

27.1 圆的确定



1. 理解并掌握圆及其基本元素弦、弧、圆心角等有关概念.
2. 能够根据条件画出图形,在画图的过程中加深对圆及其基本元素的理解.



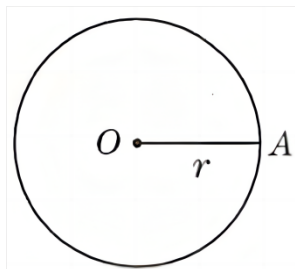
知识点一 圆的概念及表示方法

1. 圆的概念

(1) 圆的描述性定义:如图所示,在一个平面内,线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周,另一个端点 A 所形成的图形叫做圆.其固定的端点 O 叫做圆心,线段 OA 叫做半径

(2) 圆的集合性定义:将圆心为 O 、半径为 r 的圆看成是所有到定点 O 的距离等于定长 r 的点的集合

(3) 圆的表示方法:以点 O 为圆心的圆,记作 $\odot O$,读作“圆 O ”



注意

- (1) “圆”指的是“圆周”(一条封闭的曲线),而不是圆面.
- (2) 确定一个圆的两个因素:圆心和半径.圆心确定圆的位置,半径确定圆的大小.
- (3) 圆上任意两点和圆心构成的三角形是等腰三角形.
- (4) 半径是线段.

2. 圆内、圆外的概念

在圆所在的平面上,以圆周为分界线,含圆心的部分叫做圆的内部(简称圆内),不含圆心的部分叫做圆的外部(简称圆外).以圆周为分界线所成的两部分,分别叫做圆的内部和外部,简称“圆内”“圆外”.

即学即练 下列条件中,能确定一个圆的是 ()

A. 以点 O 为圆心

B. 以 2cm 长为半径

C. 以点 O 为圆心, 10cm长为半径

D. 经过点 A

【答案】C

【分析】确定一个圆有两个重要因素, 一是圆心, 二是半径, 据此可以得到答案.

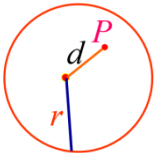
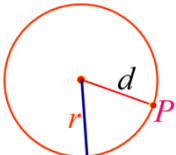
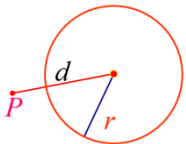
【详解】解: $\because$ 圆心确定, 半径确定后才可以确定圆,

$\therefore$ C 选项正确,

故选: C.

【点睛】本题考查了确定圆的条件, 确定圆要首先确定圆的圆心, 然后也要确定半径.

知识点二 点与圆的位置关系

点与圆的位置关系	点到圆心的距离 d 与半径 r 数关系	图形	推理过程
点在圆内	$0 \leq d < r$		点 A 在圆内 $\Leftrightarrow 0 \leq d < r$
点在圆上	$d = r$		点 A 在圆上 $\Leftrightarrow d = r$
点在圆外	$d > r$		点 A 在圆外 $\Leftrightarrow d > r$

注意:

符号“ $\Leftrightarrow$ ”读作“等价于”, 表示这个符号两边的数学事实可由左边推出右边, 也可由右边推出左边.

即学即练 如图所示, 已知矩形 $ABCD$ 的边 $AB = 3\text{cm}$, $AD = 4\text{cm}$ 若以点 A 为圆心作 $\odot A$, 使 B , C , D 三点中至少有一个点在圆内, 且至少有一点在圆外, 则 $\odot A$ 的半径 r 的取值范围是 ()



A. $3 < r < 4$

B. $4 < r < 5$

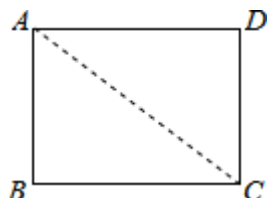
C. $3 < r < 5$

D. $4 < r \leq 5$

【答案】C

【分析】根据勾股定理求出AC的长，进而得出点B, C, D与⊙A的位置关系，即可得出半径r的取值范围.

【详解】解：连接AC，



∵ 矩形ABCD中， $AB = 3$ ， $AD = 4$ ，

∴ $BC = AD = 4$ ，

∴ $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$ ，

∵ 以点A为圆心作⊙A，使B, C, D三点中至少有一个点在圆内，且至少有一点在圆外，

∴ ⊙A的半径r的取值范围是： $3 < r < 5$.

故选：C.

