

四川省成都市成都石室中学 2023 届高三下学期返校联考数学试题

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x+1)$ 是偶函数，当 $x \in (1, +\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，设 $a = f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ， $b = f(3)$ ， $c = f(0)$ ，

则 a 、 b 、 c 的大小关系为 ()

- A. $b < a < c$ B. $c < b < d$ C. $b < c < a$ D. $a < b < c$

2. 对于函数 $f(x)$ ，定义满足 $f(x_0) = x_0$ 的实数 x_0 为 $f(x)$ 的不动点，设 $f(x) = \log_a x$ ，其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，若 $f(x)$ 有且仅有一个不动点，则 a 的取值范围是 ()

- A. $0 < a < 1$ 或 $a = \sqrt{e}$ B. $1 < a < \sqrt{e}$
C. $0 < a < 1$ 或 $a = e^{\frac{1}{e}}$ D. $0 < a < 1$

3. 五行学说是华夏民族创造的哲学思想，是华夏文明重要组成部分.古人认为，天下万物皆由金、木、水、火、土五类元素组成，如图，分别是金、木、水、火、土彼此之间存在的相生相克的关系.若从 5 类元素中任选 2 类元素，则 2 类元素相生的概率为 ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

4. 已知函数 $f(x) = \ln x + 1$ ， $g(x) = 2e^{x-\frac{1}{2}}$ ，若 $f(m) = g(n)$ 成立，则 $m-n$ 的最小值是 ()

- A. $\frac{1}{2} + \ln 2$ B. $e - 2$ C. $\ln 2 - \frac{1}{2}$ D. $\sqrt{e} - \frac{1}{2}$

5.

山东烟台苹果因“果形端正、色泽艳丽、果肉甜脆、香气浓郁”享誉国内外.据统计,烟台苹果(把苹果近似看成球体)的直径(单位: mm)服从正态分布 $N(80, 5^2)$, 则直径在 $(75, 90]$ 内的概率为 ()

附: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$.

- A. 0.6826 B. 0.8413 C. 0.8185 D. 0.9544

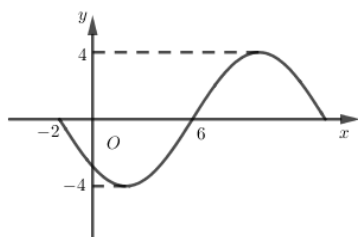
6. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-1 \leq 0 \\ x-y+3 \leq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$, 则 x^2+y^2 的最大值是 ()

- A. $\frac{9}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C. 13 D. $\sqrt{13}$

7. 复数 $\frac{5i}{1+2i}$ 的虚部是 ()

- A. i B. $-i$ C. 1 D. -1

8. 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, $x \in R$) 的部分图象如图所示, 则函数表达式为 ()



- A. $y = -4 \sin(\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{4})$ B. $y = 4 \sin(\frac{\pi}{8}x - \frac{\pi}{4})$
C. $y = -4 \sin(\frac{\pi}{8}x - \frac{\pi}{4})$ D. $y = 4 \sin(\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{4})$

9. 给定下列四个命题:

- ①若一个平面内的两条直线与另一个平面都平行, 则这两个平面相互平行;
②若一个平面经过另一个平面的垂线, 则这两个平面相互垂直;
③垂直于同一直线的两条直线相互平行;
④若两个平面垂直, 那么一个平面内与它们的交线不垂直的直线与另一个平面也不垂直.

其中, 为真命题的是 ()

- A. ①和② B. ②和③ C. ③和④ D. ②和④

10. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ ($a > 0$) 的一条渐近线与圆 $x^2 + (y-2)^2 = 2$ 至多有一个交点, 则双曲线的离心率的取值范围是 ()

- A. $[\sqrt{2}, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$ C. $(1, \sqrt{2}]$ D. $(1, 2]$

11. 已知集合 $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{x+3} \leq 0 \right\}$, 则集合 A 真子集的个数为 ()

- A. 3 B. 4 C. 7 D. 8

12. 关于 x 的不等式 $ax - b > 0$ 的解集是 $(1, +\infty)$, 则关于 x 的不等式 $(ax + b)(x - 3) > 0$ 的解集是 ()

- A. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ B. $(-1, 3)$
C. $(1, 3)$ D. $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 设 x, y 为正实数, 若 $4x^2 + y^2 + xy = 1$ 则 $\frac{4x+2y}{20x^2+11xy+5y^2}$ 的取值范围是_____.

14. 若方程 $a^x = x$ ($a > 0, a \neq 1$) 有两个不等实根, 则实数 a 的取值范围是_____.

