

第 08 讲 二次函数与一元二次方程、不等式

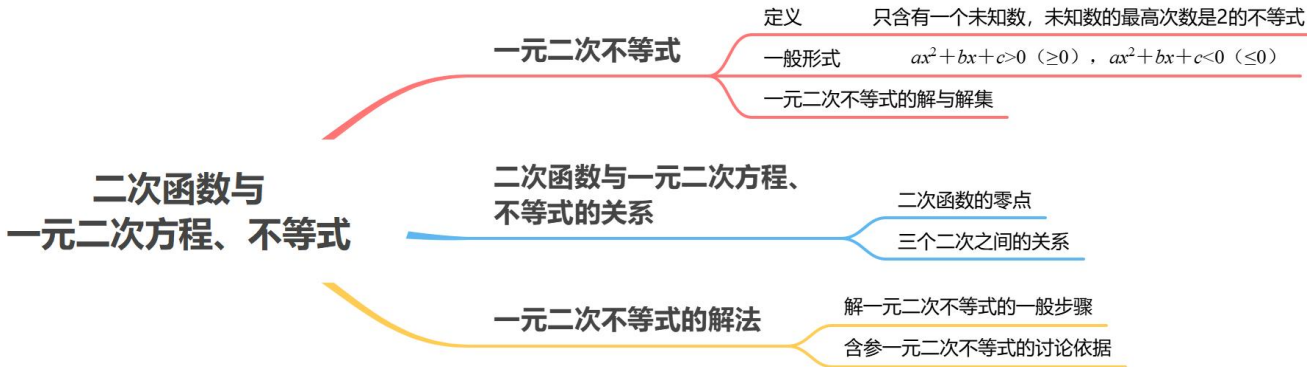
模块导航

- 模块一 思维导图串知识
- 模块二 基础知识全梳理（吃透教材）
- 模块三 核心考点举一反三
- 模块四 小试牛刀过关测

素养目标

1. 能借助一元二次函数求解一元二次不等式，并能用集合表示一元二次不等式的解集；
2. 借助一元二次函数的图象，了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系
3. 掌握一元二次不等式的实际应用；
4. 会解一元二次不等式中的恒成立问题.

模块一 思维导图串知识



模块二 基础知识全梳理

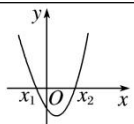
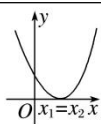
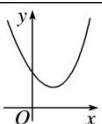
知识点 1 一元二次不等式

- 1、定义：一般地，只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的不等式，称为一元二次不等式.
- 2、一般形式： $ax^2+bx+c>0$ (≥ 0)， $ax^2+bx+c<0$ (≤ 0)，（其中 $a \neq 0$ ， a, b, c 均为常数）.
- 3、一元二次不等式的解与解集
 - 使某一个一元二次不等式成立的 x 的值，叫做这个一元二次不等式的解；
 - 一元二次不等式的所有的解组成的集合，叫做这个一元二次不等式的解集；
 - 将一个不等式转化为另一个与它解集相同的不等式，叫做不等式的同解变形.

知识点 2 二次函数与一元二次方程、不等式的关系

- 1、二次函数的零点
 - 一般地，对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ，我们把使 $ax^2+bx+c=0$ 的实数 x 叫做二次函数的零点.
- 2、三个“二次”之间的关系

对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 的两根为 x_1, x_2 且 $x_1 \leq x_2$, 设 $\Delta = b^2 - 4ac$, 它的解按照 $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$ 可分三种情况, 相应地, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图像与 x 轴的位置关系也分为三种情况. 因此我们分三种情况来讨论一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 或 $ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ 的解集.

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 的根	有两个不相等的实数根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 的解集	$\{x x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$	$\left\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}\right\}$	\mathbf{R}
$ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ 的解集	$\{x x_1 < x < x_2\}$	\emptyset	\emptyset

知识点 3 一元二次不等式的解法

1、解一元二次不等式的一般步骤

(1) 判号: 检查二次项的系数是否为正值, 若是负值, 则利用不等式的性质将二次项系数化为正值;

(2) 求根: 计算判别式 Δ , 求出相应方程的实数根;

① $\Delta > 0$ 时, 求出两根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$ (注意灵活运用因式分解和配方法);

② $\Delta = 0$ 时, 求根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;

③ $\Delta < 0$ 时, 方程无解.

