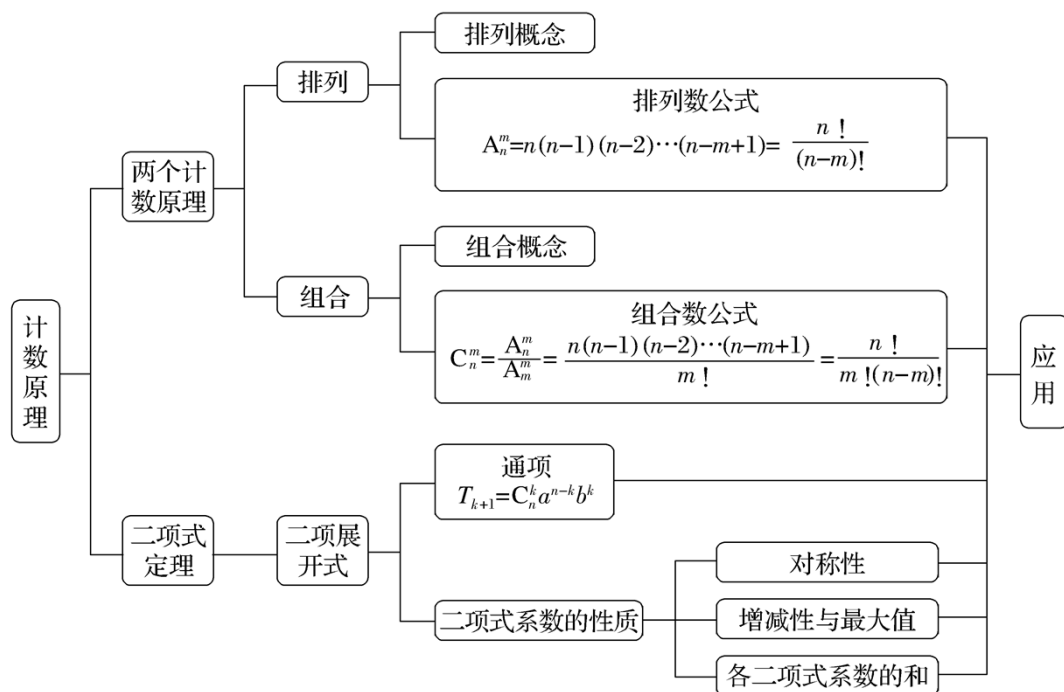


第 06 讲 第六章 计数原理 章末题型大总结

01 知识导图



02 题型精讲

题型 01 分类讨论思想

【典例 1】（2024 高三·全国·专题练习）大约公元前 300 年，欧几里得在他所著《几何原本》中证明了算术基本定理：每一个比 1 大的数（每个比 1 大的正整数）要么本身是一个素数，要么可以写成一系列素数的乘积，如果不考虑这些素数在乘积中的顺序，那么写出来的形式是唯一的，即任何一个大于 1 的自然数 N (N 不为素数) 能唯一地写成 $N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{a_k}$ (其中 p_i 是素数， a_i 是正整数， $1 \leq i \leq k$ ， $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$)，将上式称为自然数 N 的标准分解式，且 N 的标准分解式中有 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ 个素数。从 120 的标准分解式中任取 3 个素数，则一共可以组成不同的三位数的个数为 ()

- A. 6 B. 13 C. 19 D. 60

【答案】B

【知识点】代数中的组合计数问题、排列数的计算

【分析】根据题意，得出从 2, 2, 2, 3, 5 这 5 个素数中任取 3 个组成三位数，分三种情况，结合排列数和组合数的公式，即可求解。

【详解】根据自然数 N 的标准分解式可得 $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ ，

故从 2, 2, 2, 3, 5 这 5 个素数中任取 3 个组成三位数, 有下列三种情况:

①选取 3 个 2, 可以组成 1 个三位数;

②选取 2 个 2 后, 再从 3 或 5 中选一个, 可以组成 $C_2^1 \cdot C_3^2 = 6$ 个不同的三位数;

③选取 2, 3, 5, 可以组成 $A_3^3 = 6$ 个不同的三位数,

所以从 120 的标准分解式中任取 3 个素数, 一共可以组成 $1+6+6=13$ 个不同的三位数.

故选: B.

【典例 2】(2324 高二下·湖南长沙·开学考试) 甲、乙、丙等 5 名同学参加语数外三科知识竞赛, 每人随机选择一科参加竞赛, 则甲和乙不参加同一科, 甲和丙参加同一科竞赛, 且这三科竞赛都有人参加的概率为_____.

【答案】 $\frac{10}{81}$

【知识点】分类加法计数原理、排列组合综合

【分析】

由排列组合知识结合概率公式即可得解.

【详解】因为甲和乙不参加同一科, 甲和丙参加同一科竞赛, 若每个同学可以自由选择, 所以 3 科的选择数有 2, 2, 1 和 3, 1, 1 两种分配方案,

当分配方案为 2, 2, 1 时, 共有 $C_3^2 A_3^3 = \frac{3 \times 2}{2} \times 3 \times 2 = 18$ 种不同的选择方案;

当分配方案为 3, 1, 1 时, 共有 $C_2^1 A_3^3 = 12$ 种不同的选择方案;

所以满足要求的不同选择种数为 $18+12=30$,

所以甲和乙不参加同一科, 甲和丙参加同一科竞赛, 且这三科竞赛都有人参加的概率为 $\frac{30}{3^5} = \frac{10}{81}$,

故答案为: $\frac{10}{81}$

【典例 3】(2324 高二上·上海·课后作业) 用 1、2、3、4 可以组成多少个没有重复数字的正整数? 其中有多少个偶数?