【点睛】此题主要考查了点与圆的位置关系，解决本题要注意点与圆的位置关系，要熟悉勾股定理，及点与圆的位置关系.

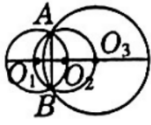


判断点和圆的位置关系的方法：

要判断点和圆的位置关系，只要求出这个点到圆心的距离d，再用d与圆的半径R比较即可；反过来，若已知点与圆的位置关系，则点到圆心的距离d与圆的半径R之间的数量关系也就随之确定了.

知识点三 圆的确定

条件	依据	作图	圆的个数
过一个点作圆	经过一个点A作圆，只要以点A以外的任意一点为圆心，以这一点与点A的距离为半径作圆就可以作出		无数个

过两个点作圆	经过两个点 A, B 作圆, 只要以与点 A, B 距离相等的点为圆心, 即以线段 AB 的垂直平分线上任意一点为圆心, 以这一点与点 A 或点 B 的距离为半径作圆就可以		无数个
过不在同一条直线上的三个点作圆	经过不在同一条直线上的三个点 A, B, C 作圆, 圆心到这三个点的距离相等, 因此, 圆心在线段 AB, BC 的垂直平分线的交点 O 处, 以 O 为圆心, 线段 OA (或 OB, OC) 为半径可作出经过 A, B, C 三个点的圆		一个

性质: 不在同一条直线上的三个点确定一个圆.

知识点四 三角形的外接圆

三角形的三个顶点不在同一直线上, 因此三角形的三个顶点确定一个圆.

1. 三角形外接圆的有关概念

经过一个三角形各顶点的圆叫做这个三角形的外接圆, 外接圆的圆心叫做这个三角形的外心; 这个三角形叫做这个圆的内接三角形。

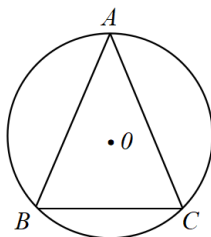
如果一个圆经过一个多边形的各顶点, 那么这个圆叫做这个多边形的外接圆, 这个多边形叫做这个圆的内接多边形.

2. 三角形外心的性质

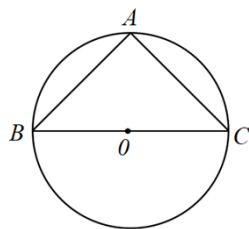
三角形的外心到三角形三个顶点的距离相等, 等于其外接圆的半径.

3. 不同类型的三角形外心的位置特征

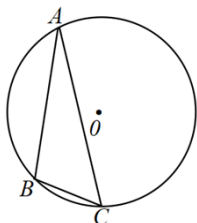
锐角三角形: 外心在三角形的内部;



直角三角形: 外心在直角三角形斜边的中点);



钝角三角形：外心在三角形的外部).

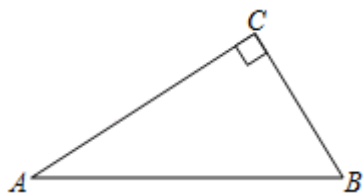


三角形外接圆的作法：

- (1) 作三角形两边的垂直平分线找出交点；
- (2) 以交点为圆心，以圆心到三角形任一顶点的距离为半径作圆.

即学即练 (2020 上·浙江绍兴·九年级统考期末) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$.

- (1) 请用直尺和圆规作出 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的外接圆，圆心为 O (保留作图痕迹，不要求写作法)；
- (2) 若 $AB=6$ ， $\angle A=30^\circ$ ，请求出扇形 AOC 的面积.

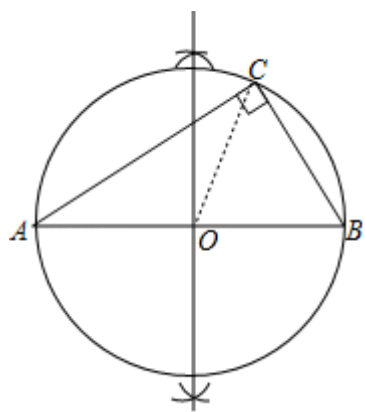


【答案】 (1) 见解析；(2) 3π

【分析】 (1) 用直尺和圆规作线段 AB 的垂直平分线交 AB 于 O ，即可出 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的外接圆；

(2) 根据 $AB=6$ ， $\angle A=30^\circ$ ，即可求出扇形 AOC 的面积.

