湖北省武汉市黄陂区第七高级中学2024届高三模拟考试（一）

数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知向量$\vec{a}=(-1,2)$，$\vec{b}=(x,4)$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$|\vec{b}|=$（　）

A．$4\sqrt{5}$　　B．$4\sqrt{3}$　　C．$2\sqrt{5}$　　D．8

2．已知复数z满足$\overline{z}=z+2\mathrm{i}$，则复数$z$的虚部为（　）

A．i　　B．1　　C．$-\mathrm{i}$　　D．-1

3．已知等比数列$\{a_n\}$的前n项积为T_n，$a_1=16$，公比$q=\frac{1}{2}$，则T_n取最大值时n的值为（　）

A．3　　B．6　　C．4或5　　D．6或7

4．过点$(3,1)$作圆$(x-1)^2+(y-2)^2=4$的切线，则切线方程为（　）

A．$3x-4y-5=0$　　B．$3x+4y-13=0$

C．$3x+4y-13=0$或$x=3$　　D．$3x-4y-5=0$或$x=3$

5．规定：在整数集$\mathbf{Z}$中，被7除所得余数为k的所有整数组成一个“家族”，记为$[k]$，即$[k]=\{7n+k|n\in\mathbf{Z}\}$，$k=0,1,2,3,4,5,6$，给出如下四个结论：①$2021\in[5]$；②$-3\in[3]$；③若整数$a$，$b$属于同一“家族”，则$a-b\in[0]$；④若$a-b\in[0]$，则整数$a$，$b$属于同一“家族”．其中，正确结论的个数是（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

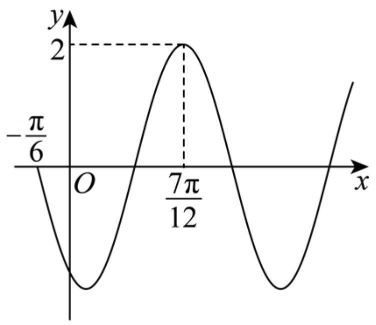
6．已知$a=\ln\frac{\pi}{3},b=2\sqrt{\frac{\pi}{3}}-2,c=2\tan\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}-1\right)$，则$a,b,c$的大小关系是（　）

A．$c>b>a$　　B．$a>b>c$

C．$b>a>c$　　D．$a>c>b$

7．已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\pi$）的部分图象如图所示，将$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得函数$y=g(x)$的图象，若$g(x)=\frac{1}{2}$在$(0,\pi)$

上有两个不同的根x_1，x_2（$x_1<x_2$），则$\sin\left(x_1-x_2\right)$的值为（　　）



A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{1}{4}$　　D．$-\frac{\sqrt{15}}{4}$

8．在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D$中，底面$ABCD$是边长为4的正方形，侧棱$AA_1=t\left(t>4\right)$，点E是BC的中点，点P是侧面ABB_1A_1内的动点(包括四条边上的点)，且满足$\tan\angle APD=4\tan\angle EPB$，则四棱锥$P-ABED$的体积的最大值是（　　）

A．$\frac{4\sqrt{3}}{4}$　　B．$16\sqrt{3}$　　C．$\frac{16\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{64\sqrt{3}}{9}$

二、多选题

9．已知$0<x_1<x_2<1$，下列不等式恒成立的是（　　）

A．$x_2e^{x_1}>x_1e^{x_2}$　　B．$x_2\ln x_1<x_1\ln x_2$

C．$x_1\ln x_1<x_2\ln x_2$　　D．$e^{x_1}+e^{x_2}<\ln x_2+\ln x_1$

10．已知离散型随机变量X服从二项分布$B\left(n,p\right)$，其中$n\in N^*,0<p<1$，记X为奇数的概率为a，X为偶数的概率为b，则下列说法中正确的有（　　）

