac{1}{a}=-2$,故 C 错误；

对于 D,因为$a^2-(2a-3)=(a-1)^2+2>0$,故$a^2>2a-3$,所以$a^2\geq 2a-3$正确.

故选：D.

5．（24-25 高三上·重庆·期中）已知$a>b$，$c<d<0$，则（　）

A．$a+c>b+d$　　B．$a+c^2>b+d^2$　　C．$ac>bd$　　D．$ac^2>bd^2$

【答案】B

【分析】由不等式的性质可得 B；举出反例可得 A、C、D.

【详解】对 A：取$a=1$，$b=0$，$c=-2$，$d=-1$，此时$a+c=b+d=-1$，故 A 错误；

对 B：由$c<d<0$，则$c^2>d^2$，又$a>b$，故$a+c^2>b+d^2$，故 B 正确；

对 C：取$a=1$，$b=0$，$c=-2$，$d=-1$，此时$ac=-2<bd=0$，故 C 错误；

对 D：取$a=-1$，$b=-2$，$c=-2$，$d=-1$，此时$ac^2=-4<bd^2=-2$，故 D 错误；

故选：B.

6．（24-25 高三上·山东聊城·期中）已知$a,b,c\in\mathbf{R},a>b$，则下列不等式一定成立的是（　）

A．$a^2>b^2$　　B．$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$　　C．$\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$　　D．$ac^2>bc^2$

【答案】C

【分析】根据题意，分别举出反例即可判断 ABD，由指数函数的单调性，即可判断 C.

【详解】取 $a=1,b=-2$，满足 $a>b$，但是 $a^2<b^2$，故 A 错误；

取 $a=1,b=-2$，满足 $a>b$，但是 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=-2+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{2}<2$，故 B 错误；

因为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 R 上单调递减，由 $a>b$ 可得 $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$，故 C 正确；

取 $a=1,b=-2,c=0$，满足 $a>b$，但是 $ac^2=bc^2$，故 D 错误；

故选：C

7.（24-25 高三上·江苏无锡·阶段练习）下列命题中，真命题的是（　）

A．若 $a<b$，则 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

B．若 $a>b$，则 $a^2>ab>b^2$

C．若 $a>b>c>0$，则 $\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$

D．若 $0<a<b<c$，则 $\log_c a<\log_c b$

【答案】C

【分析】利用特殊值判断 A、B、D，利用作差法判断 C.

【详解】对于 A：当 $a=-1$，$b=1$ 时，满足 $a<b$，但是 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，故 A 错误；

对于 B：当 $a=1$，$b=-1$ 时，满足 $a>b$，但是 $a^2=b^2>ab$，故 B 错误；

对于 C：因为 $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}=\frac{a(b+c)-b(a+c)}{b(b+c)}=\frac{c(a-b)}{b(b+c)}$，

又 $a>b>c>0$，所以 $a-b>0$，所以 $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}=\frac{c(a-b)}{b(b+c)}>0$，即 $\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$，故 C 正确；

对于 D：当 $0<c<1$ 时 $y=\log_c x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，又 $0<a<b<c$，所以 $\log_c a>\log_c b$，故 D 错误.

故选：C

8.（24-25 高三上·江苏无锡·期中）（多选）下列说法中正确的有（　）

A．若 $a>b>0$，$c<d<0$，则 $ac<bd$

B．若 $a>b>0$，$c<0$，则 $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$

C．若 $1<a<3$，$-1<b<0$，则 $2<a-b<3$

D．若 $a<0$，$ab>a^2$，则 $b^2>a^2$

【答案】ABD

【分析】利用不等式的基本性质逐项判断，可得出合适的选项.

【详解】对于 A 选项，因为$a>b>0$， $c<d<0$，则$-c>-d>0$，

由不等式的基本性质可得$-ac>-bd$， 则$ac<bd$， A 对；

对于 B 选项，因为$a>b>0$，不等式的两边同时除以ab可得$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，

因为$c<0$，由不等式的基本性质可得$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$，B 对；

对于 C 选项，因为$1<a<3$， $-1<b<0$，则$0<-b<1$，

由不等式的基本性质可得$1<a-b<4$，C 错；

对于 D 选项，因为$a<0$， $ab>a^2$，由不等式的基本性质可得$b<a<0$，则$-b>-a>0$，

由不等式的基本性质可得$a^2<b^2$，D 对.