【详解】 (1) 如图即为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的外接圆，圆心为 O ；



(2) $\because AB$ 是直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

$\because \angle A = 30^\circ$,

$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$,

$\because AB = 6, \angle B = 60^\circ$,

$\therefore$ 圆 O 的半径为 3, 圆心角 $\angle AOC = 120^\circ$,

$\therefore$ 扇形 AOC 的面积为:

$$\frac{n\pi r^2}{360} = \frac{120\pi 3^2}{360} = 3\pi.$$

答: 扇形 AOC 的面积为 3π .

【点睛】本题考查了作图-复杂作图、含 30° 度角的直角三角形、三角形的外接圆与外心、扇形面积的计算, 解决本题的关键是掌握直角三角形的外心在斜边中点.



题型 1 圆的基本概念辨析

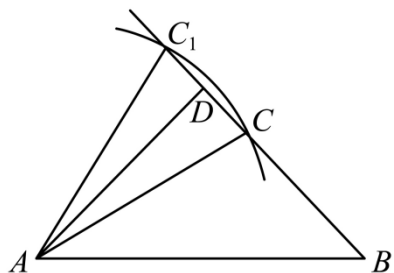
例 1 (2022 上·上海黄浦·九年级统考期中) 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 45^\circ, AB = 2, AC = \sqrt{3}$, 则 BC 的值 ()

- A. 只有 1 个 B. 可以有 2 个 C. 可以有 3 个 D. 无数个

【答案】B

【分析】如图, $AB = 2, \angle B = 45^\circ$, 过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D , 再利用特殊角的三角函数值求解 AD 的长度, 再以 A 为圆心, $AC = \sqrt{3}$ 为半径画弧, 则弧与 BD 的两个交点都为 C 的位置, 从而可得答案.

【详解】解：如图， $AB=2, \angle B=45^\circ$ ，过A作 $AD \perp BC$ 于D，



$$\therefore AD = BD = AB \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{2},$$

$$\therefore \sqrt{2} < \sqrt{3},$$

$\therefore$ 以A为圆心， $AC = \sqrt{3}$ 为半径画弧，则弧与BD的两个交点都为C的位置，

$\therefore BC$ 的值有两个.

故选B.

【点睛】本题考查的是特殊角的三角函数值的应用，圆的基本性质，熟练的画出图形解题是关键.

举一反三1（2020上·上海浦东新·九年级上海民办建平远翔学校校考阶段练习）下列说法正确的是（ ）

- A. 半圆是弧
- B. 过圆心的线段是直径
- C. 弦是直径
- D. 长度相等的两条弧是等弧

【答案】A

【分析】利用圆的有关定义分别判断即可.

【详解】解：A、半圆是弧，正确，符合题意；

B、过圆心的弦是直径，故原命题错误，不符合题意；

C、直径是弦，但弦不一定是直径，故原命题错误，不符合题意；

D、在同圆或等圆中，长度相等的两条弧是等弧，故原命题错误，不符合题意.

故选：A.

【点睛】本题考查了圆的认识，解题的关键是了解圆的有关定义及性质.

举一反三2（2019·上海嘉定·统考一模）已知点C在线段AB上（点C与点A,B不重合），

过点A,B的圆记为圆 O_1 ，过点B,C的圆记为圆 O_2 ，过点C,A的圆记为圆 O_3 ，则下列说法中正确的是（ ）

- A. 圆 O_1 可以经过点C
- B. 点C可以在圆 O_1 的内部

C. 点A可以在圆 O_2 的内部

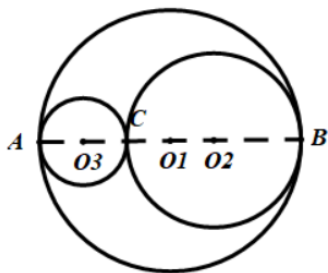
D. 点B可以在圆 O_3 内部

【答案】B

【分析】根据题意，画出符合题意的示意图，然后求解.

【详解】解： $\because$ 点C在线段AB上（点C与点A,B不重合），过点A,B的圆记为圆 O_1 ， $\therefore$ 点C可以在圆 O_1 的内部，故A错误，B正确； $\because$ 过点B,C的圆记为圆 O_2 ， $\therefore$ 点A可以在圆 O_2 的外部，故C错误； $\because$ 过点C,A的圆记为圆 O_3 ， $\therefore$ 点B可以在圆 O_3 的外部，故D错误.

故选B.