(3) 标根: 将所求得的实数根标在数轴上 (注意两实数根的大小顺序, 尤其是当实数根中含有字母时),

并画出开口向上的抛物线示意图;

(4) 写解集: 根据示意图以及一元二次不等式解集的几何意义, 写出解集.

口诀: 大于零取 (根) 两边, 小于零取 (根) 中间

2、含参一元二次不等式的讨论依据

(1) 对二次项系数进行大于 0, 小于 0, 等于 0 分类讨论;

(2) 当二次项系数不等于 0 时, 再对判别式进行大于 0, 小于 0, 等于 0 的分类讨论;

(3) 当判别式大于 0 时, 再对两根的大小进行讨论, 最后确定出解集.

模块三 核心考点举一反三

【变式 2-3】(23-24 高一上·湖南长沙·期末) 当 $a < 1$ 时, 解关于 x 的不等式 $(ax-1)(x-1) < 0$.

考点三: 由一元二次不等式解集求参



例 3. (23-24 高一下·广东湛江·开学考试) 关于 x 的不等式 $-\frac{1}{2}x^2 + mx + n > 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 2\}$, 则 $m+n$ 的值为 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

【变式 3-1】(23-24 高一上·云南昭通·期末) 不等式 $ax^2 + bx - 3 < 0$ 的解集是 $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, 则 $b-a$ 的值是 ()

- A. -3 B. 3 C. -5 D. 5

【变式 3-2】(23-24 高一上·吉林延边·月考) 已知不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$, 则下列结论错误的是 ()

- A. $a < 0$ B. $2a+b+c > 0$
 C. $a+b+c > 0$ D. $cx^2 - bx + a < 0$ 的解集为 $\{x | x < -\frac{1}{3} \text{ 或 } x > 1\}$

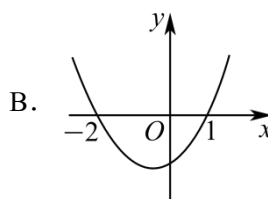
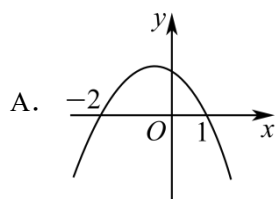
【变式 3-3】(23-24 高一下·云南·月考) 若关于 x 的不等式 $x^2 - (m+1)x + m < 0$ 的解集中恰有三个整数, 则实数 m 的取值范围为 ()

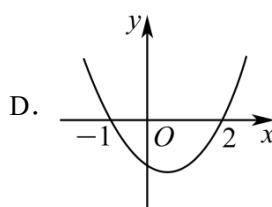
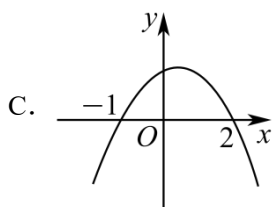
- A. $[-3, -2) \cup (4, 5]$ B. $[-2, -1) \cup (4, 5]$
 C. $(-3, 1) \cup (4, 5)$ D. $[-3, 5]$

考点四: 三个“二次”关系的应用



例 4. (23-24 高一上·湖南长沙·月考) 不等式 $ax^2 - bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | -2 < x < 1\}$, 则函数 $y = ax^2 - bx + c$ 的图象大致为 ()





【变式 4-1】(23-24 高一上·江苏苏州·月考) (多选) 关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$, 下列说法不正确的是 ()

A. 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 解集为 $\{x | x > 1 \text{ 或 } x < -3\}$, 则二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的零点为 $A(-3, 0)$, $B(1, 0)$

B. 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 解集为 $\{x | x > 3 \text{ 或 } x < -1\}$, 则 $cx^2 + bx + a > 0$ 的解集为 $\left\{x \mid -1 < x < \frac{1}{3}\right\}$

C. 若关于 x 的一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 解集为 \mathbb{R} , 则 $a > 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$

D. 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ ($abc \neq 0$) 的解集与关于 x 的二次不等式

$a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ ($a_1b_1c_1 \neq 0$) 的解集相同都是 \mathbb{R} , 则 $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$

【变式 4-2】(22-23 高一上·宁夏石嘴山·期中) 关于 x 的不等式 $x^2 - 2ax - 8a^2 < 0$ 的解集为 (x_1, x_2) , 且 $x_1^2 - x_2^2 = 15$, 则实数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【变式 4-3】(23-24 高一上·山西临汾·月考) 已知二次函数 $y = x^2 - (a-1)x - a - 1$ 的图象与 x 轴交于 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ 两点.

