

第 11 讲 高考难点突破三：圆锥曲线的综合问题（最值、范围问题）

目录

高频考点一：椭圆中最值问题.....	1
高频考点二：椭圆中参数范围问题.....	9
高频考点三：双曲线中最值问题.....	17
高频考点四：双曲线中参数范围问题.....	24
高频考点五：抛物线中最值问题.....	31
高频考点六：抛物线中参数范围问题.....	38

高频考点一：椭圆中最值问题

典型例题

例题 1. （2023·河南洛阳·洛宁县第一高级中学校考模拟预测）已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A, B ，左焦点为 $F(-\sqrt{3}, 0)$ ，点 $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ 在椭圆上.

(1) 求 C 的方程；

(2) 设直线 l 与 C 交于不同于 B 的 M, N 两点，且 $BM \perp BN$ ，求 $|BM| \cdot |BN|$ 的最大值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) $\frac{32}{25}$

【详解】(1) 依题意得
$$\begin{cases} c = \sqrt{3} \\ \frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1, \text{ 解得 } a^2 = 4, \quad b^2 = 1, \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 由题意知, 直线 l 的斜率不为 0,

则不妨设直线 l 的方程为 $x = my + t (t \neq 2)$,

联立, 消去 x 得 $(m^2 + 4)y^2 + 2mty + t^2 - 4 = 0$,

$\Delta = 4m^2t^2 - 4(m^2 + 4)(t^2 - 4) > 0$, 化简整理得 $m^2 + 4 > t^2$,

设 $M(x_1, y_1)$, , 则 $y_1 + y_2 = -\frac{2mt}{m^2 + 4}$, $y_1y_2 = \frac{t^2 - 4}{m^2 + 4}$,

因为 $BM \perp BN$, 所以,

因为 $B(2, 0)$, 所以, $\overrightarrow{BN} = (x_2 - 2, y_2)$,

得 $(x_1 - 2)(x_2 - 2) + y_1y_2 = 0$,

将, 代入上式得 $(m^2 + 1)y_1y_2 + m(t - 2)(y_1 + y_2) + (t - 2)^2 = 0$,

得 $(m^2 + 1) \cdot \frac{t^2 - 4}{m^2 + 4} + m(t - 2) \cdot \frac{-2mt}{m^2 + 4} + (t - 2)^2 = 0$, 整理得 $5t^2 - 16t + 12 = 0$,

解得 $t = \frac{6}{5}$ 或 $t = 2$ (舍去).

所以直线 l 的方程为 $x = my + \frac{6}{5}$, 则直线 l 恒过点 $Q(\frac{6}{5}, 0)$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_{\triangle BMN} &= \frac{1}{2} |BQ| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = \frac{2}{5} \sqrt{\left(-\frac{12}{5}m\right)^2 - 4 \times \frac{(\frac{6}{5})^2 - 4}{m^2 + 4}} \\ &= \frac{8}{25} \sqrt{\frac{25(m^2 + 4) - 36}{(m^2 + 4)^2}}, \end{aligned}$$

设 $p = \frac{1}{m^2 + 4}$, 则 $0 < p \leq \frac{1}{4}$, $S_{\triangle BMN} = \frac{8}{25} \sqrt{-36p^2 + 25p}$,

易知 $y = \frac{8}{25} \sqrt{-36p^2 + 25p}$ 在 $(0, \frac{1}{4}]$ 上单调递增,

所以 $p = \frac{1}{4}$ 时, $S_{\triangle BMN}$ 取得最大值 $\frac{16}{25}$,

又 $S_{\triangle BMN} = \frac{1}{2} |BM| \cdot |BN|$,

所以 $(|BM| \cdot |BN|)_{\max} = 2(S_{\triangle BMN})_{\max} = \frac{32}{25}$.

例题 2. (2023 · 北京通州 · 统考三模) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 椭圆 C 截直线 $x = \sqrt{2}$ 所得线段的长度为 2.

(1) 求椭圆 C 的方程

(2) 动直线交椭圆 C 于 A, B 两点, 交 y 轴于点 M , D 为线段 AB 的中点, 点 N 是 M 关于 O 的对称点,

以 N 点为圆心的圆过原点 O , 直线 DF 与 $\odot O$ 相切于点 F , 求 $\frac{|ND|}{|NF|}$ 的最大值

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2) 2

【详解】(1) 由椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

得 $a^2 = 2(a^2 - b^2)$.

又当 $x = \sqrt{2}$ 时,

得 $b^2 - \frac{2b^2}{a^2} = 1$,

所以 $a^2 = 4, b^2 = 2$

因此椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2)

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

联立方程 $\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 2y^2 = 4 \end{cases}$ 得

由 $\Delta > 0$ 得 (*)

且 $x_1 + x_2 = \frac{4km}{2k^2 + 1}$,

因此 $y_1 + y_2 = \frac{2m}{2k^2 + 1}$,

所以 $D\left(-\frac{2km}{2k^2 + 1}, \frac{m}{2k^2 + 1}\right)$

又 $N(0, -m)$,

所以 $|ND|^2 = \left(-\frac{2km}{2k^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{m}{2k^2 + 1} + m\right)^2$

整理得: $|ND|^2 = \frac{4m^2(1 + 3k^2 + k^4)}{(2k^2 + 1)^2}$,

因为 $|NF| = |m|$

$$\text{所以 } \frac{|ND|^2}{|NF|^2} = \frac{4(k^4 + 3k^2 + 1)}{(2k^2 + 1)^2} = 1 + \frac{8k^2 + 3}{(2k^2 + 1)^2}$$

$$\text{令 } t = 8k^2 + 3 \geq 3 \text{ 故 } 2k^2 + 1 = \frac{t+1}{4}$$

$$\text{所以 } \frac{|ND|^2}{|NF|^2} = 1 + \frac{16t}{(1+t)^2} = 1 + \frac{16}{t + \frac{1}{t} + 2}$$