【答案】 64, 32

【知识点】排列数的计算、分类加法计数原理

【分析】由分类加法计数原理以及排列数, 且注意到奇数个数与偶数个数一样, 由此即可求解.

【详解】我们可以分以下四种情形来计算用 1、2、3、4 组成的没有重复数字的正整数:

情形一: 用 1、2、3、4 组成的没有重复数字的一位数有 $A_4^1 = 4$ 个;

情形二: 用 1、2、3、4 组成的没有重复数字的两位数有 $A_4^2 = 4 \times 3 = 12$ 个;

情形三: 用 1、2、3、4 组成的没有重复数字的三位数有 $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ 个;

情形四: 用 1、2、3、4 组成的没有重复数字的四位数有 $A_4^4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 个;

因此由分类加法计数原理可知用 1、2、3、4 组成的没有重复数字的正整数一共有 $4+12+24+24=64$;

又注意到这些数是奇数当且仅当个位数是 1、3，这些数是偶数当且仅当个位数是 2、4，

而个位数是 1、3 的概率 $p_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ，同理个位数是 2、4 的概率 $p_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ，

这表明了这些数中奇数个数和偶数个数一样多，所以这些数中的偶数有 $64 \times \frac{1}{2} = 32$ 个。

【变式 1】（2024·河南·模拟预测）某惠民医院开展“关爱健康，守护生命，服务老人”的义诊活动，需要临时从某科室中抽调 3 名医护人员，已知该科室现共有 3 名医生和 4 名护士。为了保障医院工作正常运作，该科室内至少需要留有 1 名医生和 2 名护士，则不同的抽调方案共有（ ）

- A. 72 种 B. 36 种 C. 30 种 D. 18 种

【答案】C

【知识点】实际问题中的组合计数问题

【分析】

利用组合知识，对抽调的 3 名医护人员分两类，求出各类情况的方案数，再相加即可。

【详解】要使科室内至少留有 1 名医生和 2 名护士，则有以下两类情况：

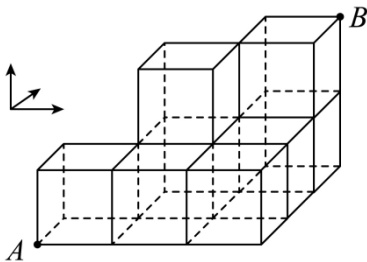
①抽调的 3 名医护人员由 2 名医生 1 名护士组成，则有 $C_3^2 C_4^1 = 12$ 种；

②抽调的 3 名医护人员由 1 名医生 2 名护士组成，则有 $C_3^1 C_4^2 = 18$ 种。

所以不同的抽调方案共有 $12 + 18 = 30$ 种。

故选：C。

【变式 2】（2024·江苏苏州·模拟预测）现有一只蜜蜂沿如图所示的用 8 个完全一样的正方体搭建的几何体的棱并按照箭头所指的相互垂直的三个方向从 A 点飞行到 B 点，可能的飞行路径共有 _____ 种（用数字作答）。

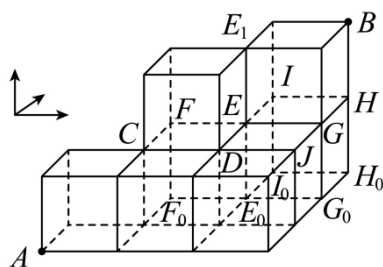


【答案】296

【知识点】排列组合综合

【分析】从高度为 1 的顶点沿竖直向上的棱飞到高度为 2 的顶点，一共有 7 处，计算通过这 7 条棱各自的情况总数，再相加即可。

【详解】



从高度为1的顶点沿竖直向上的棱飞到高度为2的顶点，一共有7处，分别记为 C, D, E, F, G, H, I ， E, F, G, H, I 点下方的点记为 E_0, F_0, G_0, H_0, I_0 ， E 点上方的点记为 E_1 。

从 A 到 C 有 $A_3^3 = 6$ 种路径， C 沿竖直的棱向上飞再到 E_1 有 $A_2^2 = 2$ 种路径；

从 A 到 D 有 $C_4^2 C_2^1 = 12$ 种路径， D 沿竖直的棱向上飞再到 E_1 有1种路径；

从 A 到 C 到 F 有 $6 \times 1 = 6$ 种路径，从 A 到 F_0 到 F 有 $A_2^2 \times 1 \times 1 = 2$ 种路径，

则从 A 到 F 有 $6 + 2 = 8$ 种路径， F 沿竖直的棱向上飞再到 E_1 有1种路径；

从 A 到 F 到 E 有 $8 \times 1 = 8$ 种路径，从 A 到 D 到 E 有 $12 \times 1 = 12$ 种路径，

从 A 到 E_0 到 E 有 $(C_4^2 - 1) \times 1 = 5$ 种路径，

则从 A 到 E 有 $8 + 12 + 5 = 25$ 种路径， E 再到 E_1 有1种路径；

又 E_1 到 B 有 $A_2^2 = 2$ 种路径，则从 A 到 E_1 到 B 有 $(6 \times 2 + 12 \times 1 + 8 \times 1 + 25 \times 1) \times 2 = 114$ 种路径。

从 A 到 E 到 G 有 $25 \times 1 = 25$ 种路径，从 A 到 J 到 G 有 $C_3^3 C_2^1 \times 1 = 20$ 种路径，

