北京市东城区2023-2024学年高二下学期期末统一检测数学试题

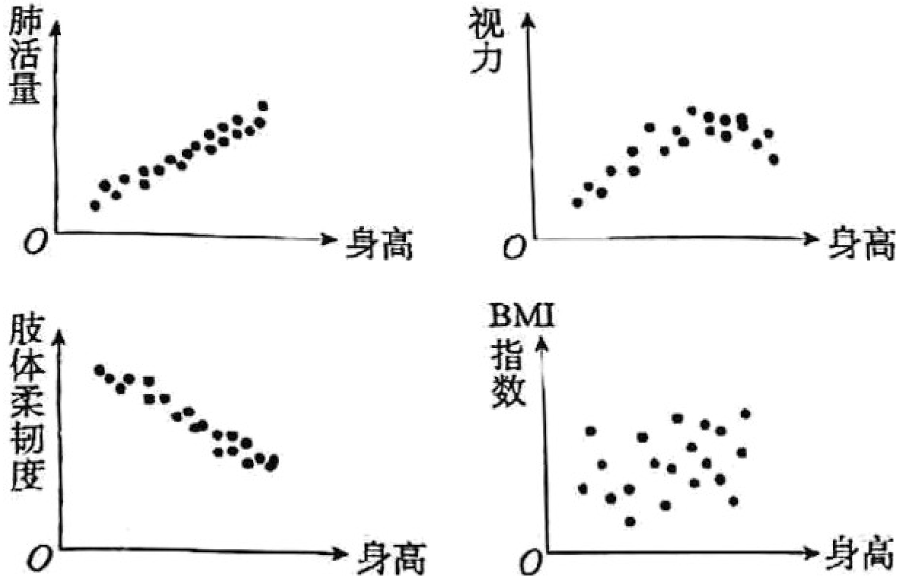
学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合$M=\{0,a,a^2\}$，$N=\{-2,-1,0,1,2\}$，若$1\in M$，则$M\cap N=$（　）

A．$\{0,1\}$　　B．$\{-1,0,1\}$　　C．$\{0,1,2\}$　　D．$\{-2,-1,0,1,2\}$

2．某校学生科研兴趣小组为了解1~12岁儿童的体质健康情况，随机调查了20名儿童的相关数据，分别制作了肺活量、视力、肢体柔韧度、BMI指数和身高之间的散点图，则与身高之间具有正相关关系的是（　）



A．肺活量　　B．视力　　C．肢体柔韧度　　D．BMI指数

3．已知$x,y\in \mathrm{R}$，且$x>y$，则下列不等式中一定成立的是（　）

A．$x^2>y^2$　　B．$\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$　　C．$\ln x>\ln y$　　D．$2^x>2^y$

4．袋中有10个大小相同的小球，其中7个黄球，3个红球.每次从袋子中随机摸出一个球，摸出的球不再放回，则在第一次摸到黄球的前提下，第二次又摸到黄球的概率为（　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{3}{10}$

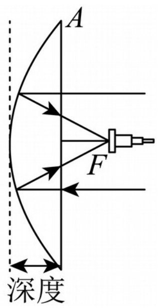
5．已知$2^{a}=3$，$\log_4 5=b$，则2^{a-2b}的值为（　）

A．15　　B．$\frac{5}{3}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．-2

6．A，B，C三所大学发布了面向高二学生的夏令营招生计划，每位学生只能报一所大学.某中学现有四位学生报名.若每所大学都有该中学的学生报名，则不同的报名方法共有（　）

A．30种　　B．36种　　C．72种　　D．81种

7．2024年3月20号，我国成功发射鹊桥二号中继卫星，其通过一个大型可展开的星载天线，实现了月球背面与地球之间的信号传输.星载天线展开后形成一把直径（口径）为4.2m的“金色大伞”，它的曲面与轴截面的交线为抛物线，在轴截面内的卫星波束呈近似平行状态射入接收天线，经反射聚集到焦点F处.若“金色大伞”的深度为0.49m，则“金色大伞”的边缘A点到焦点F的距离为（　）



