

新疆维吾尔自治区喀什地区巴楚县第一中学 2024 届高三数学第一学期期末质量跟踪监

视试题

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

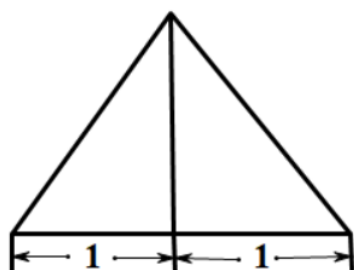
1. 已知椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与直线 $\frac{y}{a} - \frac{x}{b} = 1$ 交于 A, B 两点，焦点 $F(0, -c)$ ，其中 c 为半焦距，若 $\triangle ABF$ 是直角三角形，则该椭圆的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ D. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

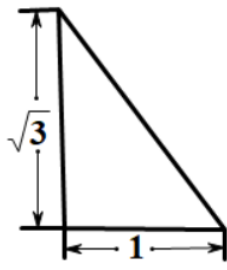
2. 已知复数 $z = \frac{2i}{1+i}$ ，则 $|z| =$ ()

- A. $1+i$ B. $1-i$ C. $\sqrt{2}$ D. 2

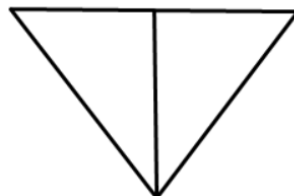
3. 一个几何体的三视图如图所示，其中正视图是一个正三角形，则这个几何体的体积为 ()



正视图



侧视图



俯视图

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

4. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 满足以下条件：①双曲线 E 的右焦点与抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 重合；②

双曲线 E 与过点 $P(4, 2)$ 的幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 的图象交于点 Q ，且该幂函数在点 Q 处的切线过点 F 关于原点的对称点。则双曲线的离心率是 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\sqrt{5}+1$

5. 已知复数 z 满足 $|z| = 1$ ，则 $|z + 2 - i|$ 的最大值为 ()

- A. $2+3$ B. $1+\sqrt{5}$ C. $2+\sqrt{5}$ D. 6

6. 我国古代有着辉煌的数学研究成果，其中的《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《缉古算经》，有丰富多彩的内容，是了解我国古代数学的重要文献。这5部专著中有3部产生于汉、魏、晋、南北朝时期。某中学拟从这5部专著中选择2部作为“数学文化”校本课程学习内容，则所选2部专著中至少有一部是汉、魏、晋、南北朝时期专著的概率为（ ）

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{7}{10}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{9}{10}$

7. 正四棱锥 $P-ABCD$ 的五个顶点在同一个球面上，它的底面边长为 $\sqrt{6}$ ，侧棱长为 $2\sqrt{3}$ ，则它的外接球的表面积为（ ）

- A. 4π B. 8π C. 16π D. 20π

8. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，且 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ ， $a_4 = 8$ ，则 $a_5 =$ ()

- A. $\frac{21}{2}$ B. 9 C. $\frac{17}{2}$ D. 7

9. 已知公差不为0的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n ， $a_1 = 2$ ，且 a_1, a_3, a_9 成等比数列，则 $S_8 =$ ()

- A. 56 B. 72 C. 88 D. 40

10. 已知随机变量 X 的分布列如下表：

X	-1	0	1
P	a	b	c

其中 $a, b, c > 0$. 若 X 的方差 $D(X) \leq \frac{1}{3}$ 对所有 $a \in (0, 1-b)$ 都成立，则 ()

- A. $b \leq \frac{1}{3}$ B. $b \leq \frac{2}{3}$ C. $b \geq \frac{1}{3}$ D. $b \geq \frac{2}{3}$

11. 已知复数 $z = \frac{2i}{i-1}$ ，则 z 的虚部为 ()

- A. -1 B. $-i$ C. 1 D. i

12. 已知 $(2-mx)(1-\frac{1}{x})^3$ 的展开式中的常数项为8，则实数 $m =$ ()

- A. 2 B. -2 C. -3 D. 3

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

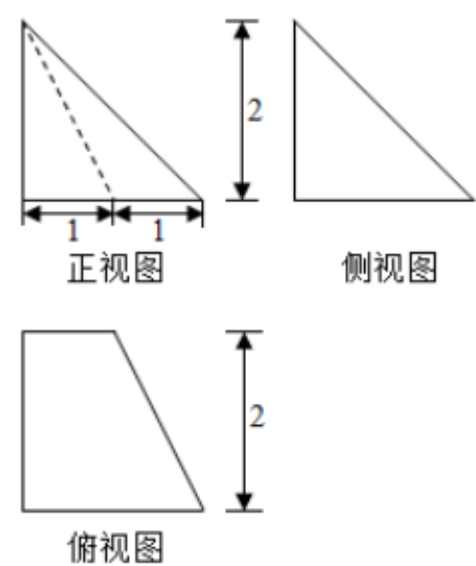
13. 设函数 $f(x) = \ln x + \ln(2-x) + ax$ ($a > 0$)，若 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上的最大值为 $\frac{1}{2}$ ，则 $a =$ _____.

