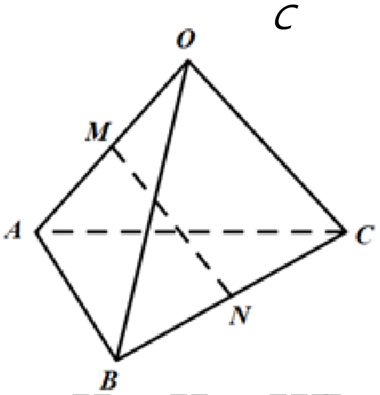
2023-2024 学年高二上册数学期末试卷 1（人教版）

一、单项选择题：（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分）

1. 向量 $\vec{a}=(2,4,5)$，向量 $\vec{b}=(1,2,t)$，若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，则实数 $t=$（　　）

A. $\frac{5}{2}$　　B. 1　　C. -2　　D. $-\frac{8}{5}$

2. 如图，在四面体 $OABC$ 中，M，N 分别是 OA，BC 的中点，则 $\overrightarrow{MN}=$（　　）



A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$　　B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$　　D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

3. 以 x 轴为对称轴，抛物线通径的长为 8，顶点在坐标原点的抛物线的方程是（　　）

A. $y^2=8x$　　B. $y^2=-8x$

C. $y^2=8x$ 或 $y^2=-8x$　　D. $x^2=8y$ 或 $x^2=-8y$

4. 圆 $x^2+y^2-4x+12y+1=0$ 关于直线 $ax-by-6=0(a>0,b>0)$ 对称，则 $\frac{2}{a}+\frac{6}{b}$ 的最小值是（　　）

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\frac{20}{3}$　　C. $\frac{32}{3}$　　D. $\frac{16}{3}$

5. 某研究所计划建设 n 个实验室，从第 1 实验室到第 n 实验室的建设费用依次构成等差数列，已知第 7 实验室比第 2 实验室的建设费用多 15 万元，第 3 实验室和第 6 实验室的建设费用共为 61 万元.现在总共有建设费用 438 万元，则该研究所最多可以建设的实验室个数是（　　）

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

6. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且 $a_5a_6+a_4a_7=6$，则 $\log_3a_1+\log_3a_2+\cdots+\log_3a_{10}=$（　　）

A. 3　　B. 5　　C. $\log_3 15$　　D. 30

7. 从直线 $l:3x+4y+15=0$ 上的动点 P 作圆 $x^2+y^2=1$ 的两条切线，切点分别为 C、D，则 $\angle CPD$ 最大时，四边

形 $OCPD$（C为坐标原点）面积是（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 2

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1、F_2，过点 F_2 的直线交双曲线右支于 A、B 两点，若 $\triangle ABF_1$ 是等腰三角形，且 $\angle A=120^\circ$，则 $\triangle ABF_1$ 的周长为（　　）

A. $\frac{16\sqrt{3}}{3}+8$　　B. $4(\sqrt{2}-1)$　　C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}+8$　　D. $2(\sqrt{3}+2)$

二、多选题：（本题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分.）

9. 已知 M，A，B，C 四点互不重合且任意三点不共线，则下列式子中能使 $\{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\}$ 成为空间的一个基底的是（　　）

A. $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OC}$　　B. $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$

C. $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}$　　D. $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$

10. 圆 $Q_1: x^2+y^2-2x=0$ 和圆 $Q_2: x^2+y^2+2x-4y=0$ 的交点为 A，B，则有（　　）

A. 公共弦 AB 所在直线方程为 $x-y=0$　　B. 线段 AB 中垂线方程为 $x+y-1=0$

C. 公共弦 AB 的长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. P 为圆 Q_1 上一动点，则 P 到直线 AB 距离的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}+1$

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=n^2-33n$，则下列说法正确的是（　　）

A. $a_n=2n-34$　　B. S_{16} 为 S_n 的最小值

C. $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{16}|=272$　　D. 使得 $S_n<0$ 成立的 n 的最大值为 33

12. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2 且 $|F_1F_2|=2$，点 $P(1,1)$ 在椭圆内部，点 Q 在椭圆上，则以下说法正确的是（　）

