6.4.3　余弦定理、正弦定理

第2课时　正弦定理

自主预习·新知导学

合作探究·释疑解惑

易　错　辨　析

自主预习・新知导学

一、正弦定理

1.在ΔABC中,若$A=30°$,$B=45°$,$AC=4$,你能用余弦定理求出BC吗?

提示:不能.

2.在 Rt$\triangle ABC$ 中,$A=30°$,斜边 $c=2$.

(1)请你求出$\triangle ABC$ 的其他边和角;

(2)计算$\frac{a}{\sin A}, \frac{b}{\sin B}, \frac{c}{\sin C}$的值,三者之间有何关系?

(3)对任意的直角三角形是否也有(2)中的结论?

提示:(1)$C=90°$,$B=60°$,$a=c\sin 30°=1$,$b=c\cos 30°=\sqrt{3}$.

(2)由(1)知,$\frac{a}{\sin A}=\frac{1}{\sin 30°}=2$,$\frac{b}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60°}=2$,$\frac{c}{\sin C}=\frac{2}{\sin 90°}=2$,

即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2$.

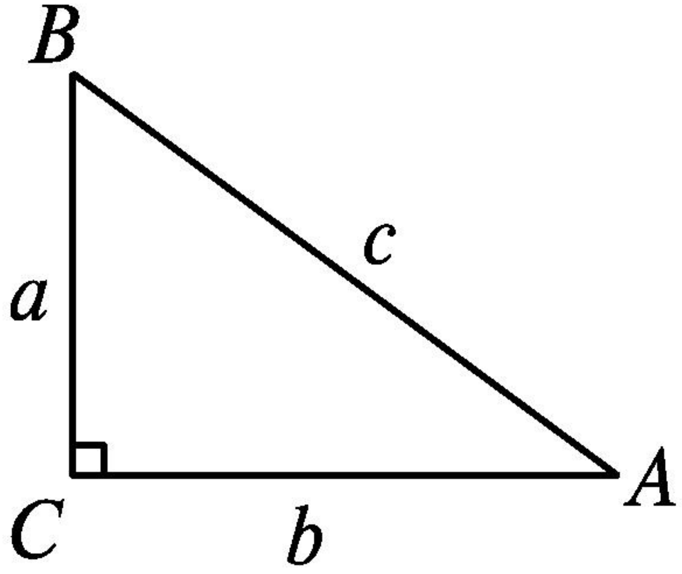
(3)如图,$\triangle ABC$ 为任意的一个直角三角形,

$\because \sin A=\frac{a}{c}, \sin B=\frac{b}{c}$,

$\therefore \frac{a}{\sin A}=c, \frac{b}{\sin B}=c$.

又 $\frac{c}{\sin C}=\frac{c}{\sin 90^\circ}=c$,

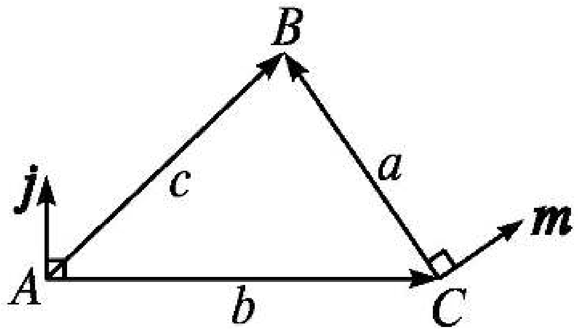
$\therefore \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=c$.



故对任意的直角三角形也有(2)中的结论.

3.当$\triangle ABC$是一般的锐角三角形或钝角三角形时,上述2(2)中的结论是否成立?你能利用向量方法研究锐角三角形中的这个边角关系吗?

提示:成立.如图,$\triangle ABC$ 为锐角三角形,过点 A 作与$\overrightarrow{AC}$垂直的单位向量 $\mathbf{j}$,则 $\mathbf{j}$ 与$\overrightarrow{AB}$的夹角为$\frac{\pi}{2}$-A, $\mathbf{j}$ 与$\overrightarrow{CB}$的夹角为$\frac{\pi}{2}$-C.



因为$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$,所以 $\mathbf{j}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\mathbf{j}\cdot\overrightarrow{AB}$.