【点睛】本题考查点与圆的位置关系，画出适当的辅助图形，采用数形结合的方法，更有助于解题.

题型2 圆的确定

例2（2021上·全国·九年级专题练习）下列条件中，不能确定一个圆的是（ ）

A. 圆心与半径

B. 直径

C. 平面上的三个已知点

D. 三角形的三个顶点

【答案】C

【分析】根据不在同一条直线上的三个点确定一个圆，已知圆心和直径所作的圆是唯一的进行判断即可得出答案.

【详解】解：A、已知圆心与半径能确定一个圆，不符合题意；

B、已知直径能确定一个圆，不符合题意；

C、平面上的三个已知点，不能确定一个圆，符合题意；

D、已知三角形的三个顶点，能确定一个圆，不符合题意；

故选C.

【点睛】本题考查了确定圆的条件，解题的关键是分类讨论．

举一反三 1（2023 上·江苏·九年级专题练习）下列条件中能够确定一个圆的是（ ）

- A. 已知圆心
- B. 已知半径
- C. 已知三个点
- D. 过一个三角形的三个顶点

【答案】D

【分析】已知圆心和半径所作的圆就是唯一的，不在同一直线上的三点确定一个圆．

【详解】解：确定一个圆的条件是圆心和半径，过一个三角形的三个顶点即可确定一个圆，
故选：D．

【点睛】本题主要考查了确定圆的条件，根据不在一条直线上的三点确定一个圆是解题关键．

举一反三 2（2021 上·天津河西·九年级统考期末）下列说法错误的是（ ）

- A. 已知圆心和半径可以作一个圆
- B. 经过一个已知点 A 的圆能做无数个
- C. 经过两个已知点 A, B 的圆能做两个
- D. 经过不在同一直线上的三个点 A, B, C 只能做一个圆

【答案】C

【分析】根据确定圆的条件依次判断即可．

【详解】解：A. 已知圆心和半径可以作一个圆，正确，不符合题意；

B. 经过一个已知点 A 的圆能做无数个，正确，不符合题意；

C. 经过两个已知点 A, B 的圆能做无数个，错误，符合题意；

D. 经过不在同一直线上的三个点 A, B, C 只能做一个圆，正确，不符合题意；

故选：C．

【点睛】本题考查确定圆的条件．注意过三点确定一个圆，要画一个圆需要知道它的圆心和半径．

题型 3 点与圆的位置关系

例 3（2020 上·上海青浦·九年级校考阶段练习）在直角坐标平面中， $M(2,0)$ ，圆 M 的半径

为4，那么点 $P(-1,4)$ 与圆 M 的位置关系是（ ）

- A. 点 P 在圆内 B. 点 P 在圆上 C. 点 P 在圆外 D. 不能确定

【答案】C

【分析】求得线段 MP 的长后与圆 M 的半径比较即可确定正确的选项.

【详解】解： $\because M(2,0)$ ， $P(-1,4)$ ，

$$\therefore MP = \sqrt{(2+1)^2 + 4^2} = 5,$$

$\because$ 圆 M 的半径为4，

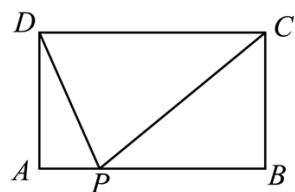
$\therefore$ 点 P 在圆外，

故选：C.

【点睛】考查了点与圆的位置关系，判断点与圆的位置关系，也就是比较点与圆心的距离和半径的大小关系.

举一反三 1 (2023·上海闵行·校联考模拟预测) 矩形 $ABCD$ 中， $AB=8$ ， $BC=3\sqrt{5}$ ，点 P

在边 AB 上，且 $BP=3AP$ ，如果圆 P 是以点 P 为圆心， PD 为半径的圆，那么下列判断正确的是（ ）

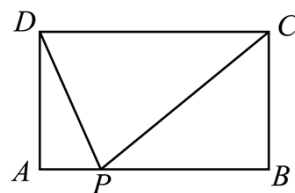


- A. 点 B ， C 均在圆 P 外 B. 点 B 在圆 P 外，点 C 在圆 P 内
C. 点 B 在圆 P 内，点 C 在圆 P 外 D. 点 B ， C 均在圆 P 内

【答案】C

【分析】由 $AB=8$ ， $BP=3AP$ 得到 $AP=2$ ， $BP=6$ ，再根据勾股定理，在 $Rt\triangle ADP$ 中计算出 $PD=7$ ，在 $Rt\triangle PBC$ 中计算出 $PC=9$ ，则 $PC > PD > PB$ ，然后根据点与圆的位置关系进行判断.