因为 $y = t + \frac{1}{t}$ 上单调递增，

$$\text{因此 } y = t + \frac{1}{t} \geq \frac{10}{3}$$

等号当且仅当 $t = 3$ 时成立，

此时

$$\frac{|ND|}{|NF|} \text{ 最大值为 } 2.$$

例题 3. (2023 · 四川成都 · 石室中学校考模拟预测) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{1}{2}$ ，点 F_1, F_2 为椭圆 C 的左、右焦点且经过点 $F_1(-c, 0)$ 的最短弦长为 3.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过点 F_1 分别作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 ，且 l_1 与椭圆交于不同两点 A, B ， l_2 与直线 $x = c$ 交于点 P ，若，且点 Q 满足，求 $|PQ|$ 的最小值.

$$\text{【答案】(1) } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

(2) 5

$$\text{【详解】(1) 由题意，解得 } a^2 = 4, b^2 = 3, \text{ 所以椭圆的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 由 (1) 得 $F_1(-1, 0)$ ，若直线 l_1 的斜率为 0，则 l_2 为 $x = -1$ 与直线 $x = 1$ 无交点，不满足条件.

设直线 $l_1: x = my - 1$ ，若 $m = 0$ ，则 $\lambda = 1$ 则不满足，所以 $m \neq 0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), Q(x_0, y_0)$,

$$\text{由得: } (3m^2 + 4)y^2 - 6my - 9 = 0, y_1 + y_2 = \frac{6m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = -\frac{9}{3m^2 + 4}.$$

因为，即，则 $-y_1 = \lambda y_2, y_1 - y_0 = \lambda(y_2 - y_0)$,

所以 $\lambda = -\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_1 - y_0}{y_2 - y_0}$, 解得 $y_0 = \frac{2y_1y_2}{y_1 + y_2} = -\frac{3}{m}$, 则 $x_0 = -4$, 即 Q ,

直线 $l_2: x = -\frac{1}{m}y - 1$, 联立 $\begin{cases} x = -\frac{1}{m}y - 1 \\ x = 1 \end{cases}$, 解得 $P(1, -2m)$,

$\therefore |PQ| = \sqrt{5^2 + \left(-\frac{3}{m} + 2m\right)^2} \geq 5$, 当且仅当 $m = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $m = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时等号成立

$\therefore |PQ|$ 的最小值为 5.

练透核心考点

1. (2023 春·上海黄浦·高二上海市大同中学校考期中) 已知 P 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上一个动点, F 是椭圆的左焦点, 若 $|PF|$ 的最大值和最小值分别为 $3 + \sqrt{5}$ 和 $3 - \sqrt{5}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) $M(0, m)$ 是 y 轴正半轴上的一点, 求 $|PM|$ 的最大值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

(2) $|PM|_{\max} = \begin{cases} \sqrt{\frac{9m^2}{5} + 9} & 0 < m \leq \frac{5}{2} \\ m + 2 & m > \frac{5}{2} \end{cases}$

【详解】(1) 由题意可得 $\begin{cases} a + c = 3 + \sqrt{5} \\ a - c = 3 - \sqrt{5} \end{cases}$, 解得,

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 设 $P(x, y)$,

则 $|PM|^2 = x^2 + (y - m)^2 = x^2 + y^2 - 2my + m^2 = 9 - \frac{9y^2}{4} + y^2 - 2my + m^2$

$= -\frac{5}{4}y^2 - 2my + m^2 + 9 = -\frac{5}{4}\left(y + \frac{4}{5}m\right)^2 + \frac{9m^2}{5} + 9, y \in [-2, 2]$

当 $m \in \left(0, \frac{5}{2}\right]$ 时, $-\frac{4}{5}m \in [-2, 0)$, $|PM|_{\max} = \sqrt{\frac{9m^2}{5} + 9}$

当 $m \in \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ 时, $-\frac{4}{5}m \in (-\infty, -2)$,

$|PM|_{\max} = \sqrt{-\frac{5}{4}\left(-2 + \frac{4}{5}m\right)^2 + \frac{9m^2}{5} + 9} = \sqrt{m^2 + 4m + 4} = m + 2$

$$\text{所以 } |PM|_{\max} = \begin{cases} \sqrt{\frac{9m^2}{5} + 9} & 0 < m \leq \frac{5}{2} \\ m + 2 & m > \frac{5}{2} \end{cases}.$$

2. (2023 春·广西·高二校联考期中) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长是短轴长的 $\sqrt{3}$ 倍, 且椭圆 C 经过点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 过右焦点 F 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点. 求使 $\triangle OAB$ 面积最大时直线 l 的方程.