A．$a+b=1$　　B．$p=\frac{1}{2}$时，$a=b$

C．$0<p<\frac{1}{2}$时，a随着n的增大而增大　D．$\frac{1}{2}<p<1$时，a随着n的增大而减小

11．在椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$中，其所有外切矩形的顶点在一个定圆$\Gamma:x^2+y^2=a^2+b^2$上，称此圆为该椭圆的蒙日圆.该圆由法国数学家$G\cdot Monge$（1746-1818）最先发现.若椭圆$C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，则下列说法正确的有（　　）

A．椭圆C外切矩形面积的最小值为48

B．椭圆C外切矩形面积的最大值为48

C．点 $P\left(x,y\right)$ 为蒙日圆 Γ 上任意一点，点 $M\left(-10,0\right)$，$N\left(0,10\right)$，当 $\angle PMN$ 取最大值时，$\tan\angle PMN=2+\sqrt{3}$

D．若椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过椭圆 C 上一点 P 和原点作直线 l 与蒙日圆相交于点 M，N，则 $PF_1\cdot PF_2=PM\cdot PN$

三、填空题

12．已知 $\left(2-x\right)^4=a_0+a_1\left(x+1\right)+a_2\left(x+1\right)^2+a_3\left(x+1\right)^3+a_4\left(x+1\right)^4$，则 $\left|a_0\right|+\left|a_1\right|+\left|a_2\right|+\left|a_3\right|+\left|a_4\right|=$______.

13．已知 $F_1\left(-c,0\right)$，$F_2\left(c,0\right)$ 分别为椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左、右焦点，过点 $P\left(3c,0\right)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A，B 两点，若 $\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PA}$，$\left|F_2B\right|=3\left|F_2A\right|$，则椭圆 C 的离心率为______.

14．已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$.若对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，不等式 $2^na_n(4-\lambda)>\left(a_n-1\right)^2$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围为________.

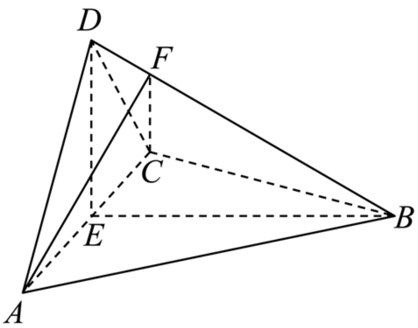
四、解答题

15．已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 的首项为正数，其前 n 项和 S_n 满足 $2S_n=3a_n-\dfrac{8}{4S_n-3a_n}$.

(1)求实数 λ 的值，使得 $\left\{S_n^2+\lambda\right\}$ 是等比数列；

(2)设 $b_n=\dfrac{3^n}{S_nS_{n+1}}$，求数列 $\left\{b_n^2\right\}$ 的前 n 项和.

16．如图，四面体 $ABCD$ 中，$AD\perp CD,AD=CD,\angle ADB=\angle BDC$，$E$ 为 AC 的中点.



(1)证明：平面 $BED\perp$ 平面 ACD；

(2)设 $AB=BD=2,\angle ACB=60^\circ$，点 F 在 BD 上，当 $\triangle AFC$ 的面积最小时，求 CF 与平面 ABD 所成的角的正弦值.

17．在游戏中，玩家可通过祈愿池获取新角色和新武器．某游戏的角色活动祈愿池的祈愿规则为：①每次祈愿获取五星角色的概率 $p_0=0.006$；②若连续 89 次祈愿都没有获取五星角色，那么第 90 次祈愿必定通过“保底机制”获取五星角色；③除触发“保底机制”外，每次祈愿相互独立．设 X 表示在该祈愿池中连续祈愿直至获取五星角色为止的祈愿次数.

(1)求 X 的概率分布；

(2)求 X 的数学期望（保留小数点后两位）.

参考数据：$0.994^{90}\approx 0.582$.

18．以双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 F 为圆心作圆，与 C 的一条渐近线相切于点 $Q\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)$

(1)求 C 的方程.

(2)在 x 轴上是否存在定点 M，过点 M 任意作一条不与坐标轴垂直的直线 l，当 l 与 C 交于 A,B 两点时，直线 AF,BF 的斜率之和为定值？若存在，求出 M 点的坐标，若不存在，说明理由.