故选：ABD.

9.（24-25 高三上·河南安阳·期中）（多选）已知a,b,c,d为实数，则下列结论正确的有（　）

A．若$a>b$， 则$ac^3>bc^3$

B．若$a>b,c>d$， 则$a+c>b+d$

C．若$\mathrm{e}^a>\mathrm{e}^b$， 则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

D．若$\ln a>\ln b,\ln c>\ln d$， 则$ac>bd$

【答案】BD

【分析】由不等式的基本性质即可判断选项 AB，不等式的基本性质结合指数函数的性质即可判断 C 选项，不等式的基本性质结合对数函数的性质即可判断 D 选项.

【详解】A 选项，当$c\le 0$时结论不成立，A 错误；

B 选项，由不等式的性质可知 B 正确；

C 选项，由$\mathrm{e}^a>\mathrm{e}^b$，得$a>b$，当$a>0>b$时，结论不成立，C 错误；

D 选项，由$\ln a>\ln b,\ln c>\ln d$，得$a>b>0,c>d>0$，由不等式的性质可知$ac>bd$，D 正确.

故选：BD.

10.（24-25 高三上·山东烟台·期中）（多选）已知$a<0$， $b>0$且$a+b>0$，则（　）

A． $a^2<b^2$　　B． $a^2+ab>0$　　C． $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<0$　　D． $(a-1)(b-1)<0$

【答案】AC

【分析】利用作差法结合平方差公式判断 A 正确；利用不等式的性质可知选项 B 错误；通分之后判断分子和分母的符号可得选项 C 正确；举反例说明选项 D 错误.

【详解】A.，由 $a<0$， $b>0$ 得 $a-b<0$，

因为 $a+b>0$，所以 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)<0$，即 $a^2<b^2$，选项 A 正确.

B.由 $a<0$， $a+b>0$， $a(a+b)<0$，即 $a^2+ab<0$，选项 B 错误.

C. 由 $a<0$， $b>0$ 得 $ab<0$，

因为 $a+b>0$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}<0$，选项 C 正确.

D.令 $a=-\frac{1}{2},b=1$，则 $(a-1)(b-1)<0$ 不成立，选项 D 错误.

故选：AC.

易错点 02：解分式不等式时转化不等价

易错陷阱与避错攻略

典例 （24-25 甘肃兰州·期中）不等式 $\frac{2-x}{x}\geq 1$ 的解为（　）

A. $\{x\,|\,0<x\leq 1\}$　　B. $\{x\,|\,x<0$ 或 $x\geq 1\}$

C. $\{x\,|\,0\leq x\leq 1\}$　　D. $\{x\,|\,x\leq 0$ 或 $x\geq 1\}$

【答案】A

【分析】把分式不等式转化为整式不等式，即可得解.

【详解】由 $\frac{2-x}{x}\geq 1$，得 $\frac{2-x}{x}-1\geq 0$，即 $\frac{2-2x}{x}\geq 0$，因此 $\begin{cases} x(1-x)\geq 0 \\ x\neq 0 \end{cases}$，解得 $0<x\leq 1$，

所以原不等式的解集为 $\{x|0<x\leq 1\}$.

故选：A

【易错剖析】

本题求解时容易忽略 $x\neq 1$ 这一条件而造成化简不等价而出错.

【避错攻略】

1. **基本思路:** 应用同号相乘（除）得正，异号同号相乘（除）得负，将其转化为同解整式不等式．在此过程中，变形的等价性尤为重要.