A. $|QF_1|+|QP|$ 的最小值为 $2a-1$

B. 椭圆 C 的短轴长可能为 2

C. 椭圆 C 的离心率的取值范围为 $\left(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$

D. 若 $\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{F_1Q}$，则椭圆 C 的长轴长为 $\sqrt{5}+\sqrt{17}$

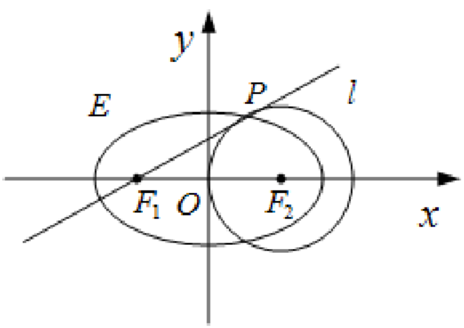
三、填空题：（本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_1+a_3+a_5=21$，则 $a_3+a_5+a_7=$________ .

14. 已知圆 $M:x^2+y^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y-60=0$，圆 N 与 x 轴相切，与圆 M 外切，且圆心 N 在直线 $x=6$ 上，则圆 N 的标准方程为________ .

15. 已知 $\vec{a}=(3,2,3)$，$\vec{b}=(-1,x-1,1)$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角，则 x 的取值范围是___.

16. 如图，椭圆 E 的左右焦点为 F_1，F_2，以 F_2 为圆心的圆过原点，且与椭圆 E 在第一象限交于点 P，若过 P、F_1 的直线 l 与圆 F_2 相切，则直线 l 的斜率 $k=$______；椭圆 E 的离心率 $e=$ ______.



四、解答题：(本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. 直线 经过两直线 $l_1: x$ 2 0 和 $l_2: x$ 2 0 的交点．

（1）若直线 与直线 $3x$ 0 平行，求直线 的方程；

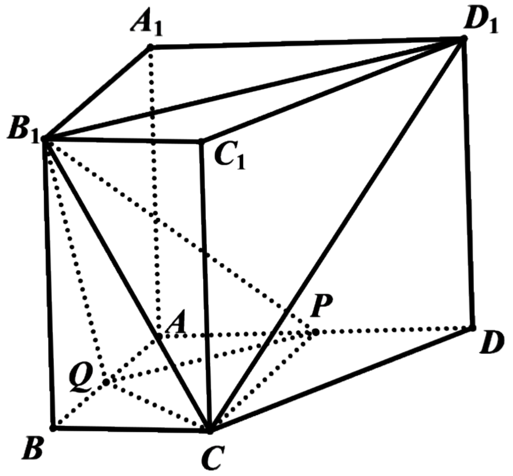
（2）若点 $A(3,1)$ 到直线 的距离为 5，求直线 的方程．

18. 已知等差数列 满足：a，$a_5 + a_7 = 26$，数列 的前 n 项和为 S_n．

（1）求 a_n 及 S_n；

（2）设 $\{b_n - a_n\}$ 是首项为 1，公比为 3 的等比数列，求数列 的前 n 项和 T_n

19. 如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD // BC$，$AB \perp AD$，$AB = AD = AA_1 = 2BC = 2$



（1）求二面角 $C_1-B_1C-D_1$ 的余弦值；

（2）若点 P 为棱 AD 的中点，点 Q 在棱 AB 上，且直线 B_1C 与平面 B_1PQ 所成角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$，求 AQ 的长．

20. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 过点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，且离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）设 C 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过点 F_2 作直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，$\overrightarrow{F_1A}\cdot\overrightarrow{F_1B}=\frac{1}{2}$，求 $\triangle ABF_1$ 的面积．

21. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}\ (n\in \mathrm{N}^*)$．

（1）设 $b_n=\frac{1}{a_n-1}$，求证数列 $\{b_n\}$ 为等差数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $c_n=\frac{2a_n}{n+1}$，数列 $\{c_nc_{n+2}\}$ 的前 n 项和为 T_n，是否存在正整数 m，使得 $T_n<\frac{1}{c_mc_{m+1}}$ 对任意的 $n\in \mathrm{N}^*$ 都成立？若存在，求出 m 的最小值；若不存在，试说明理由．

答案解析

一、单项选择题：（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分）

1. 向量 $\vec{a}=(2,4,5)$，向量 $\vec{b}=(1,2,t)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则实数 $t=$（　　）