14.

某同学周末通过抛硬币的方式决定出去看电影还是在家学习，抛一枚硬币两次，若两次都是正面朝上，就在家学习，否则出去看电影，则该同学在家学习的概率为_____.

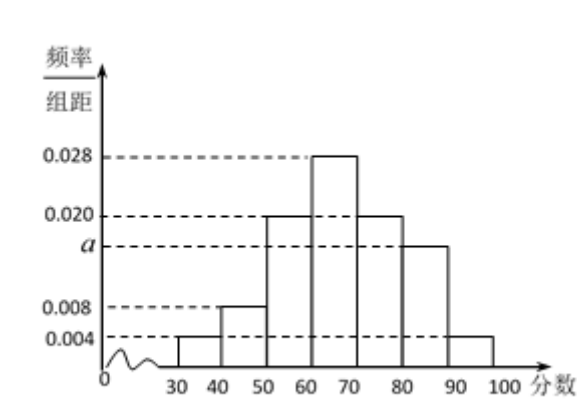
15. 边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 O , E 是线段 OD 的中点, AE 的延长线与 CD 相交于点 F , 若 $\angle BAD = 60^\circ$, 则 $\overline{BE} \cdot \overline{EF} =$ _____.

16. 某几何体的三视图如图所示（单位： cm ），则该几何体的体积是_____ cm^3 ；最长棱的长度是_____ cm .



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （12 分）改革开放 40 年，我国经济取得飞速发展，城市汽车保有量在不断增加，人们的交通安全意识也需要不断加强.为了解某城市不同性别驾驶员的交通安全意识，某小组利用假期进行一次全市驾驶员交通安全意识调查.随机抽取男女驾驶员各 50 人，进行问卷测评，所得分数的频率分布直方图如图所示.规定得分在 80 分以上为交通安全意识强.



	安全意识强	安全意识不强	合计
男性			

女性			
合计			

(I) 求 a 的值, 并估计该城市驾驶员交通安全意识强的概率;

(II) 已知交通安全意识强的样本中男女比例为 4:1, 完成 2×2 列联表, 并判断有多大把握认为交通安全意识与性别有关;

(III) 在 (II) 的条件下, 从交通安全意识强的驾驶员中随机抽取 2 人, 求抽到的女性人数 X 的分布列及期望.

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a+b+c+d$$

$P(K^2 \geq k)$	0.010	0.005	0.001
k	6.635	7.879	10.828

18. (12 分) 过点 $P(-1, 0)$ 作倾斜角为 α 的直线与曲线 $C: \begin{cases} x = \sqrt{3} \cos \theta \\ y = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) 相交于 M 、 N 两点.

(1) 写出曲线 C 的一般方程;

(2) 求 $|PM| \cdot |PN|$ 的最小值.

19. (12 分) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $2S_n = na_n + n$, $n \in \mathbf{N}_+$, $a_2 = 2$,

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 并求其通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n \sqrt{a_{n+1}} + a_{n+1} \sqrt{a_n}}$, 求证: $T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n < 1$.

20. (12 分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 左、右顶点分别为 A 、 B , 过左焦点的直线 l 交椭圆 E 于 C 、

D 两点 (异于 A 、 B 两点), 当直线 l 垂直于 x 轴时, 四边形 $ABCD$ 的面积为 1.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设直线 AC 、 BD 的交点为 Q ; 试问 Q 的横坐标是否为定值? 若是, 求出定值; 若不是, 请说明理由.

21. (12 分) 已知 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ 设函数 $f(x) = |x-b| + |x+c| + a$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $a = b = c = 1$, 求不等式 $f(x) > 5$ 的解集;

(2) 若函数 $f(x)$ 的最小值为 1, 证明: $\frac{1}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{9}{c+a} > 18(a+b+c)$.

22. (10 分) [选修 4-4: 极坐标与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{2} + \sqrt{2} \cos \alpha \\ y = \sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$ (α 是参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴

为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4 \sin \theta$.