从 A 到 G_0 到 G 有 $(C_5^3 - 1) \times 1 = 9$ 种路径， G 沿竖直的棱向上飞再到 B 有1种路径，

则从 A 到 G 竖直向上再到 B 有 $(25 + 20 + 9) \times 1 = 54$ 种路径。

从 A 到 E 到 I 有 $25 \times 1 = 25$ 种路径，从 A 到 E_0 到 I_0 到 I 有 $5 \times 1 \times 1 = 5$ 种路径，

I 沿竖直的棱向上飞再到 B 有1种路径，

则从 A 到 I 竖直向上再到 B 有 $(25 + 5) \times 1 = 30$ 种路径。

从 A 到 I 到 H 有 $30 \times 1 = 30$ 种路径，从 A 到 G 到 H 有 $54 \times 1 = 54$ 种路径，

从 A 到 I_0 到 H_0 到 H 有 $5 \times 1 \times 1 = 5$ 种路径，从 A 到 G_0 到 H_0 到 H 有 $9 \times 1 \times 1 = 9$ 种路径，

H 再到 B 有1种路径，

则从 A 到 H 到 B 有 $(30 + 54 + 5 + 9) \times 1 = 98$ 种路径。

因此从 A 到 B 可能的飞行路径共有 $114 + 54 + 30 + 98 = 296$ 种。

故答案为：296。

【点睛】关键点点睛：排列组合复杂的问题关键在于做好分类讨论，如何找到合适的分类标准非常重要。本题找到高度1飞到高度2的路径，以此为分类方法去讨论，可以找到合适且清晰的思路。

【变式3】（2324高二上·全国·课后作业）某人需要在一天的上午乘车从 A 地到 B 地再转车赶到 C 地，现已知 A 地至 B 地以及 B 地至 C 地的汽车时刻表如下：

从 A 地到 B 地的汽车时刻表

从 B 地到 C 地的汽车时刻表

车次	发车	到站		车次	发车	到站
1	6:30	8:00		1	7:20	8:40
2	7:30	9:00		2	8:20	9:40
3	8:30	10:00		3	9:20	10:40
4	9:30	11:00		4	10:20	11:40

问此人在这天从 A 地到达 C 地有多少种不同的乘车方案？

【答案】6

【知识点】分类加法计数原理

【分析】分别讨论 A 地到 B 到站的时间，然后判断从 B 地到 C 乘坐的车次，结合分类计数原理，即可求解。

【详解】若乘坐从 A 地到 B 的第 1 班汽车，到站 8:00，则从 B 地到 C 有 3 辆汽车可以乘坐；
 若乘坐从 A 地到 B 的第 2 班汽车，到站 9:00，则从 B 地到 C 有 2 辆汽车可以乘坐；
 若乘坐从 A 地到 B 的第 3 班汽车，到站 10:00，则从 B 地到 C 有 1 辆汽车可以乘坐；
 若乘坐从 A 地到 B 的第 4 班汽车，到站 11:00，则从 B 地到 C 没有汽车可以乘坐，
 由分类计数原理，可得 $3+2+1=6$ 种不同的乘坐方式。

题型 02 整体思想

【典例 1】（2024 高三·全国·专题练习）2024 年春节放假安排：农历除夕至正月初六放假，共 7 天。某单位安排 7 位员工值班，每人值班 1 天，每天安排 1 人。若甲不在除夕值班，乙不在正月初一值班，而且丙和甲在相邻的两天值班，则不同的安排方案共有（ ）

A. 1440 种

B. 1360 种

C. 1282 种

D. 1128 种

【答案】D

【知识点】排列组合综合、元素（位置）有限制的排列问题、相邻问题的排列问题

【分析】运用捆绑法，结合分类讨论和排列组合知识计算即可。

【详解】采取对丙和甲进行捆绑的方法：

如果不考虑“乙不在正月初一值班”，则安排方案有： $A_6^6 A_2^2 = 1440$ 种，

如果“乙在正月初一值班”，则安排方案有： $C_1^1 A_4^1 A_2^2 A_4^4 = 192$ 种，

若“甲在除夕值班”，则“丙在初一值班”，则安排方案有： $A_5^5 = 120$ 种。

则不同的安排方案共有 $1440 - 192 - 120 = 1128$ (种)。

故选：D.

【典例 2】(2425 高二下·全国·课后作业) 四名男生和两名女生排一行进行合影，若要求男生甲与男生乙不相邻，且女生 A 和女生 B 相邻，则不同排法的种数有 ()

A. 288 种 B. 144 种 C. 96 种 D. 72 种

【答案】B

【知识点】不相邻排列问题、相邻问题的排列问题

【分析】利用插空法和捆绑法求解即可.

【详解】第一步：先对 2 名女生进行排队，有 A_2^2 种排法；

第二步：将除甲和乙之外的人进行排队，有 A_3^3 种排法；

第三步：甲、乙采用插空的方式，有 A_4^2 种排法. 所以共有 $A_2^2 A_3^3 A_4^2 = 144$ 种.

故选：B.

【变式 1】(2425 高三上·福建泉州·阶段练习) 七位渔民各驾驶一辆渔船依次进湖捕鱼，甲、乙渔船要排在一起出行，丙必须在最中间出行，则不同的排法有 ()

A. 96 种 B. 120 种 C. 192 种 D. 240 种

【答案】C

【知识点】元素（位置）有限制的排列问题、相邻问题的排列问题

【分析】先将甲乙捆绑成一个单元，再讨论其所排位置，运算求解.

【详解】由题意可知，丙排在第 4 位，则甲乙两人可能在第 1、2 或 2、3 或 5、6 或 6、7 位，

故不同的排法有 $C_4^1 A_2^2 A_4^4 = 4 \times 2 \times 24 = 192$ 种.

故选：C.