2. **基本方法:**

①通过移项，将分式不等式右边化为零;

②左边进行通分，化为形如 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的形式;

③常见同解变形：

（1）$\frac{f(x)}{g(x)}>0 \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$；

（2）$\frac{f(x)}{g(x)}<0 \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$；

（3）$\frac{f(x)}{g(x)}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\cdot g(x)\ge 0 \\ g(x)\ne 0 \end{cases}$；

（4）$\frac{f(x)}{g(x)}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\cdot g(x)\le 0 \\ g(x)\ne 0 \end{cases}$；

易错提醒 求解不等式时，一定要注意化简的等价性，如去分母时要保证分母不为 0、平方时范围不能变大、两边同乘（除）一个因式时要注意判断因式的符号等.

举一反三

1．（24-25 高三上·北京·阶段练习）函数 $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x-4}}$ 的定义域为（　）

A．$(1,4)$　　B．$[1,4)$

C．$(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$　　D．$(-\infty,1]\cup(4,+\infty)$

【答案】D

【分析】函数定义域：二次根式被开方数为非负数.

【详解】由题设 $\frac{x-1}{x-4}\ge 0$，

$\therefore \begin{cases} (x-1)(x-4)\ge 0 \\ x-4\ne 0 \end{cases}$，

$\therefore x\in(-\infty,1]\cup(4,+\infty)$.

故选：D

2．（24-25 高一上·上海·期中）“$x>1$”是“$\frac{1}{x}<1$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【分析】由 $\frac{1}{x}<1$ 得 $\{x|x<0$ 或 $x>1\}$，进而根据概念直接求解即可.

【详解】解：解不等式 $\frac{1}{x}<1$ 得：$\frac{1}{x}<1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}-1<0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x}<0 \Leftrightarrow x(1-x)<0 \Leftrightarrow x<0$ 或 $x>1$，

因为$\{x|x>1\}$是$\{x|x<0$或$x>1\}$的真子集，

所以，$\{x|x>1\}$是$\{x|x<0$或$x>1\}$的充分不必要条件，

即“$x>1$”是“$\frac{1}{x}<1$”的充分不必要条件.

故选：A

3.（24-25高三上·安徽·阶段练习）已知集合$M=\{x|\sqrt{x-1}<2\}$，$N=\{x|x^2-x-2<0\}$，则$M\cap N=$（　）

A．$\{x|-1<x<5\}$　　B．$\{x|1\le x<5\}$

C．$\{x|-1<x<2\}$　　D．$\{x|1\le x<2\}$

【答案】D

【分析】分别求出不等式的解集，再利用交集的运算法则求解.

【详解】由已知得$M=\{x|1\le x<5\}$，$N=\{x|-1<x<2\}$，

即$M\cap N=\{x|1\le x<2\}$

故选：D.

易错题通关

1.（24-25高三上·江苏宿迁·期中）若集合$A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\left\{x\middle|\frac{x}{2-x}\ge 0\right\}$，则$A\cap B=$（　）

A．$\{-1,0\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{1,2\}$　　D．$\{-1,0,1\}$

【答案】B

【分析】解出集合B，再根据交集含义即可得到答案.

【详解】由题意得$\begin{cases}x(2-x)\ge 0\\2-x\ne 0\end{cases}$，解得$0\le x<2$，即$B=\{x|0\le x<2\}$，

则$A\cap B=\{0,1\}$.

故选：B.

2.（24-25高三上·重庆·阶段练习）“$x>1$”是“$-\frac{1}{x}<1$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【分析】将$-\frac{1}{x}<1$化简，再根据充分必要条件关系判断.

【详解】$-\frac{1}{x}<1\Leftrightarrow\frac{x+1}{x}>0\Leftrightarrow x\left(x+1\right)>0\Leftrightarrow x<-1$或$x>0$，

由$x>1$成立可以推出$x<-1$或$x>0$，但$x<-1$或$x>0$成立不能推出$x>1$，

所以$x>1$是$-\frac{1}{x}<1$的充分不必要条件.

故选：A.