【答案】(1) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2) $x - y - 2 = 0$ 或 $x + y - 2 = 0$

【详解】(1) 因为长轴长是短轴长的 $\sqrt{3}$ 倍, 则 $a^2 = 3b^2$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

把点的坐标代入上式, 得 $\frac{2}{3b^2} + \frac{4}{3b^2} = 1$, 可得 $b^2 = 2$, 所以 $a^2 = 6$,

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 易知右焦点 F 的坐标为 $(2, 0)$,

若直线 l 的斜率为 0, 则 O, A, B 三点不能构成三角形,

所以直线 l 的斜率不为 0, 设直线 l 的方程为 $x = my + 2$,

联立方程组 $\begin{cases} x = my + 2 \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$, 消去 x , 得,

判别式 $\Delta = 16m^2 + 8(m^2 + 3) = 24(m^2 + 1) > 0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = -\frac{4m}{m^2 + 3}$, $y_1 y_2 = -\frac{2}{m^2 + 3}$,

$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |OF| \cdot |y_1 - y_2| = |y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2}$

$= \sqrt{\left(-\frac{4m}{m^2 + 3}\right)^2 + 4 \times \frac{2}{m^2 + 3}} = \frac{2\sqrt{6}\sqrt{m^2 + 1}}{m^2 + 3}.$

令 $\sqrt{m^2+1}=t(t \geq 1)$ ，则 $S_{\triangle OAB} = \frac{2\sqrt{6}t}{t^2+2} = \frac{2\sqrt{6}}{t+\frac{2}{t}} \leq \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{t \times \frac{2}{t}}} = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{3}$ ，

当且仅当 $t = \sqrt{2}$ 时，等号成立，即 $\sqrt{m^2+1} = \sqrt{2}$ ，解得 $m = \pm 1$ ，

所以此时直线 l 的方程为 $x - y - 2 = 0$ 或 $x + y - 2 = 0$ 。

3. (2023·全国·高三对口高考) 已知直线 $x - 2y + 2 = 0$ 经过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点 A 和上顶点 D ，点 S 是椭圆 C 上位于 x 轴上方的动点， B 为椭圆 C 的右顶点，直线 AS 、 BS 与直线 $l: x = \frac{10}{3}$ 分别交于 M 、 N 两点。求线段 MN 的长度的最小值。

【答案】 $\frac{8}{3}$

【详解】解：点 $A(-a, 0)$ 、 $D(0, b)$ 在直线 $x - 2y + 2 = 0$ 上，则 $\begin{cases} -a + 2 = 0 \\ -2b + 2 = 0 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ ，

所以，椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，

设点 $S(x_0, y_0)$ ，则，

则 $k_{AS} = \frac{y_0}{x_0 + 2}$ ， $k_{BS} = \frac{y_0}{x_0 - 2}$ ，所以， $k_{AS}k_{BS} = \frac{y_0^2}{x_0^2 - 4} = \frac{1 - \frac{x_0^2}{4}}{x_0^2 - 4} = -\frac{1}{4}$ ，

设直线 AS 的方程为 $y = k(x + 2)$ ，其中 $k > 0$ ，则直线 BS 的方程为 $y = -\frac{1}{4k}(x - 2)$ ，

设点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，

由 $\begin{cases} y = k(x + 2) \\ x = \frac{10}{3} \end{cases}$ 可得 $y_1 = \frac{16}{3}k$ ，联立 $\begin{cases} y = -\frac{1}{4k}(x - 2) \\ x = \frac{10}{3} \end{cases}$ 可得 $y_2 = -\frac{1}{3k}$ ，

所以， $|MN| = \left| \frac{16}{3}k + \frac{1}{3k} \right| = \frac{16}{3}k + \frac{1}{3k} \geq 2\sqrt{\frac{16}{3}k \cdot \frac{1}{3k}} = \frac{8}{3}$ ，

当且仅当 $\frac{16k}{3} = \frac{1}{3k}$ 时，即当 $k = \frac{1}{4}$ 时，等号成立，

因此， $|MN|$ 的最小值为 $\frac{8}{3}$ 。

高频考点二：椭圆中参数范围问题

典型例题

例题 1. (2023 · 全国 · 高三专题练习) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{3a^2} = 1 (a > 0)$ 的右焦点为 F , 直线 $l: x + y - 4 = 0$.

(1) 若 F 到直线 l 的距离为 $2\sqrt{2}$, 求 a ;

(2) 若直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 且 $\triangle ABO$ 的面积为 $\frac{48}{7}$, 求 a ;

(3) 若椭圆 C 上存在点 P , 过 P 作直线 l 的垂线 l_1 , 垂足为 H , 满足直线 l_1 和直线 FH 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) $a = 8$

(2) $a = 2$

(3) $a \geq \frac{-8+4\sqrt{7}}{3}$ 且 $a \neq 4$

【详解】(1) 因为 $C: \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{3a^2} = 1 (a > 0)$, 所以右焦点为 $F(a, 0)$,

又因为 $l: x + y - 4 = 0$, 所以 F 到直线 l 的距离 $d = \frac{|a+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}$, 解得 $a = 8$;

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, ,

由得 $7x^2 - 32x + 64 - 12a^2 = 0$,

所以 $\Delta = 32^2 - 28(64 - 12a^2) > 0$, 即 $a^2 > \frac{16}{7}$, 且 $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{32}{7} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{64 - 12a^2}{7} \end{cases}$,

所以 $|AB| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$
 $= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{32}{7}\right)^2 - \frac{28(64 - 12a^2)}{7^2}} = \frac{4\sqrt{2}}{7} \cdot \sqrt{21a^2 - 48}$,

又因为 O 到直线 l 的距离为 $h = \frac{|0+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}$,

所以 $\triangle ABO$ 的面积为

$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{4\sqrt{2}}{7} \cdot \sqrt{21a^2 - 48} = \frac{8}{7} \cdot \sqrt{21a^2 - 48} = \frac{48}{7},$$

解得 $a=2$ 满足 $a^2 > \frac{16}{7}$ ，所以 $a=2$ ；

(3) 若 $a=4$ ，则直线 l 经过点 F ，此时直线 l_1 和直线 FH 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$ （舍去），

若 $a \neq 4$ ，由直线 l_1 和直线 FH 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$ ，且 $k_{l_1} = 1$ 得，