19．设 $y=f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的函数，若存在区间 $\left[a,b\right]$ 和 $x_0\in(a,b)$，使得 $y=f\left(x\right)$ 在 $[a,x_0]$ 上严格减，在 $[x_0,b]$ 上严格增，则称 $y=f\left(x\right)$ 为“含谷函数”，x_0 为“谷点”，$\left[a,b\right]$ 称为 $y=f\left(x\right)$ 的一个“含谷区间”.

(1)判断下列函数中，哪些是含谷函数？若是，请指出谷点；若不是，请说明理由：

（i）$y=2|x|$，（ii）$y=x+\cos x$；

(2)已知实数 $m>0$，$y=x^2-2x-m\ln\left(x-1\right)$ 是含谷函数，且 $\left[2,4\right]$ 是它的一个含谷区间，求 m 的取值范围；

(3)设 $p,q\in$ R，$h\left(x\right)=-x^4+px^3+qx^2+\left(4-3p-2q\right)x$．设函数 $y=h\left(x\right)$ 是含谷函数，$\left[a,b\right]$ 是它的一个含谷区间，并记 $b-a$ 的最大值为 $L\left(p,q\right)$．若 $h\left(1\right)\le h\left(2\right)$，且 $h\left(1\right)\le 0$，求 $L\left(p,q\right)$ 的最小值.

参考答案：

1．A

【分析】先应用向量垂直数量积为 0 求参，再根据模长公式求模长即可.

【详解】因为$\vec{a} \perp \vec{b}$,所以$\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \times x + 2 \times 4 = 0$,所以$x = 8$,

因为$\vec{b} = (8,4)$，所以$|\vec{b}| = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$.

故选：A.

2．D

【分析】利用共轭复数的概念和复数的运算解求解.

【详解】设复数$z = a + bi$，$\therefore \bar{z} = a - bi$，

又$\bar{z} = z + 2i$，可得$a - bi = a + bi + 2i$，解得$b = -1$，

所以复数z的虚部为-1.

故选：D.

3．C

【分析】先求出等比数列通项公式，进而得到$T_n = 2^{\frac{-\left(n-\frac{9}{2}\right)^2 + \frac{81}{4}}{2}}$，求出答案.

【详解】$a_n = a_1 q^{n-1} = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^4 \times 2^{1-n} = 2^{5-n}$，

故$T_n = a_1 a_2 \cdots a_n = 2^4 \times 2^3 \times \cdots \times 2^{5-n} = 2^{4+3+\cdots+5-n} = 2^{\frac{n(4+5-n)}{2}} = 2^{\frac{-n^2+9n}{2}} = 2^{\frac{-\left(n-\frac{9}{2}\right)^2 + \frac{81}{4}}{2}}$，

因为$n \in \mathrm{N}^*$，所以$n = 4$或 5 时，T_n取得最大值.

故选：C

4．D

【分析】根据切线斜率是否存在分类讨论，利用圆心到切线距离等于半径可求结果.

【详解】由圆心为$(1,2)$，半径为 2，斜率存在时，设切线为$y = k(x-3)+1$，

则$d = \frac{|-1-2k|}{\sqrt{1+k^2}} = 2$，可得$k = \frac{3}{4}$，所以$y = \frac{3}{4}(x-3)+1$，即$3x - 4y - 5 = 0$；

斜率不存在时，$x = 3$，显然与圆相切，

综上，切线方程为$3x - 4y - 5 = 0$或$x = 3$.

故选：D.

5．C

【分析】根据“家族”的定义逐一判断四个选项即可得正确答案.