3．（24-25高三上·河南·阶段练习）不等式$\frac{x-1}{x^2-2x+3}<0$的解集为（　）

A．$\mathbf{R}$　　B．$\{x\,|\,x>1\}$　　C．$\{x\,|\,x<1\}$　　D．$\{x\,|\,x<-1\}$

【答案】C

【分析】判断分母的正负，再去分母求解即得.

【详解】由$x^2-2x+3>0$，得$\frac{x-1}{x^2-2x+3}<0\Leftrightarrow x-1<0\Leftrightarrow x<1$.

故选：C

4．（2024·陕西西安·三模）若集合$A=\left\{x\middle|\sqrt{x}\le 2\right\}$，$B=\left\{-3,-1,0,1,3\right\}$，则$A\cap B=$（　）

A．$\left\{0,1\right\}$　　B．$\left\{-1,0,1\right\}$　　C．$\left\{0,1,3\right\}$　　D．$\left\{-3,-1,0,1,3\right\}$

【答案】C

【分析】先求解根式不等式，化简集合A，然后再根据集合交集运算规则即可求解.

【详解】依题意得$A=\left\{x\middle|\sqrt{x}\le 2\right\}=\left[0,4\right]$，则$A\cap B=\left\{0,1,3\right\}$.

故选：C.

5．（24-25高三上·山东德州·期中）已知p：$x\le a$，q：$\frac{1-2x}{x+2}\le 0$，若p是q的充分不必要条件，则a的取值范围是（　）

A．$a<-2$　　B．$a\le -2$

C．$a<\frac{1}{2}$　　D．$a\le\frac{1}{2}$

【答案】A

【分析】先解分式不等式，根据充分不必要条件的定义结合集合间的基本关系计算即可.

【详解】由$\frac{1-2x}{x+2}\le 0$可得$\left(1-2x\right)\left(x+2\right)\le 0\left(x+2\ne 0\right)$，解之得$x<-2$或$x\ge\frac{1}{2}$，

设p：$x\le a$，对应$A=\left(-\infty,a\right]$，

q：$\dfrac{1-2x}{x+2}\le 0$，其解集对应$B=(-\infty,-2)\cup\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，

则p是q的充分不必要条件等价于A是B的真子集，所以$a<-2$.

故选：A

6．（24-25高三上·河南·阶段练习）使不等式$\dfrac{3}{2-x}\le 1$成立的一个必要不充分条件是（　）

A．$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$　　B．$(-\infty,-1]\cup(2,+\infty)$

C．$(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$　　D．$(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$

【答案】D

【分析】利用分式不等式化简可得$x\ge 2$或$x<-1$，即可根据真子集关系求解.

【详解】由$\dfrac{3}{2-x}\le 1$可得$\dfrac{3-2+x}{2-x}\le 0\Rightarrow\begin{cases}(1+x)(2-x)\le 0\\ 2-x\ne 0\end{cases}$，解得$x>2$或$x\le -1$，

设不等式$\dfrac{3}{2-x}\le 1$成立的一个必要不充分条件构成的集合是A，

则$(-\infty,-1]\cup(2,+\infty)$是A的一个真子集，结合选项可知A可以为$(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$，

故选：D

7．（24-25高三上·上海·期中）不等式$\dfrac{2x+3}{x-1}\le 0$的解集为______.

【答案】$\left[-\dfrac{3}{2},1\right)$

【分析】把分式不等式转化为整式不等式求解.

【详解】$\dfrac{2x+3}{x-1}\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}(2x+3)(x-1)\le 0\\ x-1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{3}{2}\le x<1$，

故答案为：$[-\dfrac{3}{2},1)$.

8．（24-25高三上·上海·阶段练习）已知不等式$\dfrac{x-6}{ax-1}>1$的解集为A，若$5\notin A$，则实数a的取值范围为____

【答案】$a\ge\dfrac{1}{5}$或$a\le 0$

【分析】根据条件，利用分式不等式的解法，得到$(ax-1)[(1-a)x-5]>0$，再结合$5\notin A$，从而得到$5a(5a-1)\ge 0$，即可求解.