A. $\frac{5}{2}$　　B. 1　　C. -2　　D. $-\frac{8}{5}$

【1 题答案】

【答案】C

【解析】

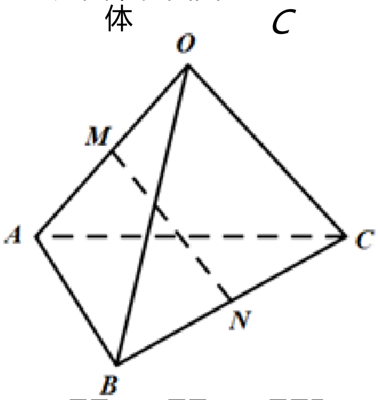
【分析】由空间向量垂直的坐标表示列方程即可求解.

【详解】因为向量 $\vec{a}=(2,4,5)$，向量 $\vec{b}=(1,2,t)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，

则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1+4\times2+5t=0$，解得：$t=-2$，

故选：C.

2. 如图，在四面体 $OABC$ 中，M，N分别是 OA，BC的中点，则 $\overrightarrow{MN}=$（　　）



A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$　　B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$　　D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

【2 题答案】

【答案】A

【解析】

【分析】利用向量的加法法则直接求解.

【详解】$\because$在四面体 $OABC$ 中，M，N分别是 OA，BC的中点，

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{ON}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}[(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})]$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$

故选：A．

3. 以x轴为对称轴，抛物线通径的长为 8，顶点在坐标原点的抛物线的方程是（　　）

A. $y^2=8x$　　　　B. $y^2=-8x$

C. $y^2=8x$或$y^2=-8x$　　　　D. $x^2=8y$或$x^2=-8y$

【3 题答案】

【答案】C

【解析】

【分析】由分焦点在x轴的正半轴上和焦点在x轴的负半轴上，两种情况讨论设出方程，根据$2p=8$，即可求解.

【详解】由题意，抛物线的顶点在原点，以x轴为对称轴，且通经长为 8，

当抛物线的焦点在x轴的正半轴上时，设抛物线的方程为$y^2=2px(p>0)$，

可得$2p=8$，解得$p=4$，所以抛物线方程为$y^2=8x$；

当抛物线的焦点在x轴的负半轴上时，设抛物线的方程为$y^2=-2px(p>0)$，

可得$2p=8$，解得$p=4$，所以抛物线方程为$y^2=-8x$，

所以所求抛物线的方程为$y^2=\pm 8x$.

故选：C.

4. 圆$x^2+y^2+4x-12y+1=0$关于直线$ax-by+6=0(a>0,b>0)$对称，则$\frac{2}{a}+\frac{6}{b}$的最小值是（　　）

A. $2\sqrt{3}$　　　　B. $\frac{20}{3}$　　　　C. $\frac{32}{3}$　　　　D. $\frac{16}{3}$

【4 题答案】

【答案】C

【解析】

【分析】先求出圆的圆心坐标，根据条件可得直线过圆心，从而可得$a+3b=3$，然后由$\frac{2}{a}+\frac{6}{b}=\frac{2}{3}(a+3b)\left(\frac{1}{a}+\frac{3}{b}\right)$，展开利用均值不等式可得答案.

【详解】由圆 $x^2+y^2-4x-12y+31=0$ 可得标准方程为 $(x-2)^2+(y-6)^2=9$，

因为圆 $x^2+y^2-4x-12y+31=0$ 关于直线 $ax+by-6=0\ (a>0,b>0)$ 对称，

$\therefore$该直线经过圆心 $(2,6)$，即 $2a+6b-6=0$，$\therefore a+3b=3(a>0,b>0)$，

$\therefore \frac{2}{a}+\frac{6}{b}=\frac{2}{3}(a+3b)\left(\frac{1}{a}+\frac{3}{b}\right)=\frac{2}{3}\left(1+\frac{3a}{b}+\frac{3b}{a}+9\right)\geq\frac{2}{3}\left(10+2\sqrt{\frac{3a}{b}\cdot\frac{3b}{a}}\right)=\frac{32}{3}$

当且仅当 $\frac{3b}{a}=\frac{3a}{b}$，即 $a=b=\frac{3}{4}$ 时取等号，

故选：C.