【详解】对于①：因为$2021=288\times 7+5$，所以$2021\in[5]$，故①正确；

对于②：因为$-3=7\times(-1)+4$，所以$-3\in[4]$，故②错误；

对于③：若a与b属于同一“家族”，则$a=7n_1+k$，$b=7n_2+k$，$a-b=7(n_1-n_2)\in[0]$（其中$n_1,n_2\in\mathbf{Z}$），故③正确；

对于④：若$a-b\in[0]$，设$a-b=7n$，$n\in\mathbf{Z}$，即$a=7n+b$，$n\in\mathbf{Z}$，不妨令$b=7m+k$，$m\in\mathbf{Z}$，$k=0,1,2,3,4,5,6$，则$a=7m+7n+k=7(m+n)+k$，$m\in\mathbf{Z}$，$n\in\mathbf{Z}$，所以a与b属于同一“家族”，故④正确；即①③④为正确结论.

故选：C.

6．A

【分析】构造函数$f(x)=\ln x-(x-1)$，利用导数可证明$\ln x<x-1$，据此可判断$a<b$，再由$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时$x<\tan x$判断$b,c$.

【详解】设$f(x)=\ln x-(x-1)$，则$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$，当$0<x<1$时，$f'(x)>0$，

当$1<x$时，$f'(x)<0$，所以函数$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$单调递减，

所以$x=1$时，$f(x)_{\max}=f(1)=0$，所以$f(x)<0$，即$\ln x<x-1$，

所以$a=\ln\dfrac{\pi}{3}=2\ln\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}<2\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}-1\right)=b$，

又$c=2\tan\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}-1\right)>2\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}-1\right)=b$（$\tan x>x$，对任意$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$恒成立）.

因此$c>b>a$，

故选：A.

7．D

【分析】首先求出$\omega=2$，再代入点坐标得到$\varphi=-\dfrac{2\pi}{3}$，分析得到$x_1+x_2=\dfrac{5\pi}{6}$，再代入计算即可.

【详解】设$f(x)$的最小正周期为T，由图象可知$A=2$，$\dfrac{3}{4}T=\dfrac{7\pi}{12}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{4}$，所以$T=\pi$，

则$\omega=2$，于是$f\left(x\right)=2\sin(2x+\varphi)$，又$f\left(x\right)$的图象过点$\left(\frac{7\pi}{12},2\right)$，

所以$2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，所以$\varphi=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$，

又$|\varphi|<\pi$，则$\varphi=-\frac{2\pi}{3}$，　$f\left(x\right)=2\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$，则$g\left(x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，由

$2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，

得$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}$，则$\sin\left(2x_1-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x_2-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}$，

又当$x\in\left(0,\pi\right)$时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$，所以$\frac{2x_1-\frac{\pi}{3}+2x_2-\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{2}$，得$x_1+x_2=\frac{5\pi}{6}$，

则$x_2=\frac{5\pi}{6}-x_1$，$\sin\left(x_1-x_2\right)=\sin\left(2x_1-\frac{5\pi}{6}\right)=-\cos\left(2x_1-\frac{\pi}{3}\right)$，

结合$x_1<x_2$知$2x_1-\frac{\pi}{3}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\cos\left(2x_1-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{15}}{4}$，所以$\sin\left(x_1-x_2\right)=-\frac{\sqrt{15}}{4}$.

故选：D.

8．C

【解析】由题意画出图象，根据$\tan\angle APD=4\tan\angle EPB$，求出$PA=\frac{1}{2}PB$，设$PN=h$，

$AN=x$，则$BN=4-x$，$x\in[0，4]$，由$PA=\frac{1}{2}PB$，得$PA^2=\frac{1}{4}PB^2$，即

$h^2+x^2=\frac{1}{4}[h^2+(4-x)^2]$，求出$h^2$的解析式，可得$h$的最大值，再由棱锥体积公式求解.