(1) 当 $a = 3$ 时, 求 $x_1^2 + x_2^2$ 的值;

(2) 求关于 x 的不等式 $y + 1 \geq 0$ 的解集.

考点五：一元二次不等式恒成立与有解



例 5. (23-24 高一下·黑龙江绥化·开学考试) (多选) 若对于 $\forall x \in \mathbb{R}$, 都有 $x^2 - 2mx + m \geq 0$, 则 m 的值可以是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【变式 5-1】(23-24 高一下·贵州贵阳·期中) 对任意的 $x \in (0, +\infty)$, $x^2 - 2mx + 1 > 0$ 恒成立, 则 m 的取值范围为 ()

- A. $[1, +\infty)$ B. $(-1, 1)$ C. $(-\infty, 1]$ D. $(-\infty, 1)$

【变式 5-2】(23-24 高一下·河北保定·开学考试)(多选)若关于 x 的不等式 $ax^2 - 4x + 2 < 0$ 有实数解, 则 a 的值可能为 ()

- A. 0 B. 3 C. 1 D. -2

【变式 5-3】(23-24 高一上·陕西商洛·期中)若关于 x 的不等式 $x^2 + mx - 4 > 0$ 在区间 $[2, 4]$ 上有解, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $(-3, +\infty)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(-\infty, -3)$

考点六：一元二次不等式的实际应用



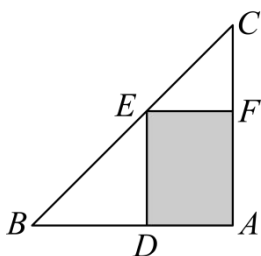
例 6. (23-24 高一下·河南·开学考试)河南是华夏文明的主要发祥地之一, 众多的文物古迹和著名的黄河等自然风光构成了河南丰富的旅游资源, 在旅游业蓬勃发展的带动下, 餐饮、酒店、工艺品等行业持续发展. 某连锁酒店共有 500 间客房, 若每间客房每天的定价是 200 元, 则均可被租出; 若每间客房每天的定价在 200 元的基础上提高 $10x$ 元 ($1 \leq x \leq 10, x \in \mathbf{Z}$), 则被租出的客房会减少 $15x$ 套. 若要使该连锁酒店每天租赁客房的收入超过 106600 元, 则该连锁酒店每间客房每天的定价应为 ()

- A. 250 元 B. 260 元 C. 270 元 D. 280 元

【变式 6-1】(23-24 高一上·陕西·月考)某礼服租赁公司共有 300 套礼服供租赁, 若每套礼服每天的租价为 200 元, 则所有礼服均被租出; 若将每套礼服每天的租价在 200 元的基础上提高 $10x$ 元 ($1 \leq x \leq 20, x \in \mathbf{Z}$), 则被租出的礼服会减少 $10x$ 套. 若要使该礼服租赁公司每天租赁礼服的收入超过 6.24 万元, 则该礼服租赁公司每套礼服每天的租价应定为 ()

- A. 220 元 B. 240 元 C. 250 元 D. 280 元

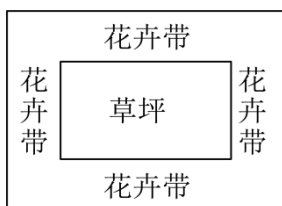
【变式 6-2】(23-24 高一上·北京·月考)某市有块三角形荒地, 如图 $\triangle ABC$ 所示, $\angle A = 90^\circ, AB = AC = 200$ (单位: 米), 现市政府要在荒地中开辟一块矩形绿地 $ADEF$, 其中 D, E, F 点分别在线段 AB, BC, CA 上, 若要求绿地的面积不少于 7500 平方米, 则 AD 的长度 (单位: 米) 范围是 ()



- A. $[40, 160]$ B. $[50, 150]$ C. $[55, 145]$ D. $[60, 140]$

【变式 6-3】(23-24 高一上·陕西宝鸡·月考)如图, 在长为 8m, 宽为 6m 的矩形地面的四周种植花卉, 中间种植草坪, 如果要求草坪外侧四周的花卉带的宽度都相同, 且草坪的面积不超过总面积

的一半，则花卉带的宽度至少应为多少米？



◇ 模块四 小试牛刀过关测

一、单选题

- (23-24 高一下·湖南株洲·开学考试) 不等式 $-x^2 - 4x + 5 < 0$ 的解集是 ()

A. $(-5, 1)$ B. $(-1, 5)$ C. $(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$
- (23-24 高一下·河南商丘·期中) 不等式 $2x^2 - x - 3 < 0$ 的解集是 ()