直线 FH 的方程为 $y=0$ 或 $x=a$ 代入 $l: x+y-4=0$ 得 $H(4,0)$ 或 $H(a,4-a)$ ，

所以直线 l_1 的方程为 $y=x-4$ 或 $y-(4-a)=x-a$ 代入椭圆方程得

$$7x^2 - 32x + 64 - 12a^2 = 0 \text{ 或 } 7x^2 + (32 - 16a)x + (4a^2 - 64a + 64) = 0,$$

$$\text{由 } \Delta_1 = 48(7a^2 - 16) \geq 0 \text{ 或 } \Delta_2 = 48(3a^2 + 16a - 16) \geq 0$$

$$\text{解得 } a \geq \frac{4\sqrt{7}}{7} \text{ 或 } a \geq \frac{-8 + 4\sqrt{7}}{3},$$

综上得的取值范围为 $a \geq \frac{-8 + 4\sqrt{7}}{3}$ 且 $a \neq 4$ 。

例题 2. (2023 · 江西宜春 · 校联考模拟预测) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点，且离心率为 $\frac{1}{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过点 $P(-1,1)$ 且互相垂直的直线 l_1, l_2 分别交椭圆 C 于 M, N 两点及 S, T 两点. 求 $\frac{|PM||PN|}{|PS||PT|}$ 的取值范围.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) $\left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right]$

【详解】(1) 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点，且离心率为 $\frac{1}{2}$

$$\text{所以，解得 } \begin{cases} b = \sqrt{3} \\ c = 1 \\ a = 2 \end{cases}, \text{ 所以椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1;$$

(2) 当直线 l_1 的斜率不存在时，则直线 $l_1: x = -1$ ，代入椭圆方程得 $y = \pm \frac{3}{2}$ ，

所以；直线 $l_2: y = 1$ ，代入椭圆方程得 $x = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$ ，所以，

所以；

当直线 l_2 的斜率不存在时，同理可得 $\frac{|PM||PN|}{|PS||PT|} = \frac{4}{3}$ ；

当直线 l_1, l_2 的斜率均存在，不妨设直线 l_1 的方程为 $y = k(x+1)+1$ ，则直线 l_2 的方程为 $y = -\frac{1}{k}(x+1)+1$ ，

$$M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), S(x_3, y_3), T(x_4, y_4),$$

则, 消去 y 得 $(3+4k^2)x^2+8k(k+1)x+4(k+1)^2-12=0$,

$$\Delta > 0 \text{ 恒成立, 所以 } x_1+x_2 = -\frac{8k(k+1)}{3+4k^2}, x_1x_2 = \frac{4(k+1)^2-12}{3+4k^2},$$

所以

$$= (1+k^2) \left| \frac{4(k+1)^2-12}{3+4k^2} + \frac{-8k(k+1)}{3+4k^2} + 1 \right| = (1+k^2) \cdot \frac{5}{3+4k^2};$$

$$\text{同理可得, 将 } k \text{ 换成 } -\frac{1}{k} \text{ 可得 } |PS||PT| = \left[1 + \left(-\frac{1}{k} \right)^2 \right] \cdot \frac{5}{3+4\left(-\frac{1}{k} \right)^2} = \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) \cdot \frac{5k^2}{3k^2+4}$$

$$\text{所以 } \frac{|PM||PN|}{|PS||PT|} = \frac{(1+k^2) \cdot \frac{5}{3+4k^2}}{\left(1 + \frac{1}{k^2} \right) \cdot \frac{5k^2}{3k^2+4}} = \frac{3k^2+4}{3+4k^2} = \frac{\frac{3}{4}(4k^2+3) + \frac{7}{4}}{3+4k^2} = \frac{3}{4} + \frac{7}{4(3+4k^2)} \in \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{3} \right),$$

综上所述, $\frac{|PM||PN|}{|PS||PT|}$ 的取值范围是 $\left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3} \right]$.

例题 3. (2023·四川成都·四川省成都市玉林中学校考模拟预测) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 离心率为 $\frac{1}{2}$, 且点在椭圆上.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 过右焦点 F 且斜率不为 0 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 Q , 经过坐标原点 O 和点 Q 的直线 m 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 求四边形 $AMBN$ 的面积取值范围.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) $[6, 4\sqrt{3}]$.

【详解】(1) 设椭圆右焦点的坐标为 $(c, 0) (c > 0)$, 则 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 即 $a = 2c$,

又 $a^2 = b^2 + c^2$, 则 $b^2 = 3c^2$,

因为点在椭圆上,

所以 $\frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1$, 即 $\frac{1}{4c^2} + \frac{3}{4c^2} = 1$, 解得 $c = 1$,

则 $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, 所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 由 (1) 知 $F(1, 0)$, 因为直线 l 的斜率不为 0, 所以可设直线 l 的方程为 $x = ky + 1$,

代入椭圆 C 的方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 消去 x 化简得 $(3k^2 + 4)y^2 + 6ky - 9 = 0$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = \frac{-6k}{3k^2 + 4}$, $y_1 y_2 = \frac{-9}{3k^2 + 4}$.