由分配律,得 $\mathbf{j}\cdot\overrightarrow{AC}+\mathbf{j}\cdot\overrightarrow{CB}=\mathbf{j}\cdot\overrightarrow{AB}$,

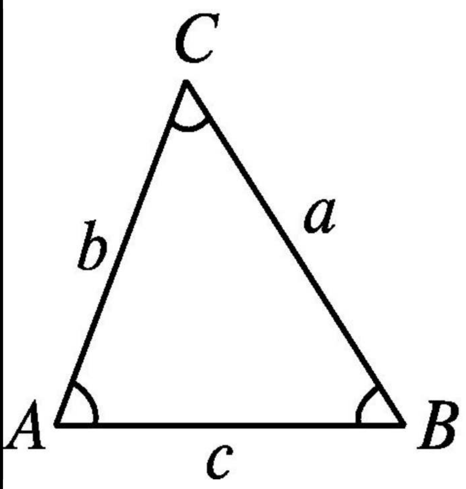
即$|\mathbf{j}||\overrightarrow{AC}|\cos\ \frac{\pi}{2}+|\mathbf{j}||\overrightarrow{CB}|\cos\ \frac{\pi}{2}-C\ =|\mathbf{j}||\overrightarrow{AB}|\cos\ \frac{\pi}{2}-A$,

也即 $a\sin C=c\sin A$,即$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$.

同理,过点 C 作与$\overrightarrow{CB}$垂直的单位向量 $\mathbf{m}$,可得$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$.

因此$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

4.正弦定理

<table>
<tr><td>文字语言</td><td>在一个三角形中,各边和它所对角的______的比相等</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>符号语言</td><td>$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$</td></tr>
</table>

5.在$\triangle ABC$中,$a=2$,$b=1$,$\sin A=\frac{1}{3}$,则$\sin B=$__________.

答案:$\frac{1}{6}$

二、与正弦定理有关的结论

1.在正弦定理中,三角形的各边与其所对角的正弦的比都相等,这个比值等于多少?与该三角形外接圆的直径有什么关系?

提示:这个比值恰好等于该三角形外接圆的直径 $2R$,即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,其中 R 是该三角形外接圆的半径.

2.正弦定理的推论:设 R 是△ABC 外接圆的半径,则$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$=2$R$.

3.正弦定理的变形(R 是△ABC 外接圆的半径)

(1)a=________,b=________,c=________;

(2)$\sin A=\frac{a}{2R}$,$\sin B=\frac{b}{2R}$,$\sin C=\frac{c}{2R}$;

(3)$a∶b∶c$=____________________.

4.(1)在$\triangle ABC$中,$a=2,b=3$,则$\dfrac{\sin A}{\sin B}$等于(　　)

A.$\dfrac{3}{2}$　　B.$\dfrac{2}{3}$　　C.$\dfrac{2}{5}$　　D.不确定

(2)在$\triangle ABC$中,若$a=2,\sin A=\dfrac{1}{3}$,则$\triangle ABC$外接圆的半径R等于

________.

解析:(1)由正弦定理的变形,得$\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{3}$.

(2)由正弦定理的推论,得$2R=\dfrac{a}{\sin A}=6$,即$R=3$.

答案:(1)B　(2)3

合作探究·释疑解惑

探究一　探究二　探究三

探究一　已知两角和一边解三角形

【例1】　在$\triangle ABC$中,已知$A=60°$,$B=45°$,$c=2$,求C,a,b.

分析:先根据三角形的内角和定理求出角C,再由正弦定理求a,b.

解:在$\triangle ABC$中,$C=180°-(A+B)=180°-(60°+45°)=75°$.

$\sin 75°=\sin(45°+30°)$

$=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$.

根据正弦定理,得

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{2\sin 60°}{\sin 75°}=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}}=\sqrt{6}(\sqrt{3}-1),$$

$$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{2\sin 45°}{\sin 75°}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}}=2(\sqrt{3}-1).$$

反思感悟

当已知三角形的两角和一边,解三角形的步骤:(1)利用三角形内角和定理求出第三个角;(2)利用正弦定理求出另外两边.

【变式训练 1】 在$\triangle ABC$中,若$a=2,\cos A=\frac{2\sqrt{5}}{5},\cos B=-\frac{1}{4}$,则$b=$__________.

解析: $\because \cos A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\because \cos B=-\frac{1}{4}$, $\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{2\times\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

答案: $\frac{5\sqrt{3}}{2}$