【详解】由$\dfrac{x-6}{ax-1}>1$，得到$\dfrac{(1-a)x-5}{ax-1}>0$，等价于$(ax-1)[(1-a)x-5]>0$，

因为$5\notin A$，则有$(5a-1)[(1-a)\times 5-5]\le 0$，即$5a(5a-1)\ge 0$，解得$a\ge\dfrac{1}{5}$或$a\le 0$，

故答案为：$a \geq \frac{1}{5}$或$a \leq 0$.

9．（24-25 高三上·上海浦东新·期中）不等式$\frac{5x+3}{x-1} \leqslant 3$的解集为__________.

【答案】$[-3,1)$

【分析】根据条件，利用分式不等式的解法即可求出结果.

【详解】由$\frac{5x+3}{x-1} \leqslant 3$，得到$\frac{2x+6}{x-1} \leqslant 0$，

等价于$\begin{cases}(x+3)(x-1) \leq 0 \\ x-1 \neq 0\end{cases}$，解得$-3 \leq x < 1$，

所以不等式的解集为$[-3,1)$.

故答案为：$[-3,1)$.

易错点 03：解含参不等式讨论不全面出错

易错陷阱与避错攻略

典例 （24-25 山东高三联考）（多选）对于给定实数a，关于x的一元二次不等式$(ax-1)(x+1)<0$的解集可能是（　）

A．$\left\{x \mid -1<x<\frac{1}{a}\right\}$　　B．$\{x \mid x \neq -1\}$　　C．$\left\{x \mid \frac{1}{a}<x<-1\right\}$　　D．R

【答案】AB

【详解】由$(ax-1)(x+1)<0$，分类讨论a如下：

当$a>0$时，$-1<x<\frac{1}{a}$；

当$a=0$时，$x>-1$；

当$-1<a<0$时，$x<\frac{1}{a}$或$x>-1$；

当$a=-1$时，$x \neq -1$；

当$a<-1$时，$x<-1$或$x>\frac{1}{a}$.

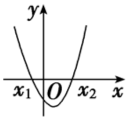
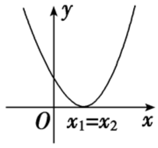
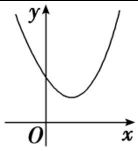
故选：AB.

【易错剖析】

本题在求解过程中对参数a的分类讨论容易不全面而漏解失分.

【避错攻略】

1. 二次函数与一元二次方程、不等式的解的对应关系

项目	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象			
$ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根	有两个不相等的实数根 x_1，$x_2(x_1<x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集	$\{x\|x<x_1$，或 $x>x_2\}$	$\left\{x\,\middle\|\,x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	**R**
$ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集	$\{x\|x_1<x<x_2\}$	∅	∅

2 解不含参数的一元二次不等式的一般步骤

第一步(化标准)：通过对不等式变形，使不等式右侧为 0，二次项系数为正；

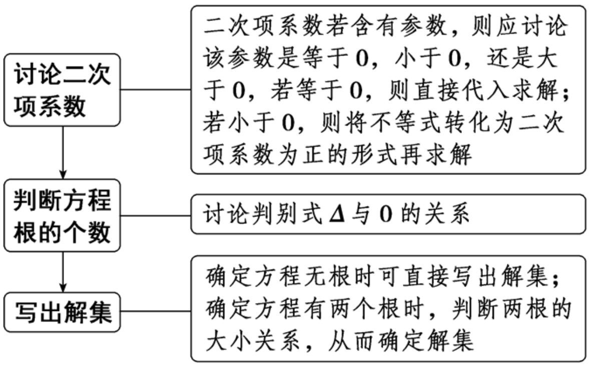
第二步(判别式)：对不等式左侧进行因式分解，若不易分解，则计算相应方程的判别式；

第三步(求实根)：求出相应的一元二次方程的根或根据判别式说明方程有无实根；

第四步(画图象)：根据一元二次方程根的情况画出相应的二次函数的图象；

第五步(写解集)：根据图象写出不等式的解集.

3 解含参数的一元二次不等式的一般步骤



【注意】

求解方程的根时可优先考虑用因式分解的方法求解，不能因式分解时再求判别式Δ，用求根公式计算.