A．2.25m　　B．2.74m　　C．4.5m　　D．4.99m

8．已知直线$l: mx-y-2m+5=0$被圆$(x-3)^2+(y-4)^2=4$截得的弦长为整数，则满足条件的直线l共有（　）

A．1条　　B．2条　　C．3条　　D．4条

9．已知函数$f\left(x\right)=a\left(x-a\right)\left(x-b\right)^{2}\left(a,b\in \mathbf{R}\right)$，则“$b>a>0$”是“$b$为$f\left(x\right)$的极小值点”的（　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

10．《孙子算经》是中国南北朝时期重要的数学著作，书中的“中国剩余定理”对同余除法进行了深入的研究.现给出一个同余问题：如果a和b被m除得的余数相同，那么称a和b对模m同余，记为$a\equiv b\left(\mathrm{mod}m\right)$.若

$a=\mathrm{C}_{2024}^{0}+\mathrm{C}_{2024}^{1}\times 3+\mathrm{C}_{2024}^{2}\times 3^{2}+\cdots+\mathrm{C}_{2024}^{2024}\times 3^{2024},a\equiv b\left(\mathrm{mod}5\right)$，则$b$的值可以是（　）

A．2023　　B．2024　　C．2025　　D．2026

二、填空题

11．函数$f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\ln x$的定义域是_____.

12．已知双曲线C的焦点为$\left(-2,0\right)$和$\left(2,0\right)$，一条渐近线方程为$y=\sqrt{3}x$，则C的方程为____.

13．已知二项式$\left(2x+1\right)^{n}=a_{n}x^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_{1}x+a_{0}$的所有项的系数和为243，则$n=$_____；$a_{2}=$_____.

14．某学校要求学生每周校园志愿服务时长不少于1小时.某周可选择的志愿服务项目如下表所示：

岗位	环保宣讲	器材收纳	校史讲解	食堂清扫	图书整理
时长	20分钟	20分钟	25分钟	30分钟	40分钟

每位学生每天最多可选一个项目，且该周同一个项目只能选一次，则不同选择的组合方式

共有____种.

15．设$a \in \mathrm{R}$，函数$f\left(x\right)=\begin{cases}ax^{3}-x, x>a \\ -x^{2}, x \le a\end{cases}$给出下列四个结论：

①当$a=0$时，函数$f\left(x\right)$的最大值为0；

②当$a=7$时，函数$f\left(x\right)$是增函数；

③若函数$f\left(x\right)$存在两个零点，则$0<a<1$；

④若直线$y=ax$与曲线$y=f\left(x\right)$恰有2个交点，则$a<0$.

其中所有正确结论的序号是____.

三、解答题

16．某次乒乓球比赛单局采用11分制，每赢一球得一分.每局比赛开始时，由一方进行发球，随后每两球交换一次发球权，先得11分且至少领先2分者胜，该局比赛结束；当某局比分打成$10:10$后，每球交换发球权，领先2分者胜，该局比赛结束.已知甲、乙两人要进行一场五局三胜制（当一方赢得三局比赛时，该方获胜，比赛结束）的比赛.

(1)单局比赛中，若甲发球时甲得分的概率为$\frac{4}{5}$，乙发球时甲得分的概率为$\frac{1}{2}$，求甲$4:0$领先的概率；

(2)若每局比赛乙获胜的概率为$\frac{1}{3}$，且每局比赛结果相互独立，求乙以$3:1$赢得比赛的概率.

17．设函数$f(x)=a\mathrm{e}^{x}+x$，其中$a \in \mathrm{R}$.曲线$y=f(x)$在点$(0, f(0))$处的切线方程为$y=-x+b$.

(1)求a，b的值；

(2)求$f(x)$的单调区间.

18．近年来，我国新能源汽车蓬勃发展，极大地促进了节能减排.遥遥计划在A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6这6个国产新能源品牌或在B_1，B_2，B_3，B_4这4个国产燃油汽车品牌中选择购车.预计购买新能源汽车比燃油车多花费40000元.据测算，每行驶5公里，燃油汽车约花费3元，新能源汽车约消耗电1千瓦时.如果购买新能源汽车，遥遥使用国家电网所属电动汽车公共充电设施充电，充电价格分为峰时、平时、谷时三类，具体收费标准（精确到0.1元/千瓦时）如下表：

	充电时间段	充电价格（元/千瓦时）	充电服务费（元/千瓦时）
峰时	10：00—15：00和18：00—21：00	1.0	0.8
平时	7：00—10：00，15：00—18：00和21：00—23：00	0.7	
谷时	当日23：00—次日7：00	0.4	