【变式 2】(2425 高二下·全国·课后作业) 春节是团圆的日子，为了烘托这一喜庆的气氛，某村组织了“村晚”. 通过海选，现有 6 个自编节目需要安排演出，为了更好地突出演出效果，对这 6 个节目的演出顺序有如下要求：“杂技节目”排在后三位，“相声”与“小品”必须相继演出，则不同的演出方案有 ()

A. 240 种 B. 188 种 C. 144 种 D. 120 种

【答案】D

【知识点】其他排列模型、相邻问题的排列问题

【分析】先将“相声”与“小品”排在一起再与其它 4 个节目排序，最后考虑杂技节目在前三位或在后三位情况一样,即可得出答案.

【详解】先将“相声”与“小品”排在一起，有 A_2^2 种排法，再与其它 4 个节目排序，有 A_5^5 种排法，

最后考虑杂技节目在前三位或在后三位情况一样，所以有 $\frac{A_2^2 A_5^5}{2} = 120$ 种.

故选：D.

题型 03 主元思想

【典例 1】（2024 高三·全国·专题练习）甲、乙、丙、丁四名同学排成一排照相，则甲与乙相邻且甲与丙之间恰好有一名同学的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】c

【知识点】计算古典概型问题的概率、相邻问题的排列问题、元素（位置）有限制的排列问题

【分析】需要分甲丙之间是乙和甲丙之间是丁两种类型，分别计算排法数，可得所求概率.

【详解】所有的排法有 $A_4^4=24$ （种）.

①若甲、丙之间恰好为乙，则有 $A_2^2A_2^2$ 种排法；

②若甲、丙之间恰好为丁，则有 A_2^2 种排法.

故所求的概率 $P = \frac{A_2^2A_2^2 + A_2^2}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

故选：c.

【典例 2】（2425 高三上·四川内江·阶段练习）中国空间站的主体结构包括天和核心舱、问天实验舱和梦天实验舱. 假设中国空间站要安排甲，乙，丙，丁，戊 5 名航天员开展实验，其中天和核心舱安排 3 人，问天实验舱与梦天实验舱各安排 1 人. 甲、乙两人要在同一个舱内，则不同的安排方案共有_____.

【答案】6 种

【知识点】元素（位置）有限制的排列问题、分组分配问题

【分析】由题意知：甲、乙两人一定在天和核心舱内，则丙，丁，戊会被安排在不同的三个舱内，按排列公式求得即可.

【详解】由题意知：甲、乙两人一定在天和核心舱内，则丙，丁，戊会被安排在不同的三个舱内，得 $A_3^3=6$ 种.

故答案为：6 种.

【典例 3】（2024 高三·全国·专题练习）7 种不同的花种在排成一列的花盆里，若两种葵花不种在中间，也不种在两端的花盆里，问有多少不同的种法？

【答案】1440

【知识点】元素（位置）有限制的排列问题

【分析】先排 2 盆葵花，再排其他的花种，即可求解.

【详解】先种两种不同的葵花，在不受限制的四个花盆中，共有 A_4^2 种排列，再种其它葵花有 A_5^5 种排列，由分步计数原理得 $A_4^2A_5^5=1440$ （种）.

故有 1440 种符合要求的种法.

【变式 1】（2324 高二下·内蒙古·期中）从 6 人（包含甲）中选派 3 人参加 A，B，C

这三项不同的活动，且每项活动有且仅有 1 人参加，若甲不参加 A 和 B 活动，则不同的选派方案有 ()

- A. 60 种 B. 80 种 C. 90 种 D. 150 种

【答案】B

【知识点】元素（位置）有限制的排列问题

【分析】分甲被选中与甲没被选中两种情况，结合排列数公式即可求解.

【详解】当甲被选中时，不同的选派方案有 $A_5^2 = 20$ 种；

甲没被选中时，不同的选派方案有 $A_5^3 = 60$ 种.

故满足条件的不同的选派方案有 $20 + 60 = 80$ 种.

故选：B.

【变式 2】（2425 高三·上海·课堂例题）七个人排成一行，则甲在乙左边（不一定相邻）的不同排法数有_____种.

【答案】2520

【知识点】元素（位置）有限制的排列问题、分步乘法计数原理及简单应用

【分析】由分步计数原理可得.

【详解】得到一种排法，可分 2 步：

第一步，先排其余 5 人，从一行 7 个位置中任选 5 个将 5 个按序排列，有 A_7^5 种方法；

第二步，再排甲乙，剩余 2 个位置，甲在乙左边，只有 1 种方法.

由分步计数原理可得，共有 $A_7^5 \times 1 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$ 种排法.

故答案为：2520.

题型 04 “正难则反”思想

【典例 1】（2425 高三上·重庆涪陵·开学考试）甲、乙、丙、丁、戊共 5 名同学进行数学建模比赛，决出了第 1 名到第 5 名的名次(无并列情况).甲、乙、丙去询问成绩.老师对甲说：“你不是最差的.”对乙说：“很遗憾，你和甲都没有得到冠军.”对丙说：“你不是第 2 名.”从这三个回答分析，5 名同学可能的名次排列情况种数为 ()

- A. 44 B. 46 C. 48 D. 54

【答案】B

【知识点】元素（位置）有限制的排列问题

【分析】解法一：分析可知甲的排位有可能是第二、三、四 3 种情况，分类讨论结合组合数分析求解；
解法二：利用间接法，根据题意先排甲不排首尾，再排除不符合题意的情况，结合组合数分析求解.