【详解】解：如图，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$$\therefore AD = BC = 3\sqrt{5},$$

$$\because AB = 8, \quad BP = 3AP,$$

$$\therefore AP = 2, \quad BP = 6,$$

在 $Rt\triangle ADP$ 中, $AP = 2$, $AD = 3\sqrt{5}$,

$$\therefore PD = \sqrt{AP^2 + AD^2} = 7,$$

在 $Rt\triangle PBC$ 中, $\because PB = 6$, $BC = 3\sqrt{5}$,

$$\therefore PC = \sqrt{PB^2 + BC^2} = 9,$$

$$\therefore PC > PD > PB,$$

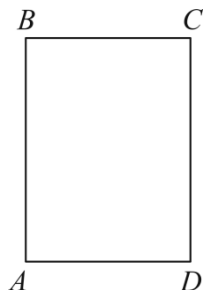
$\therefore$ 点 B 在圆 P 内, 点 C 在圆 P 外.

故选: C.

【点睛】本题考查了点与圆的位置: 设 $\odot O$ 的半径为 r , 点 P 到圆心的距离 $OP = d$, 则有:

点 P 在圆外 $\Leftrightarrow d > r$; 点 P 在圆上 $\Leftrightarrow d = r$; 点 P 在圆内 $\Leftrightarrow d < r$.

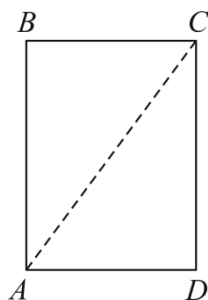
举一反三 2 (2023·上海·一模) 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 8$, $AD = 6$, 以 A 为圆心, r 为半径作 $\odot A$, 使得点 D 在圆内, 点 C 在圆外, 则半径 r 的取值范围是_____.



【答案】 $6 < r < 10$

【分析】首先利用勾股定理得出 AC 的长, 利用以 A 为圆心, r 为半径作 $\odot A$, 使得点 D 在圆内, 点 C 在圆外, 得出 r 的取值范围即可.

【详解】解: 如图, 连接 AC ,



$\because$ 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 8$, $AD = 6$,

$\therefore AC=10$,

$\therefore$ 以 A 为圆心, r 为半径作 $\odot A$, 使得点 D 在圆内, 点 C 在圆外,

$\therefore$ 半径 r 的取值范围是: $6 < r < 10$,

故答案为: $6 < r < 10$.

【点睛】本题主要考查了点与圆的位置关系以及勾股定理, 利用图形得出 r 的取值范围是解题关键.

题型 4 三角形的外接圆

例 4 (2014·上海普陀·统考二模) 下列命题中, 错误的是 ()

- A. 三角形重心是三条中线交点
- B. 三角形外心到各顶点距离相等
- C. 三角形内心到各边距离相等
- D. 等腰三角形重心、内心、外心重合

【答案】D

【详解】试题分析: A、三角形的重心是三条中线的交点, 正确;

B、三角形的外心是三边垂直平分线的交点, 到各顶点的距离相等, 故正确;

C、三角形的内心是三角平分线的交点, 到各边的距离相等, 故正确;

D、等边三角形的重心、内心和外心才重合, 故错误,

故选 D.

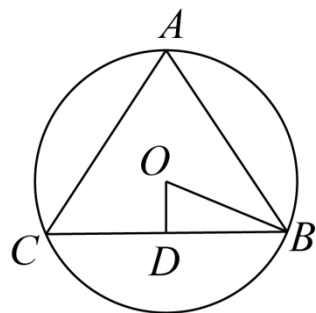
考点: 命题与定理.

举一反三 1 (2022·上海虹口·统考二模) 如果正三角形的边心距是 2, 那么它的外接圆半径是_____.

【答案】4

【分析】利用解直角三角形的知识即可求解.

【详解】根据题意作图如下,



根据题意有: 在正 $\triangle ABC$ 中, 边心距 $OD=2$, OB 为正 $\triangle ABC$ 外接圆半径,

根据等边三角形的性质可知 $\angle OBD = \frac{1}{2} \angle ABD = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$ ，且 $\angle ODB = 90^\circ$ ，

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle OBD \text{ 中, } OB = \frac{OD}{\sin \angle OBD} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = 4,$$

即其外接圆半径 r 为 4，

故答案为：4.