15. 已知复数 $z = 1 + 2i$, 其中 i 为虚数单位, 则 z^2 的模为_____.

16. 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, 且 $2a_1, a_3, 3a_2$ 成等差数列, 则 $a_n =$ _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 M 的坐标为 $(2, 0)$.

(1) 当直线 l 的倾斜角为 45° 时, 求线段 AB 的中点的横坐标;

(2) 设点 A 关于 x 轴的对称点为 C , 求证: M, B, C 三点共线;

(3) 设过点 M 的直线交椭圆于 G, H 两点, 若椭圆上存在点 P , 使得 $\vec{OG} + \vec{OH} = \lambda \vec{OP}$ (其中 O 为坐标原点), 求实数 λ 的取值范围.

18. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 其面积记为 S , 满足 $\frac{2\sqrt{3}}{3}S = \vec{AB} \cdot \vec{CA}$.

(1) 求 A ;

(2) 若 $\sqrt{3}(b+c) = 2a$, 求 $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$ 的值.

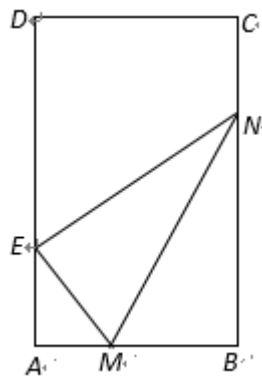
19. (12 分) 已知 $p: \forall x \in \mathbb{R}, m(4x^2 + 1) > x$; $q: \exists x \in [2, 8], m \log_2 x + 1 \leq 0$.

(1) 若 p 为真命题, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若 $\neg p \vee q$ 为真命题且 $\neg p \wedge q$ 为假命题, 求实数 m 的取值范围.

20. (12 分) 已知矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB = 6, AD = 12$, 将矩形纸片的右下角沿线段 MN 折叠, 使矩形的顶点 B 落在矩形的边 AD 上, 记该点为 E , 且折痕 MN 的两端点 M, N 分别在边 AB, BC 上. 设 $\angle MNB = \theta, MN = l$, $\triangle EMN$

的面积为 S .

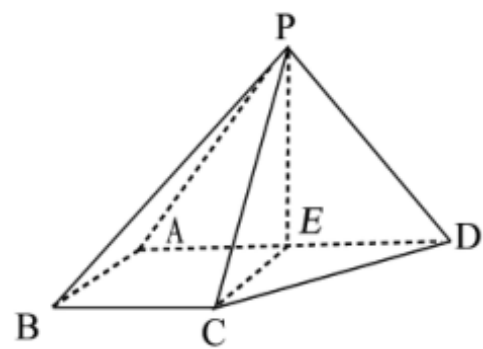


- (1) 将 l 表示成 θ 的函数，并确定 θ 的取值范围；
- (2) 求 l 的最小值及此时 $\sin \theta$ 的值；
- (3) 问当 θ 为何值时， $\triangle EMN$ 的面积 S 取得最小值？并求出这个最小值.

21. (12 分) 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，准线为 l ， AB 为过焦点 F 且垂直于 x 轴的抛物线 C 的弦，已知以 AB 为直径的圆经过点 $(-1, 0)$.

- (1) 求 p 的值及该圆的方程；
- (2) 设 M 为 l 上任意一点，过点 M 作 C 的切线，切点为 N ，证明： $MF \perp FN$.

22. (10 分) 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，
 $AB \perp AD$ ， $\angle ADC = 45^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ， $AD = 2AB = 2$ ， $\triangle ADP$ 为等边三角形，平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$ ， E 为 AD 的中点.



- (1) 求证：平面 $PBC \perp$ 平面 PCE ；
- (2) 点 F 在线段 CD 上，且 $\frac{CF}{FD} = \frac{3}{2}$ ，求平面 PAD 与平面 PBF 所成的锐二面角的余弦值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

根据 $f(x+1)$ 图象关于 y 轴对称可知 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，从而得到 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增且 $f(3)=f(-1)$ ；再根据自变量的大小关系得到函数值的大小关系。

【详解】

Q $f(x+1)$ 为偶函数 $\therefore f(x+1)$ 图象关于 y 轴对称

$\therefore f(x)$ 图象关于 $x=1$ 对称

Q $x \in (1, +\infty)$ 时， $f(x)$ 单调递减 $\therefore x \in (-\infty, 1)$ 时， $f(x)$ 单调递增

又 $f(3)=f(-1)$ 且 $-1 < -\frac{1}{2} < 0$ $\therefore f(-1) < f(-\frac{1}{2}) < f(0)$ ，即 $b < a < c$