【详解】解：作$PN\perp AB$于N，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，

$DA\perp$平面A_1ABB_1，$CB\perp$平面A_1ABB_1，

在$\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{PAD}$和$\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{PBC}$中，$\tan\angle APD=\frac{AD}{AP}$，$\tan\angle EPB=\frac{BE}{PB}$，

Q $\tan\angle APD=4\tan\angle EPB$，$BE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD$，$\therefore PA=\frac{1}{2}PB$，

设$PN=h$，$AN=x$，则$BN=4-x$，$x\in[0，4]$，

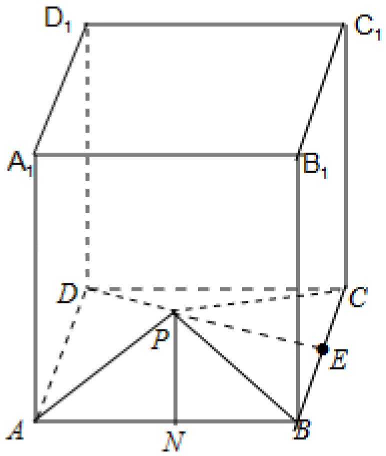
由$PA=\frac{1}{2}PB$，得$PA^2=\frac{1}{4}PB^2$，即$h^2+x^2=\frac{1}{4}[h^2+(4-x)^2]$，

整理得$h^2=-x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{3}$，$x\in[0，4]$，开口向下，对称轴为$x=-\frac{4}{3}$，

$\therefore$在$x\in[0，4]$单调递减，则$x=0$时，h^2取到最大值$\frac{16}{3}$，即h的最大值为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$四棱锥$P-ABED$的体积的最大值是$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(2+4)\times4\times\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

故选：C.



【点睛】考查棱柱、棱锥的体积的计算，利用了构造函数法及单调性和最值，属于中档题.

9．AB

【分析】A 选项，构造函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x}{e^{x}},x\in\left(0,1\right)$，通过求导研究其单调性得到证明；B 选项，构造 $g\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x},x\in\left(0,1\right)$，通过求导研究其单调性，进行求解；C 选项，构造 $h\left(x\right)=x\ln x,x\in\left(0,1\right)$，通过求导研究其单调性，进行求解；D 选项，利用中间值比大小.

【详解】令 $f\left(x\right)=\dfrac{x}{e^{x}},x\in\left(0,1\right),f'\left(x\right)=\dfrac{1-x}{e^{x}}>0,f\left(x\right)$ 在 $x\in\left(0,1\right)$ 内单调递增.

$\therefore 0<x_1<x_2<1$ 时，$\dfrac{x_1}{e^{x_1}}<\dfrac{x_2}{e^{x_2}}$，即 $x_1e^{x_2}<x_2e^{x_1}$, A 选项正确；

令 $g\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x},x\in\left(0,1\right),g'\left(x\right)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0,g\left(x\right)$ 在 $x\in\left(0,1\right)$ 内单调递增，

$\therefore 0<x_1<x_2<1,\dfrac{\ln x_1}{x_1}<\dfrac{\ln x_2}{x_2}$，即 $x_2\ln x_1<x_1\ln x_2$，B 选项正确；

令 $h\left(x\right)=x\ln x,x\in\left(0,1\right),h'\left(x\right)=\ln x+1,x\in\left(0,1\right)$，当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 时，$h'\left(x\right)<0,h\left(x\right)$ 单调递减，当 $x\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ 时，$h'\left(x\right)>0,h\left(x\right)$ 单调递增，$h\left(x_1\right)$ 与 $h\left(x_2\right)$ 大小不确定，C 错误；

当 $0<x_1<x_2<1$ 时，$\ln x_1+\ln x_2<0\quad e^{x_2}+e^{x_1}>0$，D 错误

故选：AB

10．ABC

【分析】选项 A 利用概率的基本性质即可，B 选项由条件可知满足二项分布，利用二项分布进行分析，选项 C，D 根据题意把 a 的表达式写出，然后利用单调性分析即可.

【详解】对于 A 选项，由概率的基本性质可知，$a+b=1$，

故 A 正确，

对于 B 选项，由 $p=\frac{1}{2}$时，离散型随机变量 X 服从二项分布 $B\left(n,\frac{1}{2}\right)$，

则 $P=\left(X=k\right)=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}\left(k=0,1,2,3,\cdots,n\right)$，

所以 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots\cdots\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\times 2^{n-1}=\frac{1}{2}$，

$b=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots\cdots\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\times 2^{n-1}=\frac{1}{2}$，

所以 $a=b$，故 B 正确，

对于 C,D 选项，$a=\frac{\left[\left(1-p\right)+p\right]^n-\left[\left(1-p\right)-p\right]^n}{2}=\frac{1-\left(1-2p\right)^n}{2}$，

当 $0<p<\frac{1}{2}$时，$a=\frac{1-\left(1-2p\right)^n}{2}$为正项且单调递增的数列，

故 a 随着 n 的增大而增大故选项 C 正确，

当 $\frac{1}{2}<p<1$时，$a=\left(1-2p\right)^n$为正负交替的摆动数列，

故选项 D 不正确.