【详解】解法一：多重限制的排列问题：

甲、乙都不是第一名且甲不是最后一名，且丙不是第二名，即甲的限制最多，故以甲为优先元素分类计数，

甲的排位有可能是第二、三、四 3 种情况：

①甲排第二位，乙排第三、四、五位，包含丙的余下3人有 A_3^3 种排法，则有 $1 \times 3 \times A_3^3 = 18$ ；

②甲排第三、四位，乙排第二位，包含丙的余下3人有 A_3^3 种排法，则有 $2 \times 1 \times A_3^3 = 12$ ；

③甲排第三、四位，乙不排第一、二位，即有2种排法，丙不排第二位，有2种排法，余下2人有 A_2^2 种排法，则有 $2 \times 2 \times 2 \times A_2^2 = 16$ ；

综上，该5名同学可能的名次排情况种数为 $18 + 12 + 16 = 46$ 种。

解法二：间接法：

甲不排首尾，有三种情况，再排乙，也有3种情况，包含丙的余下3人有 A_3^3 种排法，共有

$3 \times 3 \times A_3^3 = 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1 = 54$ 种不同的情况；

但如果丙是第二名，则甲有可能是第三、四名2种情况；再排乙，也有2种情况；余下2人有 A_2^2 种排法，故共有 $2 \times 2 \times A_2^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 8$ 种不同的情况；

从而该5名同学可能的名次排情况种数为 $54 - 8 = 46$ 种。

故选：B。

【典例2】（多选）（2425高二下·全国·课后作业）某市文化局组织了一次“送戏下乡”活动，共有7个节目，且小品和相声各一个，若小品不排在第一位，相声不排在最后一位，则不同的排法种数为（ ）

A. $A_6^6 + C_5^1 C_5^1 A_5^5$ B. $A_7^7 - 2A_6^6$ C. $A_6^6 + A_4^4 A_5^5$ D. $A_7^7 - 2A_6^6 + A_5^5$

【答案】AD

【知识点】元素（位置）有限制的排列问题

【分析】根据直接法和间接法进行排列组合，即可得解。

【详解】直接法：

若小品排在最后一位，有 A_6^6 种不同的排法；

若小品排在第二到第六位之间，则相声可以排在除最后一位和小品占据以外的任何位置，有 $C_5^1 C_5^1 A_5^5$ 种不同的排法；

则共有 $A_6^6 + C_5^1 C_5^1 A_5^5$ 种不同的排法，A正确；

间接法：

不管条件限制共有 A_7^7 种不同的排法；

当小品在第一位或相声在最后一位时，有 $2A_6^6$ 种不同的排法，

当小品在第一位且相声在最后一位时，有 A_5^5 种情况；

故共有 $A_7^7 - 2A_6^6 + A_5^5$ ，D正确；

故选：AD。

【典例3】（2425高二上·全国·课前预习）5名学生和1位老师站成一排照相，问老师不排在两端的排法有多少种？

【答案】480

【知识点】元素（位置）有限制的排列问题

【分析】利用特殊位置法或特殊元素法或间接法，结合排列数的计算来求得正确答案.

【详解】方法一（先满足特殊位置）

由于排头和排尾两个位置有限制要求，

因此先从5名学生中选出2名站在排头和排尾，有 A_5^2 种排法，

余下的四人可任意站，有 A_4^4 种排法，

所以符合要求的排法有 $A_5^2 A_4^4 = 480$ （种）.

方法二（先满足特殊元素）

老师既然不能排在两端，于是可以从中间四个位置中任选一个，有 A_4^1 种排法.

5名学生在余下的五个位置中任意排列，有 A_5^5 种排法.

因此符合题意的排法有 $A_4^1 A_5^5 = 480$ （种）.

方法三（间接法）

由于六个人任意排有 A_6^6 种排法，

但实际必须减去老师排在排头的 A_5^5 种排法和排在排尾的 A_5^5 种排法，

因而符合题意的排法有 $A_6^6 - 2A_5^5 = 480$ （种）.

【变式1】（2425高三上·重庆开学考试）第41届全国青少年信息学奥林匹克竞赛(CCF NOI2024)于2024年7月16~22日在重庆市育才中学成功举办.在本次竞赛组织过程中，有甲、乙等5名育才新教师参加了接待、咨询、向导三个志愿者服务项目，每名新教师只参加一个服务项目，每个服务项目至少有一名新教师参加.若5名新教师中的甲、乙两人不参加同一个服务项目，则不同的安排方案有（ ）种

A. 108

B. 114

C. 150

D. 240

【答案】B

【知识点】分组分配问题、实际问题中的组合计数问题、元素（位置）有限制的排列问题

【分析】把5名新教师分成3组，利用分组分配及排除法列式计算即得.

【详解】5名新教师按3:1:1分组有 C_5^3 种方法，按2:2:1分组有 $\frac{C_5^2 C_3^2}{A_2^2}$ 种分法，

因此5名新教师的安排方案有 $(C_5^3 + \frac{C_5^2 C_3^2}{A_2^2}) A_3^3$ 种，

当甲乙在同一组时，甲乙可视为1个人，即相当于4名教师的安排方案，有 $C_4^2 A_3^3$ 种，

所以所求不同的安排方案有 $(C_5^3 + \frac{C_5^2 C_3^2}{A_2^2}) A_3^3 - C_4^2 A_3^3 = 25 \times 6 - 6 \times 6 = 114$ （种）.