5. 某研究所计划建设 n 个实验室，从第 1 实验室到第 n 实验室的建设费用依次构成等差数列，已知第 7 实验室比第 2 实验室的建设费用多 15 万元，第 3 实验室和第 6 实验室的建设费用共为 61 万元.现在总共有建设费用 438 万元，则该研究所最多可以建设的实验室个数是（　　）

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

【5 题答案】

【答案】C

【解析】

【分析】根据等差数列通项公式，列出方程组 $\begin{cases}a_7-a_2=15\\a_3+a_6=61\end{cases}$，求出 $a_1=20$，$d=3$ 的值，进而求出令 S_n 根据题意令 $S_n\leq 438$，即可求解.

【详解】设第 n 实验室的建设费用为 a_n 万元，其中 $n=1,2,\cdots$，则 $\{a_n\}$ 为等差数列，设公差为 d，

则由题意可得 $\begin{cases}a_7-a_2=5d=15\\a_3+a_6=2a_1+7d=61\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=20\\d=3\end{cases}$，则 $S_n=20n+\frac{3n(n-1)}{2}=\frac{3}{2}n^2+\frac{37}{2}n$.

令 $S_n\leq 438$，即 $3n^2+37n-876\leq 0$，解得 $-\frac{73}{3}\leq n\leq 12$，又 $n\in N^*$，所以 $1\leq n\leq 12$，$n\in N^*$，

所以最多可以建设 12 个实验室.

故选：C.

6. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且 $a_5a_6+a_4a_7=6$，则 $\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_{10}=$（　　）

A. 3　　B. 5　　C. $\log_3 15$　　D. 30

【6 题答案】

【答案】B

【解析】

【分析】利用对数的运算性质，结合等比数列的性质可求得结果.

【详解】$\because \{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，$\therefore a_1a_{10}=a_2a_9=a_3a_8=a_4a_7=a_5a_6$，

$\because a_5a_6+a_4a_7=6$，$\therefore a_5a_6=a_4a_7=3$，$\therefore \log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_{10}=\log_3(a_1a_2\cdots a_{10})=\log_3 3^5=5$.

故选：B

7. 从直线 $l:3x+4y=15$ 上的动点 P 作圆 $x^2+y^2=1$ 的两条切线，切点分别为 C、D，则 $\angle CPD$ 最大时，四边形 $OCPD$（O为坐标原点）面积是（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 2

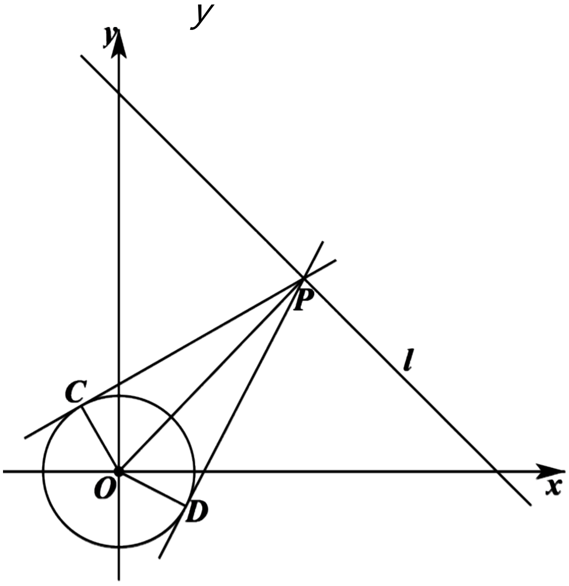
【7 题答案】

【答案】B

【解析】

【分析】分析可知当 $OP\perp l$ 时，$\angle CPD$ 最大，计算出 $|OP|$、$|PC|$，进而可计算得出四边形 $OCPD$（O为坐标原点）面积.

【详解】圆 $x^2+y^2=1$ 的圆心为坐标原点 O，连接 OC、OD、OP，则 $\angle OPC=\angle OPD$，



设 $\angle OPC=\angle OPD=\theta$，则 $\angle CPD=2\theta$，$OC\perp PC$，则 $\sin\theta=\dfrac{|OC|}{|OP|}=\dfrac{1}{|OP|}$，