设线段 AB 的中点为 $Q(x_0, y_0)$, 则 $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-3k}{3k^2 + 4}$, $x_0 = ky_0 + 1 = \frac{-3k^2}{3k^2 + 4} + 1 = \frac{4}{3k^2 + 4}$, 即

$Q\left(\frac{4}{3k^2 + 4}, \frac{-3k}{3k^2 + 4}\right)$, 则直线 m 的方程为 $y = -\frac{3k}{4}x$,

代入椭圆 C 的方程可得 $x = \pm \frac{4}{\sqrt{3k^2 + 4}}$, 不妨设 $M\left(\frac{4}{\sqrt{3k^2 + 4}}, \frac{-3k}{\sqrt{3k^2 + 4}}\right)$, $N\left(-\frac{4}{\sqrt{3k^2 + 4}}, \frac{3k}{\sqrt{3k^2 + 4}}\right)$.

$$|AB| = \sqrt{1+k^2} |y_1 - y_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{-6k}{3k^2 + 4}\right)^2 - 4 \times \frac{-9}{3k^2 + 4}} = \sqrt{1+k^2} \times \frac{12\sqrt{1+k^2}}{3k^2 + 4} = \frac{12(1+k^2)}{3k^2 + 4},$$

点 M, N 到直线 l 的距离分别为 $d_1 = \frac{|x_M - ky_M - 1|}{\sqrt{1+k^2}}$, $d_2 = \frac{|x_N - ky_N - 1|}{\sqrt{1+k^2}}$,

则四边形 $AMBN$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} \times |AB| \times d_1 + \frac{1}{2} \times |AB| \times d_2 = \frac{1}{2} \times |AB| \times (d_1 + d_2) = \frac{1}{2} \times |AB| \times$

$$\left(\frac{|x_M - ky_M - 1|}{\sqrt{1+k^2}} + \frac{|x_N - ky_N - 1|}{\sqrt{1+k^2}} \right).$$

因为点 M, N 在直线 l 的两侧, 所以 $S = \frac{1}{2} \times |AB| \times \left| \frac{x_M - ky_M - 1}{\sqrt{1+k^2}} - \frac{x_N - ky_N - 1}{\sqrt{1+k^2}} \right| = \frac{1}{2} \times |AB| \times \left| \frac{x_M - x_N - k(y_M - y_N)}{\sqrt{1+k^2}} \right|$

$$= \frac{1}{2} \times |AB| \times \frac{2\sqrt{3k^2 + 4}}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{2} \times \frac{12(1+k^2)}{3k^2 + 4} \times \frac{2\sqrt{3k^2 + 4}}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{12\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{3k^2 + 4}} = 12\sqrt{\frac{1+k^2}{3k^2 + 4}} = 4\sqrt{3}\sqrt{1 - \frac{1}{3k^2 + 4}},$$

因为 $0 < \frac{1}{3k^2 + 4} \leq \frac{1}{4}$, 所以 $6 \leq S < 4\sqrt{3}$.

因此, 四边形 $AMBN$ 的面积取值范围为 $[6, 4\sqrt{3})$.

练透核心考点

1. (2023 春·海南·高三海南中学校考阶段练习) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 A, B 为椭圆 C 上两点.

(1) 若直线 AB 过左焦点 F_1 , 求 $\triangle ABF_2$ 的周长;

(2) 若直线 AB 过点 $P(1, 0)$, 求 S 的取值范围;

【答案】(1) 8

(2)

【详解】(1) 如图所示,

由题意知 $a=2, b=1, c^2=a^2-b^2=3$ ，所以 $a=2, b=1, c=\sqrt{3}$ ，

所以由椭圆的定义知， $\triangle ABF_2$ 的周长为.

(2) 如图所示，

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，

① 当直线 AB 斜率为 0 时，不妨设 $A(-2, 0), B(2, 0)$

所以，

所以：

② 当直线 AB 斜率不为 0 时，设直线 AB 方程为： $x=my+1$ ，

$$\text{由} \begin{cases} x=my+1 \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases} \text{得，}$$

$$\text{所以 } y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+4}, \quad y_1y_2=-\frac{3}{m^2+4},$$

$$\text{又因为 } \overrightarrow{PA}=(x_1-1, y_1), \quad \overrightarrow{PB}=(x_2-1, y_2),$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}| = \sqrt{m^2+1} \cdot |y_1| \cdot \sqrt{m^2+1} \cdot |y_2| = (m^2+1) \cdot \frac{3}{m^2+4} = 3 \left(1 - \frac{3}{m^2+4} \right) \in \left[\frac{3}{4}, 3 \right),$$

综上，的取值范围是.

2. (2023 春·湖北随州·高二随州市曾都区第一中学校考期末) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为，

以椭圆的顶点为顶点的四边形面积为 $4\sqrt{5}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 我们称圆心在椭圆 C 上运动且半径为 $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{3}$ 的圆是椭圆 C 的“环绕圆”. 过原点 O 作椭圆 C 的“环绕圆”的

两条切线，分别交椭圆 C 于 A, B 两点，若直线 OA, OB 的斜率存在，并记为 k_1, k_2 ，求 $k_1 k_2$ 的取值范围.

$$\text{【答案】(1) } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$(2) (-\infty, -3] \cup \left[-\frac{1}{4}, +\infty \right)$$

$$\text{【详解】(1) 由题意，得 } \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ 且 } \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 4\sqrt{5}, \text{ 又 } a^2 = b^2 + c^2,$$

$$\text{解得 } a^2 = 5, b^2 = 4,$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

(2)

设切线 OA 的方程为 $y = k_1x$ ，切线 OB 的方程为 $y = k_2x$ ，“环绕圆”的圆心 D 为 (x_0, y_0) 。

由“环绕圆”的定义，可得“环绕圆”的半径为 1，所以“环绕圆”的标准方程为 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1$ 。

因为直线 $OA: y = k_1x$ 与“环绕圆”相切，则由点到直线的距离公式可得： $\frac{|k_1x_0 - y_0|}{\sqrt{k_1^2 + 1}} = 1$ ，

化简得。

同理可得。

所以 k_1, k_2 是方程的两个不相等的实数根，

所以。

又因为“环绕圆”的圆心 (x_0, y_0) 在椭圆 C 上，所以代入椭圆方程 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 中，