(1) 求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2) 若射线 $\theta = \beta$ ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$) 与曲线 C_1 交于 O, A 两点, 与曲线 C_2 交于 O, B 两点, 求 $|OA| + |OB|$ 取最大值时 $\tan \beta$ 的值

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

联立直线与椭圆方程求出交点 A, B 两点, 利用平面向量垂直的坐标表示得到关于 a, b, c 的关系式, 解方程求解即可。

【详解】

$$\text{联立方程} \begin{cases} \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \\ \frac{y}{a} - \frac{x}{b} = 1 \end{cases}, \text{解方程可得} \begin{cases} x = 0 \\ y = a \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = -b \\ y = 0 \end{cases},$$

不妨设 $A(0, a), B(-b, 0)$, 由题意可知, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$,

因为 $\overrightarrow{BA} = (b, a), \overrightarrow{BF} = (b, -c)$,

由平面向量垂直的坐标表示可得, $b \cdot b - ac = 0$,

因为 $b^2 = a^2 - c^2$, 所以 $a^2 - c^2 = ac$,

两边同时除以 a^2 可得, $e^2 + e - 1 = 0$,

解得 $e = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $e = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (舍去),

所以该椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

故选：A

【点睛】

本题考查椭圆方程及其性质、离心率的求解、平面向量垂直的坐标表示；考查运算求解能力和知识迁移能力；利用平面向量垂直的坐标表示得到关于 a, b, c 的关系式是求解本题的关键；属于中档题、常考题型.

2、C

【解析】

根据复数模的性质即可求解.

【详解】

$$Qz = \frac{2i}{1+i},$$

$$\therefore |z| = \frac{|2i|}{|1+i|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

故选：C

【点睛】

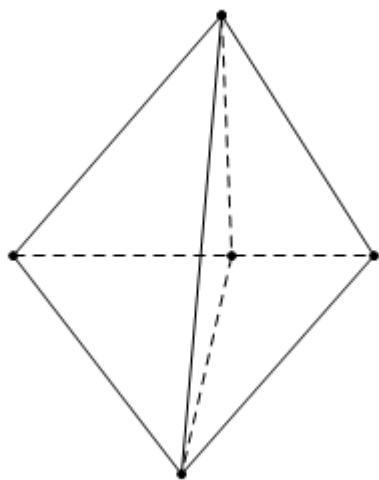
本题主要考查了复数模的性质，属于容易题.

3、C

【解析】

由已知中的三视图，可知该几何体是一个以俯视图为底面的三棱锥，求出底面面积，代入锥体体积公式，可得答案.

【详解】



由已知中的三视图，可知该几何体是一个以俯视图为底面的三棱锥，

其底面面积 $S = \frac{1}{2} \times 1 \times (1+1) = 1$, 高 $h = \sqrt{3}$,

故体积 $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

故选: C.

【点睛】

本题考查的知识点是由三视图求几何体的体积, 解决本题的关键是得到该几何体的形状.

4、B

【解析】

由已知可求出焦点坐标为 $(1, 0), (-1, 0)$, 可求得幂函数为 $f(x) = \sqrt{x}$, 设出切点通过导数求出切线方程的斜率, 利用斜率相等列出方程, 即可求出切点坐标, 然后求解双曲线的离心率.

【详解】

依题意可得, 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$, F 关于原点的对称点 $(-1, 0)$; $2 = 4^\alpha$, $\alpha = \frac{1}{2}$, 所以

$f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 设 $Q(x_0, \sqrt{x_0})$, 则 $\frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{x_0}}{x_0 + 1}$, 解得 $x_0 = 1$, $\therefore Q(1, 1)$, 可得 $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$,

又 $c = 1$, $c^2 = a^2 + b^2$, 可解得 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 故双曲线的离心率是 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

故选 B.

【点睛】

本题考查双曲线的性质, 已知抛物线方程求焦点坐标, 求幂函数解析式, 直线的斜率公式及导数的几何意义, 考查了学生分析问题和解决问题的能力, 难度一般.

5、B

【解析】

设 $z = a + bi$, $a, b \in R$, $|z + 2 - i| = \sqrt{(a+2)^2 + (b-1)^2}$, 利用复数几何意义计算.

【详解】

设 $z = a + bi$, $a, b \in R$, 由已知, $a^2 + b^2 = 1$, 所以点 (a, b) 在单位圆上,

而 $|z + 2 - i| = |(a+2) + (b-1)i| = \sqrt{(a+2)^2 + (b-1)^2}$, $\sqrt{(a+2)^2 + (b-1)^2}$ 表示点 (a, b)

到 $(-2, 1)$ 的距离, 故 $|z + 2 - i| \leq \sqrt{(-2)^2 + 1^2} + 1 = 1 + \sqrt{5}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查求复数模的最大值，其实本题可以利用不等式 $|z+2-i|\leq|z|+|2-i|$ 来解决.

6、D

【解析】

利用列举法，从这 5 部专著中选择 2 部作为“数学文化”校本课程学习内容，基本事件有 10 种情况，所选 2 部专著中至少有一部是汉、魏、晋、南北朝时期专著的基本事件有 9 种情况，由古典概型概率公式可得结果.