易错提醒：含参数一元二次不等式的求解最容易出现的错误就是讨论不全面，在求解过程紧抓三点就可以有效的避免失误：一是分析二次项系数是否需要讨论；而是分析方程根的存在型是否需要讨论；三是根的大小关系是否需要讨论.

举一反三

1．（24-25 高三上·安徽·阶段练习）设实数m,n满足$m+n>0$，则关于x的不等式$(x-m)(x+n)>0$的解集为（　）

A．$\{x|\ x<-n$ 或 $x>m\}$　　B．$\{x|\ x<-m$ 或 $x>n\}$

C．$\{x|-n<x<m\}$　　D．$\{x|-m<x<n\}$

【答案】A

【分析】根据二次不等式与二次函数的关系，给合题意，可得答案.

【详解】因为$m>-n$，所以不等式的解集为$\{x|\ x<-n$ 或 $x>m\}$.

故选：A.

2．（23-24 江苏徐州·阶段练习）（多选）对于给定的实数a，关于实数x的一元二次不等式$a(x-a)(x+1)>0$的解集可能为（　）

A．$\varnothing$　　B．$\{-1\}$

C．$(a,-1)$　　D．$(-\infty,-1)\cup(a,+\infty)$

【答案】ACD

【分析】首先讨论$a=0,a>0,a<0$，三种情况讨论不等式的形式，再讨论对应方程两根大小，得不等式的解集.

【详解】对于一元二次不等式$a(x-a)(x+1)>0$，则$a\neq 0$

当$a>0$时，函数$y=a(x-a)(x+1)$开口向上，与x轴的交点为$a,-1$，

故不等式的解集为$x\in(-\infty,-1)\cup(a,+\infty)$；

当$a<0$时，函数$y=a(x-a)(x+1)$开口向下，

若$a=-1$，不等式解集为$\varnothing$；

若$-1<a<0$，不等式的解集为$(-1,a)$，

若$a<-1$，不等式的解集为$(a,-1)$，

故选：ACD

3．（24-25 高三上·江苏盐城·开学考试）（多选）已知集合$A=\{x|1<x<4\}$，$B=\{x|x^2-(a+1)x+a<0\}$，则下列命题中正确的是（　）

A．若$A\cup B=B$，则$a\geq 4$

B．若 $A\cup B=A$，则 $1\le a\le 4$

C．若 $B\cap A=B$，则 $1<a<4$

D．若 $A\cap B=\varnothing$，则 $a<1$

【答案】AB

【分析】讨论 a，求集合 B，在结合集合关系在各选项的条件下列不等式求 a 的范围，由此可判断各选项.

【详解】$B=\{x|x^2-(a+1)x+a<0\}=\{x|(x-1)(x-a)<0\}$.

$\therefore$ 当 $a>1$ 时，$B=\{x|1<x<a\}$；

当 $a=1$ 时，$B=\varnothing$；

当 $a<1$ 时，$B=\{x|a<x<1\}$.

对于选项 A，若 $A\cup B=B$，则 $A\subseteq B$，$\therefore a\ge 4$，故正确.

对于选项 B，若 $A\cup B=A$，则 $B\subseteq A$，故 $1\le a\le 4$，故正确.

对于选项 C，若 $B\cap A=B$，则 $B\subseteq A$，故 $1\le a\le 4$，故错误.

对于选项 D，若 $A\cap B=\varnothing$，则 $a\le 1$，故错误.

故选：AB.

易错题通关

1．（24-25 高三上·湖北·阶段练习）已知集合 $A=\left\{x\left|\frac{1-x}{x+2}\le 0\right.\right\},B=\left\{x|\ x^2-(2a+1)x+a(a+1)\le 0\right\}$，若"$x\in A$"是"$x\in B$"的必要不充分条件，则实数 a 的取值范围是（　）

A． $a\le -3$ 或 $a\ge 1$

B． $a\le -3$ 或 $a>1$

C． $a<-3$ 或 $a\ge 1$

D． $a<-3$ 或 $a>1$

【答案】C

【分析】由题意确定 $B\subsetneqq A$,列出不等式即可求解.