可得 $\frac{x_0^2}{5} + \frac{y_0^2}{4} = 1$ ，解得 $y_0^2 = 4 - \frac{4}{5}x_0^2$ 。

所以 $k_1k_2 = \frac{y_0^2 - 1}{x_0^2 - 1} = -\frac{1}{5}\left(4 - \frac{11}{x_0^2 - 1}\right)$ 。

又因为 $0 \leq x_0^2 \leq 5$ 且 $x_0^2 - 1 \neq 0$ ，所以 $-1 \leq x_0^2 - 1 < 0$ 或 $0 < x_0^2 - 1 \leq 4$ 。

所以 $\frac{1}{x_0^2 - 1} \leq -1$ 或 $\frac{1}{x_0^2 - 1} \geq \frac{1}{4}$ ，所以 $\frac{-11}{x_0^2 - 1} \geq 11$ 或 $\frac{-11}{x_0^2 - 1} \leq -\frac{11}{4}$ ，

所以 $-\frac{1}{5}\left(4 - \frac{11}{x_0^2}\right) \leq -3$ 或 $-\frac{1}{5}\left(4 - \frac{11}{x_0^2}\right) \geq -\frac{1}{4}$ 。

所以 k_1k_2 的取值范围是 $(-\infty, -3] \cup \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ 。

3. (2023 春·福建·高三校联考阶段练习) 在平面直角坐标系 xOy 中， O 是坐标原点，点 A, B 分别为椭圆

$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上、下顶点，直线 $l: x = 2$ 与 C 有且仅有一个公共点，设点 D 在 C 上运动，且 D

不在坐标轴上，当直线 BD 的斜率为 $\sqrt{3}$ 时， C 的右焦点恰在直线 BD 上。

(1) 求 C 的方程；

(2) 设直线 BD 交 x 轴于点 P ，直线 AD 交 l 于点 Q ，直线 PQ 交 C 于 M, N 两点。

(i) 证明：直线 PQ 的斜率为定值；

(ii) 求 $\triangle OMN$ 面积的取值范围。

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) (i) 证明见解析； (ii)

【详解】(1)

直线 $l: x = 2$ 与 C 有且仅有一个公共点，

该公共点为椭圆 C 右顶点, $\therefore a=2$,

当 BD 的斜率为 $\sqrt{3}$ 时, C 的右焦点恰在直线 BD 上,

$$\therefore \frac{b}{c} = \sqrt{3}, \text{ 联立 } a=2=\sqrt{b^2+c^2}, \text{ 解得 } b=\sqrt{3}, c=1,$$

$$\therefore C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1;$$

(2)

$$(i) \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \therefore A(0, \sqrt{3}), B(0, -\sqrt{3}),$$

$$\text{设直线 } BD \text{ 的方程为 } y=kx-\sqrt{3}, \text{ 令 } y=0, \text{ 得 } x=\frac{\sqrt{3}}{k}, \therefore P\left(\frac{\sqrt{3}}{k}, 0\right),$$

$$\text{不在坐标轴上, } \therefore k \text{ 存在且 } k \neq 0 \text{ 且 } k \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{联立 } y=kx-\sqrt{3} \text{ 与 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \text{ 可得 } x=0 \text{ 或 } x=\frac{8\sqrt{3}k}{4k^2+3},$$

$$\text{直线 } AD \text{ 交 } l \text{ 于点 } Q, \therefore Q\left(2, \frac{2\sqrt{3}k-3}{2k}\right), \therefore k_{PQ} = \frac{\frac{2\sqrt{3}k-3}{2k}}{2-\frac{\sqrt{3}}{k}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$(ii) \text{ 直线 } PQ \text{ 的方程为 } y = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{k}\right) \text{ 与 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \text{ 联立,}$$

$$\text{可得: } 2x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{k}x + \frac{2}{k^2} - 4 = 0,$$

$$\therefore x_M + x_N = \frac{\sqrt{3}}{k}, x_M x_N = \frac{3}{2k^2} - 2,$$

$$\text{点 } O \text{ 到直线 } NM \text{ 的距离 } d = \frac{\left| -\frac{3}{2k} \right|}{\sqrt{1+\frac{3}{4}}} = \left| \frac{3\sqrt{7}}{7k} \right|,$$

$$|MN| = \sqrt{1+\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{(x_M+x_N)^2 - 4x_M x_N},$$

$$\therefore S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} d \cdot |MN| = \frac{3}{4} \left| \frac{1}{k} \right| \sqrt{\frac{3}{k^2} - \frac{6}{k^2} + 8} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{8}{k^2} - \frac{3}{k^4}} = \frac{3}{4} \sqrt{-3\left(\frac{1}{k^2} - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}},$$

$$\text{Q } k \neq 0 \text{ 且 } k \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \frac{1}{k^2} \neq \frac{4}{3},$$

高频考点三：双曲线中最值问题

典型例题

例题 1. (2023 · 全国 · 高二专题练习) 已知点 $R(0, -2)$, $Q(0, 2)$, 双曲线 C 上除顶点外任一点 $M(x, y)$ 满足直线 RM 与 QM 的斜率之积为 4.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若直线 l 过 C 上的一点 P , 且与 C 的渐近线相交于 A, B 两点, 点 A, B 分别位于第一、第二象限, 求 $|AP| \cdot |PB|$ 的最小值.

【答案】(1) $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$

(2) 1

【详解】(1) 由题意得 $\frac{y+2}{x} \cdot \frac{y-2}{x} = 4$, 即 $\frac{y^2-4}{x^2} = 4$,

整理得 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$,

因为双曲线的顶点坐标满足上式,

所以 C 的方程为 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$.