(1)若遥遥在6个新能源汽车品牌中选出2个品牌作比较，求品牌A_1被选中的概率；

(2)若遥遥选购新能源汽车，他在18：00，18：30，19：00，19：30，…，23：30这12个时间点中随机选择一个时间点给车充电，每次充电30千瓦时（用时不超过半小时）.设X为遥遥每次充电的费用，求X的分布列和数学期望；

(3)假设遥遥一年驾车约行驶30000公里，按新车使用8年计算，如果只考虑购车成本与能源消耗支出，计算说明选择新能源汽车和燃油汽车哪个的总花费更少.

19．已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，过点$(0,\sqrt{3})$，A，$B$分别是$E$的左顶点和下顶点，

F 是 E 右焦点，$\angle AFB=\dfrac{\pi}{3}$.

(1)求 E 的方程；

(2)过点 F 的直线与椭圆 E 交于点 P，Q，直线 AP，AQ 分别与直线 $x=4$ 交于不同的两点 M，N.设直线 FM，FN 的斜率分别为 k_1，k_2，求证：k_1k_2 为定值.

20．已知函数 $f\left(x\right)=x^2-a\ln x-1\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

(1)当 $a=2$ 时，求 $f\left(x\right)$ 的极值；

(2)若对任意 $x\in\left(1,+\infty\right)$，有 $f\left(x\right)>0$ 恒成立，求 a 的取值范围；

(3)证明：若 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(1,+\infty\right)$ 上存在唯一零点 x_0，则 $x_0<\mathrm{e}^{a-2}$（其中 $\mathrm{e}=2.71828\ldots$）.

21．已知 n 项数列 $A_n:a_1,a_2,\ldots,a_n\left(n\geq 3\right)$，满足对任意的 $i\neq j$ 有 $a_i\neq a_j$.变换 T 满足对任意 $i\in\left\{1,2,\ldots,n\right\}$，有 $T\left(a_i\right)\in\left\{a_1,a_2,\ldots,a_n\right\}$，且对 $i\neq j$ 有 $T\left(a_i\right)\neq T\left(a_j\right)$，称数列 $T\left(A_n\right):T\left(a_1\right),T\left(a_2\right),\ldots,T\left(a_n\right)$ 是数列 A_n 的一个排列.对任意 $i\in\left\{1,2,\ldots,n\right\}$，记 $T\left(a_i\right)=T^1\left(a_i\right)$，$T^{k+1}\left(a_i\right)=T\left(T^k\left(a_i\right)\right)\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$，如果 k 是满足 $T^k\left(a_i\right)=a_{n+1-i}\left(i=1,2,\ldots,n\right)$ 的最小正整数，则称数列 A_n 存在 k 阶逆序排列，称 T 是 A_n 的 k 阶逆序变换.

(1)已知数列 $A_4:1,2,3,4$，数列 $T\left(A_4\right):3,1,4,2$，求 $T^2\left(A_4\right)$，$T^4\left(A_4\right)$；

(2)证明：对于 4 项数列 A_4，不存在 3 阶逆序变换；

(3)若 n 项数列 A_n 存在 3 阶逆序变换，求 n 的最小值.

参考答案：

1．B

【分析】结合集合与元素的关系求出参数a的值，结合交集的概念即可得解.

【详解】由题意$a=1$或$a^2=1$，但是$a^2\neq a$，所以$a=-1$，$M=\{0,-1,1\}$，

因为$N=\{-2,-1,0,1,2\}$，所以$M\cap N=\{-1,0,1\}$.

故选：B.

2．A

【分析】根据给定的散点图，结合正相关的意义判断即得.

【详解】对于A，儿童的身高越高，其肺活量越大，肺活量与身高具有正相关关系，A正确；

对于B，儿童的视力随身高的增大先增大，后减小，视力与身高不具有正相关关系，B错误；

对于C，肢体柔韧度随身高增大而减小，肢体柔韧度与身高不具有正相关关系，C错误；

对于D，BMI指数与身高的相关性很弱，不具有正相关关系，D错误.

故选：A

3．D

【分析】举反例排除ABC，由指数函数单调性即可说明D.