故选：B

【变式2】（2425高三上·云南昆明·期中）甲口袋中有标号为1、2、3的三张卡片，乙口袋中有标号为

4、5、6、7的四张卡片，从两个口袋中不放回地随机抽出三张卡片，每个口袋至少抽一张，则抽到的三张卡片中至少有一张标号为偶数的不同抽法共有_____种（用数字作答）

【答案】26

【知识点】实际问题中的组合计数问题

【分析】计算出从甲、乙两个口袋中，每个口袋至少抽一张卡片，共抽取三张卡片的抽法种数，以及抽取的三张卡片都是奇数的抽法种数，利用间接法可得结果.

【详解】从甲、乙两个口袋中，每个口袋至少抽一张卡片，共抽取三张卡片，不同的抽法种数为 $C_3^1 C_4^2 + C_3^2 C_4^1 = 18 + 12 = 30$ ，

其中，抽取的三张卡片都是奇数的抽法种数为 $C_4^3 = 4$ ，

因此，抽到的三张卡片中至少有一张标号为偶数的不同抽法种数为 $30 - 4 = 26$.

故答案为：26 .

题型 05 两个计数原理的综合应用

【典例 1】（2425 高三上·浙江杭州·阶段练习）现有三对双胞胎共 6 人排成一排，则有且只有一对双胞胎相邻的排法种数是（ ）

A. 180

B. 240

C. 288

D. 300

【答案】C

【知识点】排列组合综合、元素（位置）有限制的排列问题、相邻问题的排列问题、不相邻排列问题

【分析】将 6 人进行编号，先选择一对双胞胎令其相邻，且两人可内部排列，故有 $C_3^1 A_2^2$ 种，再就这对双胞胎分别站的位置进行分类求解，结合分类加法计数原理进行求解.

【详解】将 6 人进行编号，分别为 A, B, C, D, E, F ，其中 A, B 为双胞胎， C, D 为双胞胎， E, F 为双胞胎，从左到右站位，分别为 1, 2, 3, 4, 5, 6，

先从 3 对双胞胎中选择一对令两人相邻，且两人可内部排列，故有 $C_3^1 A_2^2$ 种选择，

再依次进行求解，若这对双胞胎分别站在 1, 2 位，此时 3 号位可以从剩余的 4 人中进行选择，

那么 4 号位可以从剩余的双胞胎中选择 1 人，5, 6 号位置将固定排剩余 2 人，

此时共有 $C_3^1 A_2^2 C_4^1 C_2^1 = 48$ 种选择，

若这对双胞胎分别站在 2, 3 位，则 1 号位置有 4 种选择，4 号位可以从剩余的双胞胎中选择 1 人，

5, 6 位置将固定排剩余 2 人，此时共有 $C_3^1 A_2^2 C_4^1 C_2^1 = 48$ 种选择，

若这对双胞胎分别站在 3, 4 位，则 2 号位置有 4 种选择，1 号位可以从剩余的双胞胎中选择 1 人，

5, 6 位置可将剩余 2 人进行全排列，此时共有 $C_3^1 A_2^2 C_4^1 C_2^1 = 96$ 种选择，

若这对双胞胎分别站在 4, 5 或 5, 6，可利用同种方法得到共有 $C_3^1 A_2^2 C_4^1 C_2^1 = 48$ 种选择，

综上，共有 $48 \times 4 + 96 = 288$ 种排法.

故选：C

【典例 2】（2425 高二下·全国·课后作业）结合排列组合，解决下列问题.

(1)将 6 封不同的信放到 7 个不同的信箱中，有多少种放法？

(2)将 6 封不同的信放到 5 个不同的信箱中，每个信箱至少有一封信，有多少种放法？

(3)将 6 封相同的信放到 3 个不同的信箱中，每个信箱至少有一封信，有多少种放法？

(4)将 4 封标有序号 A, B, C, D 的信放到四个标有 A, B, C, D 的信箱中，恰有一组序号相同，则有多少种放法？

【答案】(1) 7^6

(2)1800

(3)10

(4)8

【知识点】实际问题中的组合计数问题、分步乘法计数原理及简单应用、分类加法计数原理、排列组合综合

【分析】(1) 根据题意，由分步乘法计数原理代入计算，即可求解；

(2) 根据题意，先选后排，结合分步乘法计数原理，代入计算，即可求解；

(3) 根据题意，由隔板法代入计算，即可求解；

(4) 根据题意，结合分步乘法计数原理与分类加法计数原理，代入计算，即可求解.

【详解】(1) 以信的角度去看第一封信有 7 个选择，第二封信有 7 个选择，...，所以共有 7^6 种放法；

(2) 先选后排，必然有一个信箱放两封信，则从 6 封信中选取 2 个看成一个整体，即 C_6^2 种，再将其进行排列，即 A_5^5 种排法. 故共有 $C_6^2 A_5^5 = 1800$ 种放法；

(3) 相同元素隔板法，6 封信排成一列，中间有 5 个空位，选取其中 2 个插入隔板，故有 $C_5^2 = 10$ 种放法；

(4) 若 A 组的序号相同，则 B 信封此时有两个选择（C, D 信箱），从而 C, D 信封只剩下 1 种信箱的选择，

同理可知其它序号相同时各有 2 种选择，故共有 $4 \times 2 = 8$ 种放法.

【典例 3】（2425 高二下·全国·课后作业）现有 8 名师生站成一排照相，其中老师 2 人，男学生 4 人，女学生 2 人，在下列情况下，各有多少种不同的站法？

(1)老师站在最中间，2 名女学生分别在老师的两边且相邻，4 名男学生两边各 2 人；

(2)4 名男学生互不相邻，男学生甲不能在两端；

(3)2 名老师之间必要有男女学生各 1 人.

【答案】(1) 96

(2)1728

(3)3840

【知识点】排列组合综合、元素（位置）有限制的排列问题、相邻问题的排列问题、不相邻排列问题

【分析】(1) 根据特殊元素优先安排求解即可.