A. $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > \frac{3}{2}\}$ B. $\{x \mid x > \frac{3}{2}\}$

C. $\{x \mid -1 < x < \frac{3}{2}\}$ D. $\{x \mid x < -1\}$
- (23-24 高一下·河南濮阳·月考) 已知关于 x 的一元二次不等式 $ax^2 + bx - c < 0$ 的解集为 $\{x \mid 3 < x < 5\}$ ，则不等式 $cx^2 + bx - a > 0$ 的解集为 ()

A. $\{x \mid x < \frac{1}{5} \text{ 或 } x > \frac{1}{3}\}$ B. $\{x \mid x < -\frac{1}{3} \text{ 或 } x > -\frac{1}{5}\}$

C. $\{x \mid \frac{1}{5} < x < \frac{1}{3}\}$ D. $\{x \mid -\frac{1}{3} < x < -\frac{1}{5}\}$
- (23-24 高一下·甘肃·期末) 若关于 x 的不等式 $x^2 - 2ax - 8a^2 < 0 (a > 0)$ 的解集为 (x_1, x_2) ，且 $x_1^2 + x_2^2 = 20$ ，则 $a =$ ()

A. 2 B. 1 C. $2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{10}$
- (23-24 高一下·安徽马鞍山·月考) 若关于 x 的不等式 $x^2 - (2-a)x - 2a < 0$ 的解集中，恰有 3 个整数，则实数 a 的取值集合是 ()

A. $\{a \mid 5 < a \leq 6\}$ B. $\{a \mid -6 \leq a < -5\}$

C. $\{a \mid -2 < a \leq -1 \text{ 或 } 5 \leq a < 6\}$ D. $\{a \mid -6 \leq a < -5 \text{ 或 } 1 < a \leq 2\}$
- (23-24 高一下·江苏南京·期末) 设 a 为实数，则关于 x 的不等式 $(ax - 2)(2x - 4) < 0$ 的解集不可能是 ()

A. $(\frac{2}{a}, 2)$ B. $(-\infty, 2) \cup (\frac{2}{a}, +\infty)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(2, \frac{2}{a})$

二、多选题

7. (23-24 高一上·吉林延边·期中) 下列不等式的解集不是 \mathbf{R} 的是 ()

A. $-x^2 + x + 1 \geq 0$ B. $x^2 - 2\sqrt{5}x + \sqrt{5} > 0$ C. $x^2 + 6x + 10 > 0$ D. $2x^2 - 3x + 4 < 0$

8. (23-24 高一上·湖北·月考) 若不等式 $ax^2 - bx + c < 0$ 的解集是 $\{x | -2 < x < 1\}$, 则下列说法正确的是 ()

A. $b < 0$ 且 $c < 0$

B. $a - b + c < 0$

C. $a + b + c < 0$

D. 不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集是 $(-1, 2)$

三、填空题

9. (23-24 高一上·河北石家庄·月考) 已知二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 的两根分别为 2 和 4, 则不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为_____.

10. (23-24 高一上·安徽亳州·期末) 若关于 x 的不等式 $mx^2 + x + 1 > 0$ 的解集为 \mathbf{R} , 则实数 m 的取值范围为_____.

11. (23-24 高一上·安徽蚌埠·期末) 已知正数 x, y 满足 $x + y = 2$, 若 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > m^2 - m$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围为_____.

四、解答题

12. (23-24 高一上·河南濮阳·月考) 解下列一元二次不等式:

(1) $3x^2 - 7x \leq 10$;

(2) $x^2 - x + \frac{1}{4} < 0$.

13. (23-24 高一上·江苏镇江·期中) (1) 解关于 x 的不等式 $x^2 - (m+1)x + m < 0$.

(2) 若对任意的 $x \in [1, 2]$, $x^2 - (m+1)x + m \leq 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