【详解】取$x=0>y$，则$x^2<y^2$，$\frac{1}{x},\ln x,\ln y$无意义，故ABC错误；

对于D，由指数函数$y=2^t$在实数域上关于t单调递增，且$x>y$，所以$2^x>2^y$，故D正确.

故选：D.

4．A

【分析】由条件概率、古典概型概率计算公式即可求解.

【详解】在第一次摸到黄球的前提下，此时袋中有：6个黄球，3个红球，共9个球，

所以所求概率为$P=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

故选：A.

5．C

【分析】利用指数式与对数式的互化，结合指数运算计算即得.

【详解】由$\log_4 5 = b$，得$4^b = 5$，即$2^{2b} = 5$，而$2^a = 3$，

所以$2^{a-2b} = \frac{2^a}{2^{-2b}} = \frac{3}{5}$.

故选：C

6．B

【分析】将甲、乙、丙、丁四位同学分为三组2，1，1，然后分配到A,B,C三所学校求解.

【详解】设这四位同学分别为甲、乙、丙、丁，

由题意将甲、乙、丙、丁四位同学分为三组2，1，1，然后分配到A,B,C三所学校.

则不同的报名方法共有$3C_4^2C_2^1C_1^1=36$种.

故选：B.

7．B

【分析】建立平面直角坐标系，求出抛物线方程，再结合抛物线的定义求值即得.

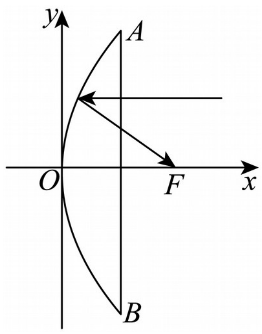
【详解】依题意，建立如图所示的平面直角坐标系，点$A(0.49, 2.1)$

设抛物线的方程为$y^2 = 2px(p > 0)$，则$2.1^2 = 2p \times 0.49$，解得$2p = 9$，

抛物线$y^2 = 9x$的焦点$F(\frac{9}{4}, 0)$，准线方程为$x = -\frac{9}{4}$，$|AF| = 0.49 + 2.25 = 2.74$，

所以“金色大伞”的边缘A点到焦点F的距离为$2.74\mathrm{m}$.

故选：B



8．C

【分析】首先求得$d=\frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$，又$d=\sqrt{r^2-\left(\frac{n}{2}\right)^2}=\sqrt{4-\left(\frac{n}{2}\right)^2}$，而直径是4，所以分

$n=4,3,2,1$进行讨论即可求解.

【详解】圆$(x-3)^2+(y-4)^2=4$的圆心、半径分别为$(3,4),r=2$，

圆心$(3,4)$到直线$l:mx-y-2m+5=0$的距离为$d=\frac{|3m-4-2m+5|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$，

设直线$l:mx-y-2m+5=0$被圆$(x-3)^2+(y-4)^2=4$截得的弦长为n，

由于直线被圆所截得的弦长不超过直径长度$2r=4$，故分以下情形讨论：

当$n=4$时，$d=\frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{r^2-\left(\frac{n}{2}\right)^2}=\sqrt{4-4}=0$，解得$m=-1$，

当$n=3$时，$d=\frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{r^2-\left(\frac{n}{2}\right)^2}=\sqrt{4-\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，化简得$3m^2-8m+3=0$，解得

$m=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}$，

当$n=2$时，$d=\frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{r^2-\left(\frac{n}{2}\right)^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，化简得$m^2-m+1=0$，该方程无解，

当 $n=1$ 时，$d=\frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{r^2-\left(\frac{n}{2}\right)^2}=\sqrt{4-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$，化简得 $11m^2-8m+11=0$，该方程无解，

而直线 $l: mx-y-2m+5=0$ 是斜率为 m 且过定点 $(2,5)$ 的直线，直线 l 由 m 唯一决定，

综上所述，满足条件的直线 l 共有 3 条.

故选：C.

9．A

【分析】在 $b>a>0$ 的条件下利用导数证明 b 为 $f(x)$ 的极小值点，然后说明当 $a=-1$，$b=-2$ 时，b 为 $f(x)$ 的极小值点，但 $b>a>0$ 并不成立，从而得到答案.