故选：ABC.

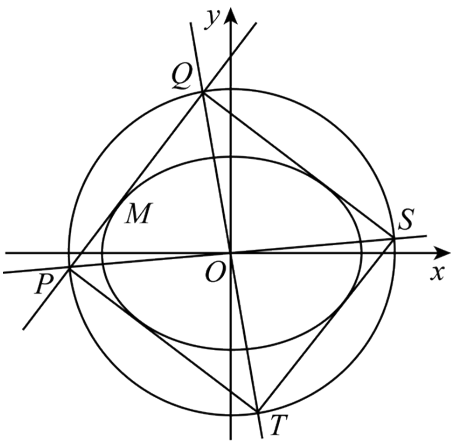
11．ACD

【分析】先求得椭圆 C 的蒙日圆方程 $x^2+y^2=25$，然后利用外切矩形的面积结合二次函数求最值可判断 A，B 选项，

利用两角和的正切公式，椭圆的定义，向量运算的转化来判断 C，D 选项

【详解】对于 A，B：如图，设对于椭圆 C 上任意点 M，过点 M 作椭圆的切线交圆 $\Gamma:x^2+y^2=25$ 于 P，Q 两点，

P，Q 关于原点对称的点分别为S，T，则椭圆 C 的一个外切矩形为 $PQST$，



则 $S=\left|PQ\right|\cdot\left|QS\right|$，由图象易知，

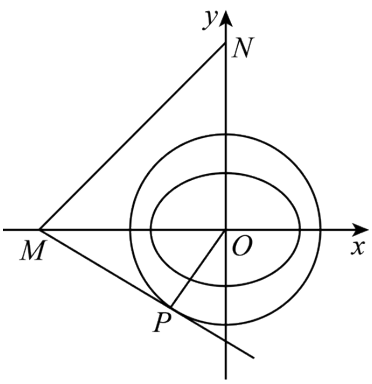
圆心 O 到直线 PQ 的距离 $d\in\left[3,4\right]$，所以 $\left|PQ\right|\in\left[6,8\right]$.

又 $\left|PQ\right|^2+\left|QS\right|^2=100$，所以外切矩形为 $PQST$ 的面积 $S=\sqrt{|PQ|^2\cdot\left(100-|PQ|^2\right)}\in\left[48,50\right]$，

因此 A 对，B 错.

对于 C：当 PM 与圆相切且切点 P 在圆下方时，$\angle PMN$ 最大，$\tan\angle PMO=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\angle NMO=45^\circ$，

$\therefore \tan\angle PMN=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3}$, C 对.



对于 D：$PF_1+PF_2=8,\therefore PF_1^2+PF_2^2+2PF_1\cdot PF_2=64$，

$\therefore PF_1^2+PF_2^2=64-2PF_1\cdot PF_2$，

$\begin{cases}\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}=2\overrightarrow{PO}\\ \overrightarrow{PF_1}-\overrightarrow{PF_2}=\overrightarrow{F_2F_1}\end{cases}\therefore\begin{cases}\overrightarrow{PF_1}^2+\overrightarrow{PF_2}^2+2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=4\overrightarrow{PO}^2 ①\\ \overrightarrow{PF_1}^2+\overrightarrow{PF_2}^2-2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\overrightarrow{F_1F_2}^2 ②\end{cases}$

① + ② 得 $PF_1^2+PF_2^2=2PO^2+14,\therefore PO^2=25-PF_1\cdot PF_2$，