(2) 利用插空法, 先排老师和女学生, 再排男学生甲, 最后排剩余的 3 名男学生即可.

(3) 先任选一男学生一女学生站两位老师中间, 再排老师, 最后利用捆绑法排列即可.

【详解】(1) 由题意可得共 $A_2^2 A_2^2 A_4^4 = 2 \times 2 \times 24 = 96$ 种不同的站法.

(2) 先排老师和女学生共有 A_4^4 种站法, 再排男学生甲有 C_3^1 种站法,

最后排剩余的 3 名男学生有 A_4^3 种站法,

所以共有 $A_4^4 C_3^1 A_4^3 = 24 \times 3 \times 24 = 1728$ 种不同的站法.

(3) 先任选一男学生一女学生站两位老师中间, 有 $C_2^1 C_4^1 A_2^2$ 种站法,

两老师的站法有 A_2^2 种,

再将一男学生一女学生两位老师进行捆绑与剩余的 4 个人进行全排列有 A_5^5 种,

所以共有 $C_2^1 C_4^1 A_2^2 A_2^2 A_5^5 = 2 \times 4 \times 2 \times 2 \times 120 = 3840$ 种不同的站法.

【变式 1】(2425 高二下·全国·课后作业) 2023 年春节旅游业回暖, 人们纷纷外出游玩, 游览祖国美好河山. 现有 6 名游客去 A, B, C, D 四个景点游览, 要求每个景点都有人游览, 且甲和乙不去同一个景点, 则不同的游览方式共有 _____ 种 (用数字作答).

【答案】1320

【知识点】实际问题中的组合计数问题、元素 (位置) 有限制的排列问题、排列组合综合

【分析】按景点人数分为 1+1+1+3 和 2+2+1+1 两类, 再分情况讨论由排列组合分别计算, 最后求和即可.

【详解】若景点人数为 1+1+1+3,

甲乙各自去一个景点时有 C_4^3 种分组方式,

甲乙有一人和其余 2 人去一个景点时, 共有 $C_2^1 C_4^2$ 种分组方式,

所以此时不同的游览方式有 $(C_4^3 + C_2^1 C_4^2) A_4^4 = 384$ 种;

若景点人数为 2+2+1+1,

先不考虑甲乙去同一个景点的情况, 从 6 人中选 2 人, 再从剩下 4 人中选 2 人, 共有 $C_6^2 C_4^2$ 种选法,

由于选出的 2 人有重复组合, 还需除以 A_2^2 , 然后将 4 组全排, 此时共有 $\frac{C_6^2 C_4^2}{A_2^2} A_4^4$ 种,

再考虑甲乙去同一个景点的情况, 从其余 4 人中选 2 人, 有 C_4^2 , 然后将 4 组全排列有 A_4^4 种, 此时共有 $C_4^2 A_4^4$ 种,

所以此时共有不同的游览方式有 $\frac{C_6^2 C_4^2}{A_2^2} A_4^4 - C_4^2 A_4^4 = 936$ 种.

所以共有 $384 + 936 = 1320$ 种.

故答案为: 1320.

【变式 2】(2425 高三·上海·课堂例题) 4 件不同的礼品, 按以下各种情况, 各有几种分法?

- (1)平均分成两堆;
 (2)平分给两人;
 (3)分成两堆,一堆 3 件,一堆 1 件;
 (4)分给两人,一人 3 件,一人 1 件.

【答案】(1)3;

(2)6;

(3)4;

(4)8

【知识点】分组分配问题、分步乘法计数原理及简单应用、排列组合综合

【分析】根据题意,结合分组分配的解法,结合排列组合数的计算公式,即可求解.

【详解】(1)先将 4 件礼品分成有序的两堆,先取 2 件为第 1 堆,余下 2 件为第 2 堆,则有 $C_4^2 C_2^2$ 种情况,

由于两堆礼品数量相同,取件顺序不同方法相同.如设 4 件礼品为 A, B, C, D ,取 AB 余 CD 与取 CD 余 AB 为同一分堆方法,

故除以 A_2^2 去序,所以不同分法的种数为 $\frac{C_4^2 C_2^2}{A_2^2} = \frac{6 \times 1}{2} = 3$.

(2)由(1)知,平均分成两堆的方法数为 $\frac{C_4^2 C_2^2}{A_2^2}$,

再将两堆礼品按序分给不同两人,有 A_2^2 种分法.

所以不同分法的种数为 $C_4^2 C_2^2 = 6 \times 1 = 6$.

(3)先将 4 件礼品分成有顺序的两堆,取 3 件礼品为第 1 堆,余下 1 件礼品为第 2 堆,则有 $C_4^3 C_1^1$ 种情况,

由于两堆礼品数量不同,第一堆取的 3 件不同,分堆方法也一定不同.如取 ABC 余 D 与取 ABD 余 C 为不同分堆方法.

故不同分法的种数为 $C_4^3 C_1^1 = 4$.

(4)先将 4 件礼品分成两堆,由(3)知有 $C_4^3 C_1^1$ 种情况,

再将两堆礼品按序分给两人,有 A_2^2 种分法.

由分步乘法计数原理得,不同分法的种数为 $C_4^3 C_1^1 A_2^2 = 4 \times 1 \times 2 = 8$.

题型 06 数字排列问题

【典例 1】(2324 高二下·江苏宿迁·期中) 0~9 共 10 个数字.

- (1)可组成多少个无重复数字的四位数;
 (2)可组成多少个无重复数字的五位偶数;
 (3)可组成多少个无重复数字的大于或等于 30000 的五位数;

(4)在无重复数字的五位数中, 50124 从大到小排第几.