(2) 由 (1) 可知, 曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm 2x$,

设点 $P(x_0, y_0)$, $A(x_1, 2x_1)$, $B(x_2, -2x_2)$, $x_1 > 0$, $x_2 < 0$,

由, 得 $(x_0 - x_1, y_0 - 2x_1) = 2(x_2 - x_0, -2x_2 - y_0)$,

整理得 $x_0 = \frac{x_1 + 2x_2}{3}$, $y_0 = \frac{2x_1 - 4x_2}{3}$ ①,

把 ① 代入 $\frac{y_0^2}{4} - x_0^2 = 1$, 整理得 $x_1 \cdot x_2 = -\frac{9}{8}$ ②,

因为 $\overrightarrow{AP} = (x_0 - x_1, y_0 - 2x_1) = \left(\frac{-2x_1 + 2x_2}{3}, \frac{-4x_1 - 4x_2}{3} \right)$,

$\overrightarrow{PB} = (x_2 - x_0, -2x_2 - y_0) = \left(\frac{x_2 - x_1}{3}, \frac{-2x_2 - 2x_1}{3} \right)$,

所以 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{1}{9}(10x_1^2 + 10x_2^2 + 12x_1 \cdot x_2)$. 由 $x_1 x_2 = -\frac{9}{8}$, 得 $x_1 = -\frac{9}{8x_2}$,

则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{1}{9}(10x_1^2 + 10x_2^2 + 12x_1 \cdot x_2) = \frac{1}{9} \left[10 \left(-\frac{9}{8x_2} \right)^2 + 10x_2^2 - 12 \times \frac{9}{8} \right] \geq \frac{1}{9} \left(10 \times 2 \times \frac{9}{8} - \frac{27}{2} \right) = 1$,

当且仅当 $x_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$ 时等号成立，所以的最小值是 1.

例题 2. (2023 • 全国 • 高三专题练习) 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的右顶点为 A, 虚轴长为 $\sqrt{2}$, 两准线间的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 设动直线 l 与双曲线 C 交于 P, Q 两点, 已知 $AP \perp AQ$, 设点 A 到动直线 l 的距离为 d, 求 d 的最大值.

【答案】(1) $x^2 - 2y^2 = 1$

(2) 2

【详解】(1) 解: 依题意可得, 解得 $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$, 所以双曲线方程为 $x^2 - 2y^2 = 1$

(2) 解: 由 (1) 可知 $A(1, 0)$, 依题意可知 $k_{AP} \cdot k_{AQ} = -1$, 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $x_1^2 - 2y_1^2 = 1$,

$x_2^2 - 2y_2^2 = 1$, 则有 $k_{AP} = \frac{y_1}{x_1 - 1} = \frac{x_1 + 1}{2y_1}$, $k_{AQ} = \frac{y_2}{x_2 - 1} = \frac{x_2 + 1}{2y_2}$, 所以 $\frac{y_1}{x_1 - 1} \cdot \frac{x_2 + 1}{2y_2} = -1$, $\frac{x_1 + 1}{2y_1} \cdot \frac{y_2}{x_2 - 1} = -1$, 所

以 $x_2 y_1 + 2x_1 y_2 = 2y_2 - y_1$, $y_2 x_1 + 2y_1 x_2 = 2y_1 - y_2$,

作差得 $x_2 y_1 - x_1 y_2 = 3(y_1 - y_2)$, 又 PQ 的方程为 $(x_2 - x_1)y = (y_2 - y_1)x + x_2 y_1 - x_1 y_2$, 所以 PQ 过定点 $M(3, 0)$,

所以 $d \leq |AM| = 2$, 即 d 的最大值为 2;

例题 3. (2023 • 高二课时练习) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点

P 在双曲线的右支上, $|PF_1|, |PF_2|$ 的最小值 m_1, m_2 , 且满足 $m_1 m_2 = 3a^2$.

(1) 求双曲线的离心率;

(2) 若 $a = 2$, 过点 F_1 的直线交双曲线于 A, B 两点, 线段 AB 的垂直平分线交 y 轴于点 D (异于坐标原点 O), 求 $\frac{|AB|}{|OD|}$ 的最小值.

【答案】(1) 2

(2) $\frac{3}{2}$.

【详解】(1) 由题意知 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$. 由双曲线的性质知 $m_1 = c + a, m_2 = c - a$,

$\therefore m_1 m_2 = c^2 - a^2 = 3a^2, \therefore c = 2a$, 故双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = 2$.

(2) 当 $a = 2$ 时, $c = 4, b^2 = c^2 - a^2 = 12$. $\therefore$ 双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1, F_1(-4, 0)$.

由题知直线 AB 的斜率存在, 设为 k, 则 $k \neq \pm\sqrt{3}$, 直线 AB 的方程为 $y = k(x + 4)$.

联立消去 y 并整理, 得.

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3-k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{-16k^2-12}{3-k^2},$$

$$\therefore |AB| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{1+k^2} \sqrt{\left(\frac{8k^2}{3-k^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{-16k^2-12}{3-k^2}} = \frac{12(1+k^2)}{|3-k^2|}.$$

$$\text{又 } \because y_1 + y_2 = k(x_1+4) + k(x_2+4) = k(x_1+x_2) + 8k = k \times \frac{8k^2}{3-k^2} + 8k = \frac{24k}{3-k^2}, \text{ 线段 } AB \text{ 的中点的坐标为,}$$

$$\therefore \text{线段 } AB \text{ 的垂直平分线的方程为. 令 } x=0, \text{ 得 } y = \frac{16k}{3-k^2},$$

$$\therefore D \text{ 点的坐标为 } \left(0, \frac{16k}{3-k^2}\right), \therefore |OD| = \frac{16|k|}{|3-k^2|}, \therefore \frac{|AB|}{|OD|} = \frac{\frac{12(1+k^2)}{|3-k^2|}}{\frac{16|k|}{|3-k^2|}} = \frac{3(1+k^2)}{4|k|} = \frac{3}{4} \left(|k| + \frac{1}{|k|}\right) \geq \frac{3}{2},$$

$$\text{当且仅当 } |k|=1, \text{ 即 } k=\pm 1 \text{ 时等号成立, } \therefore \frac{|AB|}{|OD|} \text{ 的最小值为 } \frac{3}{2}.$$