【详解】$A=\left\{x\left|\frac{1-x}{x+2}\le 0\right.\right\}=\{x|x\ge 1$ 或 $x<-2\}$

$B=\left\{x|\ x^2-(2a+1)x+a(a+1)\le 0\right\}=\{x|\ a\le x\le a+1\}$

因为"$x\in A$"是"$x\in B$"的必要不充分条件，所以 $B\subsetneqq A$，

所以 $a+1<-2$ 或 $a\ge 1$.解得: $a<-3$ 或 $a\ge 1$.

故选:C

2.（24-25 高三上·北京·阶段练习）已知 $A=\{x\in \mathrm{R}\mid x^2+2mx+m^2-4<0\}$， $B=\{x\in \mathrm{N}\mid |x|<1\}$， 且 $A\cap B=B$，那么实数 m 的取值范围是（　）

A．$(-1,1)$　　B．$[-1,1]$　　C．$(-2,2)$　　D．$[-2,2]$

【答案】C

【分析】解不等式化简集合 A,B，再利用交集的结果列式求解即得.

【详解】不等式 $x^2+2mx+m^2-4<0\Leftrightarrow (x+m+2)(x+m-2)<0$，解得 $-m-2<x<-m+2$，

则 $A=\{x\mid -m-2<x<-m+2\}$，而 $B=\{0\}$，由 $A\cap B=B$，得 $0\in A$，

因此 $-m-2<0<-m+2$，解得 $-2<m<2$，

所以实数 m 的取值范围是 $(-2,2)$.

故选：C

3.（23-24 高三上·浙江绍兴·期末）（多选）已知 $a\in \mathrm{R}$，关于 x 的一元二次不等式 $(ax-2)(x+2)>0$ 的解集可能是（　）

A．$\left\{x\middle|x>\dfrac{2}{a}\text{或}x<-2\right\}$　　B．$\{x|x>-2\}$

C．$\left\{x\middle|-2<x<\dfrac{2}{a}\right\}$　　D．$\left\{x\middle|\dfrac{2}{a}<x<-2\right\}$

【答案】ACD

【分析】分 $a=0$， $a>0$， $a<0$ 三种情况结合 $\dfrac{2}{a}$ 与 -2 的大小关系讨论，可得不等式的解集.

【详解】当 $a=0$ 时，$(ax-2)(x+2)=-2(x+2)>0\Rightarrow x<-2$；

当 $a>0$ 时，$(ax-2)(x+2)=a\left(x-\dfrac{2}{a}\right)(x+2)>0\Rightarrow x>\dfrac{2}{a}$ 或 $x<-2$，故 A 正确；

当 $a<0$ 时，$(ax-2)(x+2)=a\left(x-\dfrac{2}{a}\right)(x+2)$，

若 $\dfrac{2}{a}=-2\Rightarrow a=-1$，则解集为空集；

若 $\dfrac{2}{a}<-2\Rightarrow -1<a<0$，则不等式的解为：$\dfrac{2}{a}<x<-2$，故 D 正确；

若 $\dfrac{2}{a}>-2\Rightarrow a<-1$，则不等式的解为：$-2<x<\dfrac{2}{a}$，故 C 正确.

故选：ACD

4．（23-24高三上·河北邢台·阶段练习）（多选）关于 x 的不等式 $(ax-1)(x+2a-2)>0$ 的解集中恰有4个整数，则 a 的值可以是（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{2}{3}$　　C．$-\frac{3}{4}$　　D．-1