第 08 讲 二次函数与一元二次方程、不等式

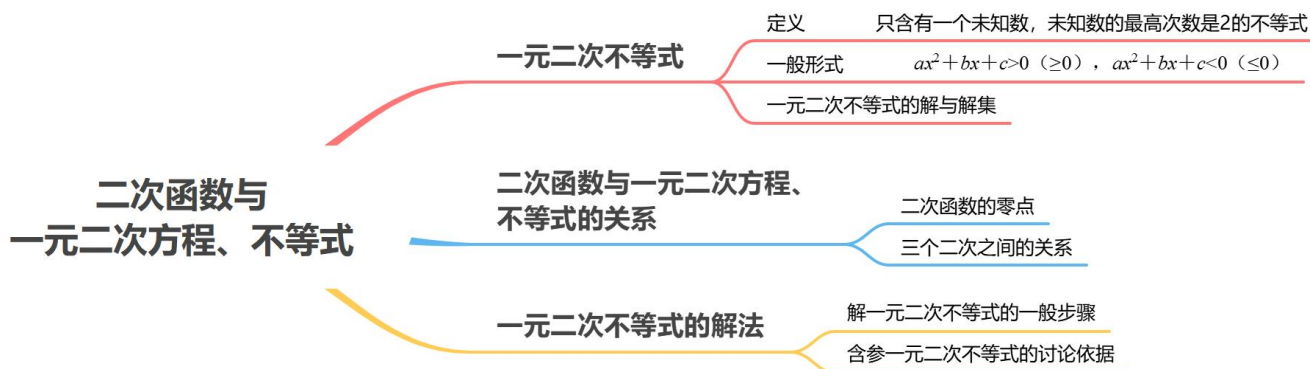
模块导航

- 模块一 思维导图串知识
- 模块二 基础知识全梳理（吃透教材）
- 模块三 核心考点举一反三
- 模块四 小试牛刀过关测

素养目标

1. 能借助一元二次函数求解一元二次不等式，并能用集合表示一元二次不等式的解集；
2. 借助一元二次函数的图象，了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系
3. 掌握一元二次不等式的实际应用；
4. 会解一元二次不等式中的恒成立问题.

模块一 思维导图串知识



模块二 基础知识全梳理

知识点 1 一元二次不等式

1、**定义**：一般地，只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的不等式，称为一元二次不等式.

2、**一般形式**： $ax^2+bx+c>0$ (≥ 0)， $ax^2+bx+c<0$ (≤ 0)，（其中 $a \neq 0$ ， a ， b ， c 均为常数）.

3、一元二次不等式的解与解集

使某一个一元二次不等式成立的 x 的值，叫做这个一元二次不等式的解；

一元二次不等式的所有的解组成的集合，叫做这个一元二次不等式的解集；

将一个不等式转化为另一个与它解集相同的不等式，叫做不等式的同解变形.

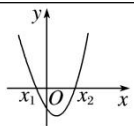
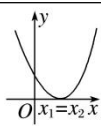
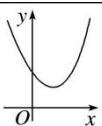
知识点 2 二次函数与一元二次方程、不等式的关系

1、二次函数的零点

一般地，对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ，我们把使 $ax^2+bx+c=0$ 的实数 x 叫做二次函数的零点.

2、三个“二次”之间的关系

对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 的两根为 x_1, x_2 且 $x_1 \leq x_2$, 设 $\Delta = b^2 - 4ac$, 它的解按照 $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$ 可分三种情况, 相应地, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图像与 x 轴的位置关系也分为三种情况. 因此我们分三种情况来讨论一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 或 $ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ 的解集.

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 的根	有两个不相等的实数根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 的解集	$\{x x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$	$\left\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}\right\}$	\mathbf{R}
$ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ 的解集	$\{x x_1 < x < x_2\}$	\emptyset	\emptyset

知识点 3 一元二次不等式的解法

1、解一元二次不等式的一般步骤

(1) 判号: 检查二次项的系数是否为正值, 若是负值, 则利用不等式的性质将二次项系数化为正值;

(2) 求根: 计算判别式 Δ , 求出相应方程的实数根;

① $\Delta > 0$ 时, 求出两根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$ (注意灵活运用因式分解和配方法);

② $\Delta = 0$ 时, 求根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;

③ $\Delta < 0$ 时, 方程无解.

(3) 标根: 将所求得的实数根标在数轴上 (注意两实数根的大小顺序, 尤其是当实数根中含有字母时),

并画出开口向上的抛物线示意图;

(4) 写解集: 根据示意图以及一元二次不等式解集的几何意义, 写出解集.

口诀: 大于零取 (根) 两边, 小于零取 (根) 中间

2、含参一元二次不等式的讨论依据

(1) 对二次项系数进行大于 0, 小于 0, 等于 0 分类讨论;

(2) 当二次项系数不等于 0 时, 再对判别式进行大于 0, 小于 0, 等于 0 的分类讨论;

(3) 当判别式大于 0 时, 再对两根的大小进行讨论, 最后确定出解集.

模块三 核心考点举一反三

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/827004043056010001>