练透核心考点

1. (2023·广东深圳·校考二模) 中国是纸的故乡, 折纸也是起源于中国. 后来数学家将几何学原理运用到折纸中, 并且利用折纸来研究几何学, 很好的把折纸艺术与数学相结合. 将一张纸片折叠一次, 纸片上会留下一条折痕, 如果在纸片上按照一定的规律折出很多折痕后, 纸上能显现出一条漂亮曲线的轮廓. 如图, 一张圆形纸片的圆心为点 D , A 是圆外的一个定点, P 是圆 D 上任意一点, 把纸片折叠使得点 A 与 P 重合, 然后展平纸片, 折痕与直线 DP 相交于点 Q , 当点 P 在圆上运动时, 得到点 Q 的轨迹.

(1) 证明: 点 Q 的轨迹是双曲线;

(2) 设定点 A 坐标为 $(2,0)$, 纸片圆的边界方程为 $(x+2)^2 + y^2 = r^2$. 若点 $M(2,3)$ 位于 (1) 中所描述的双曲线上, 过点 M 的直线 l 交该双曲线的渐近线于 E, F 两点, 且点 E, F 位于 y 轴右侧, O 为坐标原点, 求 $\triangle EOF$ 面积的最小值.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $\sqrt{3}$

【详解】(1) 证明: 设圆 D 半径为 r , 由题意知 $|QA| = |QP|$,

所以,

因此, 动点 Q 到定点 A 和 D 的距离之差的绝对值为定值 r , 且 $r < |DA|$,

由双曲线定义知, 点 Q 的轨迹是以 A, D 为焦点的双曲线.

(2) 由(1)知双曲线中 $2a=r$, $2c=4$, 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{\frac{r^2}{4}} - \frac{y^2}{4 - \frac{r^2}{4}} = 1$,

又点 $M(2,3)$ 在双曲线上, $\frac{4}{\frac{r^2}{4}} - \frac{9}{4 - \frac{r^2}{4}} = 1$, 解得 $r=2$, 因此双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$,

渐近线为 $y = \pm\sqrt{3}x$, 则 $\angle EOA = \angle AOF = \frac{1}{2}\angle EOF = \frac{\pi}{3}$.

① 直线 l 斜率不存在, 此时 $\triangle EOF$ 为顶角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的等腰三角形, 且 $|OE|=4$, 所以 $S_{\triangle EOF} = 4\sqrt{3}$;

② 若直线 l 斜率存在, 设为: $y = k(x-2)+3$, 联立双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 得:

$$(3-k^2)x^2 + (4k^2-6k)x - 4k^2 + 12k - 12 = 0.$$

因为直线 l 交双曲线于 y 轴右侧于两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

所以 $\Delta = (4k^2-6k)^2 - 4(3-k^2)(-4k^2+12k-12) \geq 0$, 且 $x_1+x_2 = \frac{6k-4k^2}{3-k^2} > 0$, $x_1x_2 = \frac{-4k^2+12k-12}{3-k^2} > 0$; 解

得 $k < -\sqrt{3}$ 或 $k > \sqrt{3}$.

设, $F(x_4, y_4)$, 联立直线和渐近线方程解得: $x_3 = \frac{3-2k}{\sqrt{3}-k}$, $x_4 = \frac{3-2k}{-\sqrt{3}-k}$,

所以 $|OE| = \frac{|x_3|}{\cos \angle EOA} = 2|x_3|$, $|OF| = \frac{|x_4|}{\cos \angle FOA} = 2|x_4|$,

$$S_{\triangle EOF} = \frac{1}{2} \cdot |OE| \cdot |OF| \sin \angle EOF = \frac{1}{2} \cdot 2|x_3| \cdot 2|x_4| \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$= \sqrt{3} |x_3 x_4| = \frac{\sqrt{3}(3-2k)^2}{k^2-3} = 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \cdot \frac{7-4k}{k^2-3},$$

$$\text{令 } f(k) = \frac{7-4k}{k^2-3}, \quad f'(k) = \frac{2(2k-3)(k-2)}{(k^2-3)^2},$$

当 $k < -\sqrt{3}$ 时, $f'(k) > 0$, $f(k)$ 单调递增, 且 $f(k) > 0$, 此时 $S_{\triangle EOF} > 4\sqrt{3}$.

当 $\sqrt{3} < k < 2$ 时, $f'(k) < 0$, $f(k)$ 单调递减, 当 $k > 2$ 时, $f'(k) > 0$, $f(k)$ 单调递增所以 $f(k)$ 的极小值为 $f(2) = -1$, 此时 $S_{\triangle EOF} = \sqrt{3}$.

综上所述, $\triangle EOF$ 面积的最小值为 $\sqrt{3}$, 此时 $k=2$ 且 $\Delta=0$, 即直线 l 与双曲线相切.

2. (2023 秋·浙江嘉兴·高三统考期末) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 过点 $(2,3)$, 左、右顶点分别是

A, B , 右焦点 F 到渐近线的距离为 $\sqrt{3}$, 动直线 $l: y = kx + m$ 与以 AB 为直径的圆相切, 且 l 与 C 的左、右两支分别交于 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 两点.

(1) 求双曲线 C 的方程;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/827051136026006163>