【答案】AD

【分析】利用已知条件判断 a 的符号，求出不等式对应方程的根，然后列出不等式求解即可．

【详解】关于 x 的不等式 $(ax-1)(x+2a-2)>0$ 的解集中恰有4个整数，

所以 $a<0$，因为 $a\geq 0$ 时，不等式的解集中的整数有无数多个．

不等式 $(ax-1)(x+2a-2)>0$，对应的方程为：$(ax-1)(x+2a-2)=0$，

方程的根为：$\frac{1}{a}$ 和 $2-2a$；

由题意知，$\frac{1}{a}<0$，则 $2-2a\leq 4$，解得 $a\geq -1$；

当 $a=-1$ 时，不等式的解集是 $(-1,4)$，解集中含有4个整数：$0,1,2,3$；满足题意．

当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，不等式的解集是 $(-2,3)$，解集中含有4个整数：$-1,0,1,2$；满足题意．

当 $a\in(-1,-\frac{1}{2})$ 时，不等式的解集是 $(\frac{1}{a},2-2a)$，此时 $\frac{1}{a}\in(-2,-1),2-2a\in(3,4)$，

解集中含有5个整数：$-1,0,1,2,3$；不满足题意．

当 $a\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 时，不等式的解集是 $(\frac{1}{a},2-2a)$，$\frac{1}{a}\in(-\infty,-2),2-2a\in(2,3)$，

解集中含有整数个数多于4个，不满足题意．

综上知，a 的值可以是 -1 和 $-\frac{1}{2}$．

故选：AD

5．（24-25高三上·河南安阳·期中）已知不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|-1<x<2\}$．若不存在整数 x 满足不等式 $(akx+bk^2+2c)(2c-bx)<0$，则实数 k 的取值范围是________．

【答案】$[1,4]$

【分析】根据一元二次不等式的解集，结合韦达定理可得 $a<0$，$b=-a,c=-2a$，然后代入目标不等式化简即可得解．

【详解】不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|-1<x<2\}$，

则 $a<0$，且 $-1,2$ 分别为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根，

由根与系数的关系，得$\begin{cases}-1+2=-\dfrac{b}{a},\\-1\times 2=\dfrac{c}{a},\end{cases}$即$b=-a,c=-2a$.

将$b=-a,c=-2a$代入不等式$\left(akx+bk^2+2c\right)\left(2c-bx\right)<0$，

化简得$a^2\left(kx-k^2-4\right)\left(x-4\right)<0$，即$\left(kx-k^2-4\right)\left(x-4\right)<0$.

容易判断$k=0$或$k<0$时，均不符合题意，所以$k>0$.

所以原不等式即为$\left(x-\dfrac{k^2+4}{k}\right)\left(x-4\right)<0$，

依题意应有$3\le\dfrac{k^2+4}{k}\le 5$且$k>0$，所以$1\le k\le 4$.

故答案为：$[1,4]$

6.（2024高三·全国·专题练习）解关于x的不等式：$ax^2-\left(3a+1\right)x+3<0$（其中$a>0$）.

【答案】答案见解析

【分析】因式分解，结合分类讨论，根据一元二次不等式的解的性质即可求解.

【详解】因为$a>0$，不等式可化为$(x-3)\left(x-\dfrac{1}{a}\right)<0$，下面分类讨论：

①当$3=\dfrac{1}{a}$，即$a=\dfrac{1}{3}$时，不等式化为$(x-3)^2<0$，此时不等式无解；

②当$3<\dfrac{1}{a}$，即$0<a<\dfrac{1}{3}$时，解得$3<x<\dfrac{1}{a}$；

③当$\dfrac{1}{a}<3$，即$a>\dfrac{1}{3}$时，解得$\dfrac{1}{a}<x<3$；

综上：当$a=\dfrac{1}{3}$时，解集为$\varnothing$；

当$0<a<\dfrac{1}{3}$时，解集为$\left\{x\middle|3<x<\dfrac{1}{a}\right\}$；

当$a>\dfrac{1}{3}$时，解集为$\left\{x\middle|\dfrac{1}{a}<x<3\right\}$

7.（24-25高三上·甘肃白银·阶段练习）已知关于x的一元二次不等式$ax^2+x+b>0$的解集为

$\left(-\infty,-2\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

(1)求a和b的值

(2)求不等式$ax^2-\left(2a+b+2\right)cx+c^2-1<0$的解集