本题正确选项：A

【点睛】

本题考查利用函数奇偶性、对称性和单调性比较函数值的大小关系问题，关键是能够通过奇偶性和对称性得到函数的单调性，通过自变量的大小关系求得结果。

2、C

【解析】

根据不动点的定义，利用换底公式分离参数可得 $\ln a = \frac{\ln x}{x}$ ；构造函数 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，并讨论 $g(x)$ 的单调性与最值，

画出函数图象，即可确定 a 的取值范围。

【详解】

由 $\log_a x = x$ 得， $\ln a = \frac{\ln x}{x}$ 。

令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，

$$\text{则 } g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

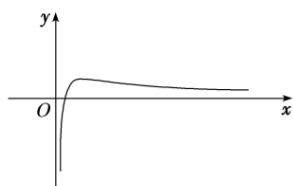
令 $g'(x)=0$ ，解得 $x=e$ ，

所以当 $x \in (0, e)$ 时， $g'(x) > 0$ ，则 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 内单调递增；

当 $x \in (e, +\infty)$ 时， $g'(x) < 0$ ，则 $g(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 内单调递减；

所以 $g(x)$ 在 $x=e$ 处取得极大值，即最大值为 $g(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$ ，

则 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的图象如下图所示：



由 $f(x)$ 有且仅有一个不动点，可得 $\ln a < 0$ 或 $\ln a = \frac{1}{e}$ ，

解得 $0 < a < 1$ 或 $a = e^{\frac{1}{e}}$ 。

故选：C

【点睛】

本题考查了函数新定义的应用，由导数确定函数的单调性与最值，分离参数法与构造函数方法的应用，属于中档题。

3、A

【解析】

列举出金、木、水、火、土任取两个的所有结果共 10 种，其中 2 类元素相生的结果有 5 种，再根据古典概型概率公式可得结果。

【详解】

金、木、水、火、土任取两类，共有：

金木、金水、金火、金土、木水、木火、木土、水火、水土、火土 10 种结果，

其中两类元素相生的有火木、火土、木水、水金、金土共 5 结果，

所以 2 类元素相生的概率为 $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ，故选 A。

【点睛】

本题主要考查古典概型概率公式的应用，属于基础题，利用古典概型概率公式求概率时，找准基本事件个数是解题的关键，基本事件的探求方法有 (1)枚举法：适合给定的基本事件个数较少且易一一列举出的；(2)树状图法：适合于较为复杂的问题中的基本事件的探求。在找基本事件个数时，一定要按顺序逐个写出：先 (A_1, B_1) ， (A_1, B_2) (A_1, B_n) ，再 (A_2, B_1) ， (A_2, B_2) (A_2, B_n) 依次 (A_3, B_1) (A_3, B_2) (A_3, B_n) ... 这样才能避免多写、漏写现象的发生。

4、A

【解析】

分析：设 $f(m) = g(n) = t$ ，则 $t > 0$ ，把 m, n 用 t 表示，然后令 $h(t) = m - n$ ，由导数求得 $h(t)$ 的最小值。

详解：设 $f(m) = g(n) = t$ ，则 $t > 0$ ， $m = e^{t-1}$ ， $n = \ln \frac{t}{2} + \frac{1}{2} = \ln t - \ln 2 + \frac{1}{2}$ ，

$\therefore m - n = e^{t-1} - \ln t + \ln 2 - \frac{1}{2}$ ，令 $h(t) = e^{t-1} - \ln t + \ln 2 - \frac{1}{2}$ ，

则 $h'(t) = e^{t-1} - \frac{1}{t}$ ， $h''(t) = e^{t-1} + \frac{1}{t^2} > 0$ ， $\therefore h'(t)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数，

又 $h'(1) = 0$ ， $\therefore$ 当 $t \in (0, 1)$ 时， $h'(t) < 0$ ，当 $t \in (1, +\infty)$ 时， $h'(t) > 0$ ，

即 $h(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增， $h(1)$ 是极小值也是最小值，

$h(1) = \frac{1}{2} + \ln 2$ ， $\therefore m - n$ 的最小值是 $\frac{1}{2} + \ln 2$ 。

故选 A。

点睛：本题易错选 B，利用导数法求函数的最值，解题时学生可能不会将其中求 $b - a$ 的最小值问题，通过构造新函数，转化为求函数 $h(t)$ 的最小值问题，另外通过二次求导，确定函数的单调区间也很容易出错。

5、C

【解析】

根据服从的正态分布可得 $\mu = 80$ ， $\sigma = 5$ ，将所求概率转化为 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + 2\sigma)$ ，结合正态分布曲线的性质可求得结果。