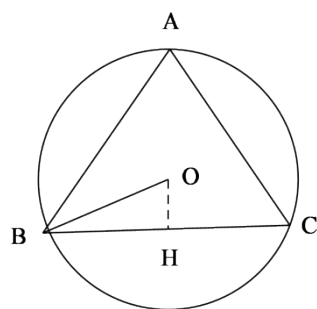
【点睛】本题考查了边心距的含义、解直角三角形、正三角形的性质等知识，理解边心距的含义是解答本题的关键.

举一反三 2 (2020·上海徐汇·统考二模) 已知正三角形 ABC 外接圆的半径长为 R ，那么 $\triangle ABC$ 的周长是_____。(用含 R 的式子表示)

【答案】 $3\sqrt{3}R$

【分析】根据垂径定理以及相关角度求算边长，再算周长.

【详解】



如图：作 $OH \perp BC$ 于 H

$$\because \angle A = 60^\circ, OB = R$$

$$\therefore \angle BOH = 60^\circ$$

$$\therefore BH = HC = \frac{\sqrt{3}}{2} R$$

$$\therefore BC = \sqrt{3}R$$

$$\therefore \text{周长为: } 3\sqrt{3}R$$

故答案为： $3\sqrt{3}R$

【点睛】本题考查三角形的外接圆，掌握相关的角度转化是解题关键.

举一反三 3 (2018 上·江苏苏州·九年级苏州草桥中学阶段练习) $\triangle ABC$ 是直径为 10cm 的圆内接等腰三角形，如果此三角形的底边 $BC = 8\text{cm}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

【答案】32 或 8 平方厘米

【分析】已知 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，根据等腰三角形的性质，若过 A 作底边 BC 的垂线 AD ，则 AD 所在直线必过圆心 O ；在 $\text{Rt}\triangle OBD$ 中，由勾股定理可求出 OD 的长，进而可求出 $\triangle AOB$ 的面积。需注意本题的 $\triangle ABC$ 分锐角和钝角三角形两种情况。

【详解】解：（1）如图①，过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D ，则 AD 必过点 O 。连接 OB 。

$\text{Rt}\triangle OBD$ 中， $OB=5\text{cm}$ ， $BD=4\text{cm}$ 。

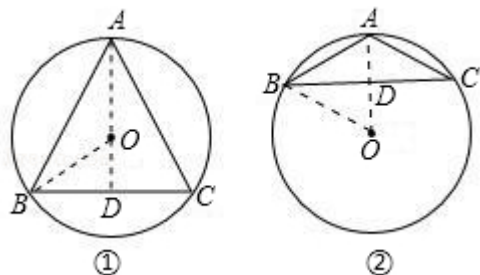
由勾股定理，得： $OD = \sqrt{OB^2 - BD^2} = 3\text{cm}$ ，则 $AD = OA + OD = 8\text{cm}$ ， $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = 32$

(cm^2)。

（2）如图②；同（1）可求得 $OD=3\text{cm}$ ，则 $AD = OA - OD = 2\text{cm}$ ， $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = 8$

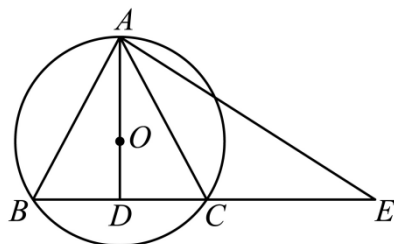
(cm^2)。

所以 $\triangle ABC$ 的面积是32或8平方厘米。故答案为：32或8平方厘米。



【点睛】本题考查了三角形的外接圆，等腰三角形的性质和勾股定理等知识的综合应用。

举一反三4（2022·上海静安·统考二模）如图，已知 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心 O 在高 AD 上，点 E 在 BC 延长线上， $EC = AB$ 。



(1) 求证： $\angle B = 2\angle AEC$ ；

(2) 当 $OA = 2$ ， $\cos \angle BAO = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，求 DE 的长。

【答案】(1) 见解析

(2) $3\sqrt{3}$

【分析】（1）先根据题意得到 AD 垂直平分 BC ，得到 $AB = AC$ ，则 $\angle B = \angle ACB$ ，再证明 $EC = AC$ ，得到 $\angle AEC = \angle CAE$ ，即可利用三角形外角的性质证明结论；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/828051034034006077>