【详解】

《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《缉古算经》，这 5 部专著中有 3 部产生于汉、魏、晋、南北朝时期. 记这 5 部专著分别为 a, b, c, d, e ，其中 a, b, c 产生于汉、魏、晋、南北朝时期. 从这 5 部专著中选择 2 部作为“数学文化”校本课程学习内容，基本事件有 $ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de$ ，共 10 种情况，所选 2 部专著中至少有一部是汉、魏、晋、南北朝时期专著的基本事件有 $ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce$ ，共 9 种情况，所以所选 2 部专著中至少有一部是汉、魏、晋、南北朝时期专著的概率为 $P = \frac{m}{n} = \frac{9}{10}$. 故选 D.

【点睛】

本题主要考查古典概型概率公式的应用，属于基础题，利用古典概型概率公式求概率时，找准基本事件个数是解题的关键，基本事件的探求方法有 (1)枚举法：适合给定的基本事件个数较少且易一一列举出的；(2)树状图法：适合于较为复杂的问题中的基本事件的探求.在找基本事件个数时，一定要按顺序逐个写出：先 $(A_1, B_1), (A_1, B_2), \dots, (A_1, B_n)$ ，再 $(A_2, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_2, B_n)$ 依次 $(A_3, B_1), (A_3, B_2), \dots, (A_3, B_n) \dots$ 这样才能避免多写、漏写现象的发生.

7、C

【解析】

如图所示，在平面 $ABCD$ 的投影为正方形的中心 E ，故球心 O 在 PE 上，计算长度，设球半径为 R ，则 $(PE - R)^2 + BE^2 = R^2$ ，解得 $R = 2$ ，得到答案.

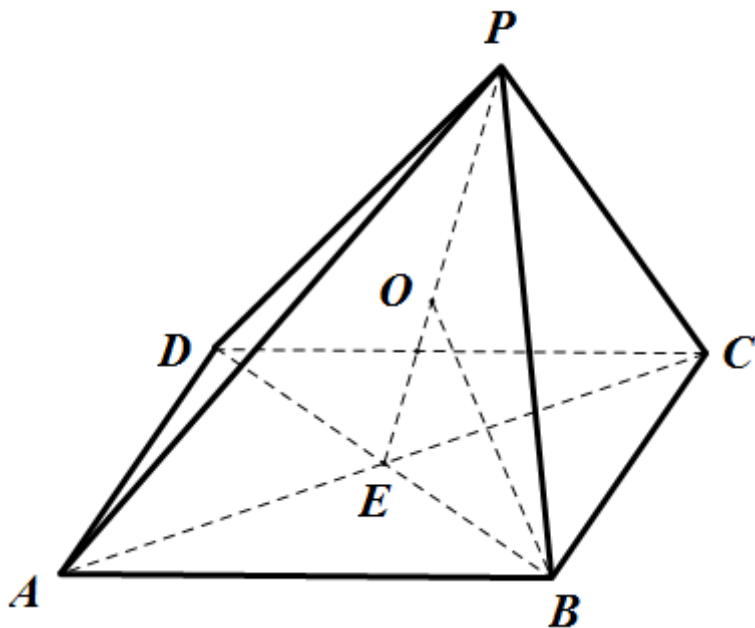
【详解】

如图所示： P 在平面 $ABCD$ 的投影为正方形的中心 E ，故球心 O 在 PE 上，

$$BD = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{3}, \text{ 故 } BE = \frac{1}{2}BD = \sqrt{3}, \quad PE = \sqrt{PB^2 - BE^2} = 3,$$

设球半径为 R ，则 $(PE - R)^2 + BE^2 = R^2$ ，解得 $R = 2$ ，故 $S = 4\pi R^2 = 16\pi$.

故选：C.



【点睛】

本题考查了四棱锥的外接球问题，意在考查学生的空间想象能力和计算能力.

8、A

【解析】

先由题意可得数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，再根据 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ ， $a_4 = 8$ ，可求出公差，即可求出 a_5 .

【详解】

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$ ，则数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，

$$\text{Q } a_1 + a_2 + a_3 = 9, \quad a_4 = 8,$$

$$\therefore 3a_1 + 3d = 9, \quad a_1 + 3d = 8,$$

$$\therefore d = \frac{5}{2},$$

$$\therefore a_5 = a_4 + d = 8 + \frac{5}{2} = \frac{21}{2},$$

故选：A .

【点睛】

本题主要考查了等差数列的性质和通项公式的求法，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平，属于基础题.

9、B

【解析】

$a_3^2 = a_1 a_9 \Leftrightarrow (a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 8d)$ ，将 $a_1 = 2$ 代入，求得公差 d ，再利用等差数列的前 n 项和公式计算即可.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/827112116010006056>