【详解】

由题意， $\mu = 80$ ， $\sigma = 5$ ，则 $P(75 < X, 85) = 0.6826$ ， $P(70 < X, 90) = 0.9544$ ，

所以 $P(85 < X, 90) = \frac{1}{2} \times (0.9544 - 0.6826) = 0.1359$ ， $P(75 < X, 90) = 0.6826 + 0.1359 = 0.8185$ 。

故果实直径在 $(75, 90]$ 内的概率为 0.8185。

故选：C

【点睛】

本题考查根据正态分布求解待区间的概率问题，考查了正态曲线的对称性，属于基础题。

6、C

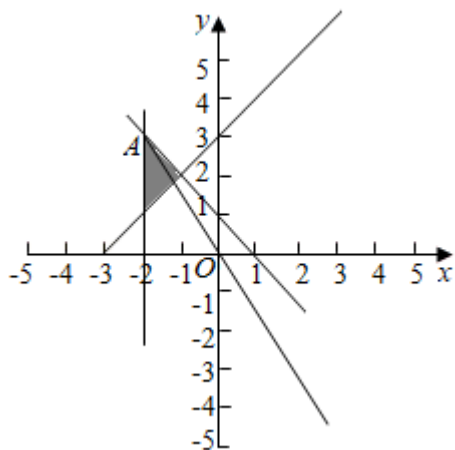
【解析】

由已知画出可行域，利用目标函数的几何意义求最大值。

【详解】

解: $x^2 + y^2$ 表示可行域内的点 (x, y) 到坐标原点的距离的平方, 画出不等式组表示的可行域, 如图, 由 $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$ 即 $A(-2, 3)$



点 $A(-2, 3)$ 到坐标原点 $(0, 0)$ 的距离最大, 即 $(x^2 + y^2)_{\max} = (-2)^2 + 3^2 = 13$.

故选: C.

【点睛】

本题考查线性规划问题, 考查数形结合的数学思想以及运算求解能力, 属于基础题.

7、C

【解析】

因为 $\frac{5i}{1+2i} = \frac{5i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{10+5i}{5} = 2+i$, 所以 $\frac{5i}{1+2i}$ 的虚部是 1, 故选 C.

8、A

【解析】

根据图像的最值求出 A , 由周期求出 ω , 可得 $y = 4\sin(\frac{\pi}{8}x + \varphi)$, 再代入特殊点求出 φ , 化简即得所求.

【详解】

由图像知 $A = 4$, $\frac{T}{2} = 6 - (-2) = 8$, $T = 16 = \frac{2\pi}{\omega}$, 解得 $\omega = \frac{\pi}{8}$,

因为函数 $y = 4\sin(\frac{\pi}{8}x + \varphi)$ 过点 $(2, -4)$, 所以 $4\sin(\frac{\pi}{8} \times 2 + \varphi) = -4$,

$\sin(\frac{\pi}{8} \times 2 + \varphi) = -1$, 即 $\frac{\pi}{8} \times 2 + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$,

解得 $\varphi = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{5\pi}{4}$,

$$y = 4 \sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{5\pi}{4}\right) = -4 \sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{4}\right).$$

故选：A

【点睛】

本题考查根据图像求正弦型函数的解析式，三角函数诱导公式，属于基础题.

9、D

【解析】

利用线面平行和垂直，面面平行和垂直的性质和判定定理对四个命题分别分析进行选择.

【详解】

当两个平面相交时，一个平面内的两条直线也可以平行于另一个平面，故①错误；由平面与平面垂直的判定可知②正确；空间中垂直于同一条直线的两条直线还可以相交或者异面，故③错误；若两个平面垂直，只有在一个平面内与它们的交线垂直的直线才与另一个平面垂直，故④正确. 综上，真命题是②④.

故选：D

【点睛】

本题考查命题真假的判断，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查空间想象能力，是中档题.

10、C

【解析】

求得双曲线的渐近线方程，可得圆心 $(0, 2)$ 到渐近线的距离 $d \geq \sqrt{2}$ ，由点到直线的距离公式可得 a 的范围，再由离心率公式计算即可得到所求范围.

【详解】

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线为 $y = \frac{1}{a}x$ ，即 $x - ay = 0$ ，

由题意知，直线 $x - ay = 0$ 与圆 $x^2 + (y - 2)^2 = 2$ 相切或相离，则 $d = \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} \geq \sqrt{2}$ ，

解得 $a \geq 1$ ，因此，双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} \in (1, \sqrt{2}]$.

故选：C.

【点睛】

本题考查双曲线的离心率的范围，注意运用圆心到渐近线的距离不小于半径，考查化简整理的运算能力，属于中档题.

11、C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/827011123104006056>