【详解】由题设，

$f'(x)=a(x-b)^2+2a(x-a)(x-b)=a\left[3x^2-2(a+2b)x+b(2a+b)\right]=a\left[3x-(2a+b)\right](x-b)$，

若 $b>a>0$，则 $a<\frac{2a+b}{3}<b$，故 $x\in\left(-\infty,\frac{2a+b}{3}\right)\cup(b,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$，$x\in\left(\frac{2a+b}{3},b\right)$ 上 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{2a+b}{3}\right),(b,+\infty)$ 上递增，$\left(\frac{2a+b}{3},b\right)$ 上递减，故 b 为 $f(x)$ 的极小值点，从而条件是充分的；

当 $a=-1$，$b=-2$ 时，有 $f(x)=(-x-1)(x+2)^2$，则 $f'(x)=-(3x+4)(x+2)$，

显然 $x\in(-\infty,-2)\cup\left(-\frac{4}{3},+\infty\right)$ 上 $f'(x)<0$，$x\in\left(-2,-\frac{4}{3}\right)$ 上 $f'(x)>0$，

所以$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,-2\right),\left(-\frac{4}{3},+\infty\right)$上递减，$\left(-2,-\frac{4}{3}\right)$上递增，

此时$b=-2$为$f\left(x\right)$的极小值点，但此时$b>a>0$并不成立，从而条件不是必要的.

故选：A.

10．D

【分析】利用二项式定理求出被5整除得的余数，再逐项验证即得.

【详解】$a=C_{2024}^{0}+C_{2024}^{1}\times 3+C_{2024}^{2}\times 3^{2}+\cdots+C_{2024}^{2024}\times 3^{2024}=4^{2024}=\left(5-1\right)^{2024}$

$=5^{2024}-C_{2024}^{1}\times 5^{2023}+C_{2024}^{2}\times 5^{2022}-\ldots-C_{2024}^{2023}\times 5^{1}+1$

$=5\left(5^{2023}-C_{2024}^{1}\times 5^{2022}+C_{2024}^{2}\times 5^{2021}-\ldots-C_{2024}^{2023}\right)+1$

则$5\left(5^{2023}-C_{2024}^{1}\times 5^{2022}+C_{2024}^{2}\times 5^{2021}-\ldots-C_{2024}^{2023}\right)$能被5整除，

故$5\left(5^{2023}-C_{2024}^{1}\times 5^{2022}+C_{2024}^{2}\times 5^{2021}-\ldots-C_{2024}^{2023}\right)+1$除以5余数为$1$，

所以$a=C_{2024}^{0}+C_{2024}^{1}\times 3+C_{2024}^{2}\times 3^{2}+\cdots+C_{2024}^{2024}\times 3^{2024}$除以5余数为$1$，

由$a\equiv b\left(\bmod 5\right)$，所以$2023\div 5=404\cdots\cdots 3$，$2024\div 5=404\cdots\cdots 4$，

$2025\div 5=405$，$2026\div 5=405\cdots\cdots 1$，

故选：D.

11．$\left(1,+\infty\right)$

【分析】由表达式中的每个部分有意义得到不等式组，解之即可得到定义域为$\left(1,+\infty\right)$.

【详解】为了让函数$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\ln x$的表达式有意义，需要$\begin{cases}x-1\geq 0\\ \sqrt{x-1}\neq 0\\ x>0\end{cases}$.

解得$x>1$，所以函数$f\left(x\right)$的定义域是$\left(1,+\infty\right)$.

故答案为：$(1,+\infty)$.

12．$x^2-\frac{y^2}{3}=1$

【分析】由焦点坐标以及渐近线方程列式求出a,b即可得解.

【详解】双曲线C的焦点在x轴上，设C的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,(a>0,b>0)$，

由题意$c=2,\frac{b}{a}=\sqrt{3},a^2+b^2=c^2$，解得$a=1,b=\sqrt{3}$，

所以C的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

故答案为：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

13．　5　40

【分析】首先利用系数和条件，再原式中取$x=1$得到$n=5$；再对展开式两边求导两次并取

$x=0$，得到$a_2=40$.

【详解】由已知有$(2x+1)^n=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$，且$a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0=243$.

再前一式中令$x=1$得$3^n=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0$，所以$3^n=243$，得$n=5$.

所以$(2x+1)^5=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$.

由二项式定理可知，$a_2=C_5^3\times2^{5-3}\times1^3=10\times4\times1=40$.

故答案为：5；40.

14．8988