【答案】(1) 4536

(2) 13776

(3) 21168

(4) 15119

【知识点】元素(位置)有限制的排列问题、排列数的计算、数字排列问题、分步乘法计数原理及简单应用

【分析】(1) 0 不能排在首位, 其他任意排即可求解;

(2) 分 0 在首位和 0 不在首位两种情况, 满足末位是偶数即可;

(3) 大于或等于 30000 的五位数, 首位从 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 任选一个, 其它的任意排即可;

(4) 首先确定比 50000 大的数, 然后确定比 50000 大比 50124 小的只有 50123, 即可求解.

【详解】(1) 先选 1 个数字排在首位, 其它任意排, 故有 $A_9^1 A_9^3 = 4536$ 个;

(2) 当 0 在末位时, 有 $A_9^4 = 3024$ 个,

当 0 不在末位时, 从 2, 4, 6, 8, 选一个放在末位, 故有 $A_4^1 A_8^1 A_8^3 = 10752$ 个,

故五位偶数共有 $3024 + 10752 = 13776$ 个;

(3) 大于或等于 30000 的五位数, 首位从 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 任选一个, 其它的任意排, 故有 $A_7^1 A_9^4 = 21168$ 个;

(4) 比 50000 大的数, 故有 $A_5^1 A_9^4 = 15120$ 个,

比 50000 大比 50124 小的有, 前四位为 5, 0, 1, 2, 最后一位为 3, 只有 50123,

故在无重复数字的五位数中, 50124 从大到小排第 $15120 - 1 = 15119$ 个.

【典例 2】(2024 高二·全国·专题练习) 从 1 到 7 这 7 个数字中取 2 个偶数、3 个奇数, 排成一个无重复数字的五位数. 求:

(1) 共有多少个五位数?

(2) 其中偶数排在一起的有多少个?

(3) 其中偶数排在一起, 奇数也排在一起的有多少个?

(4) 其中两个偶数不相邻的有多少个?

【答案】(1) 1440

(2) 576

(3) 288

(4) 864

【知识点】不相邻排列问题、相邻问题的排列问题、全排列问题、排列数的计算

【分析】(1) 首先计算取 5 个数字的方法, 再根据排列数公式, 即可计算结果;

(2) (3) 根据 (1), 结合捆绑法, 即可求解;

(4) 根据 (1), 结合插空法, 即可求解.

【详解】(1)依题意,从1到7这7个数字中取2个偶数、3个奇数,共有 $3 \times 4 = 12$ (种)情况,共有 $12A_5^5 = 1440$ (个)五位数.

(2)把选出的偶数捆绑在一起,和奇数进行全排列,故其中偶数排在一起的有 $12A_2^2 A_4^4 = 576$ (个).

(3)把选出的偶数捆绑在一起,把选出的奇数也捆绑在一起,再全排列,故其中偶数排在一起,奇数也排在一起的有 $12A_2^2 A_3^3 A_2^2 = 288$ (个).

(4)先排3个奇数,2个偶数插空,故其中两个偶数不相邻的共有 $12A_3^3 A_4^2 = 864$ (个).

【典例3】(2425 高二·江苏·课后作业)已知一个两位数中的每个数字都从1, 2, 3, 4中任意选取.

(1)如果两位数中的数字不允许重复使用,那么能得到多少个不同的两位数?

(2)如果两位数中的数字允许重复使用,那么能得到多少个不同的两位数?

【答案】(1)12个

(2)16个

【知识点】排列数的计算、排列的意义理解、分步乘法计数原理及简单应用

【分析】(1)因为数字不允许重复,所以可用排列数公式求解;

(2)因为数字允许重复,所以用分步相乘计数原理计算求解即可.

【详解】(1)因为两位数中的数字不允许重复使用,所以一个两位数相当于从1, 2, 3, 4中任意取2个数的排列,故有 $A_4^2 = 4 \times 3 = 12$ 个,

所以可以得到12个不同的两位数.

(2)因为两位数中的数字允许重复使用,所以确定两位数分两步,每步有4种方法,利用分步相乘原理有 $4 \times 4 = 16$ 个,

所以可以得到16个不同的两位数.

【变式1】(2024 高三·全国·专题练习)用0,1,2,3,4,5这六个数字,可以组成多少个满足下列条件的整数?

(1)可以组成多少个无重复数字的四位数?

(2)可以组成多少个恰有两个相同数字的四位数?

【答案】(1)300

(2)600

【知识点】排列数的计算、排列组合综合

【分析】(1)由乘法原理可得可以组成300个无重复数字的四位数

(2)分类讨论,数字0重复和其他数字重复可得可以组成600个恰有两个相同数字的四位数.

【详解】(1)首位不能为0,有5种选法;再从其余的五个数字中任选三个排在其余三个位置,有 $A_5^3 = 60$ 种方法;由分步乘法计数原理得可以组成的四位数有 $5 \times 60 = 300$ 个.

(2)分两种情况进行讨论;

第一种:数字0重复: $C_3^2 A_5^2 = 60$, 第二种:其它数字重复:

①有0时: $C_5^2 C_2^1 A_3^1 C_3^2 = 180$ 个,

②无0时: $C_5^3 C_3^1 A_2^2 C_4^2 = 360$ 个, $\therefore$ 共有 $60 + 180 + 360 = 600$ (个) .

【变式 2】(2324 高二下·江苏·期中) 有 0, 1, 2, 3, 4, 5 六个数字.

(1)能组成多少个无重复数字的四位偶数?

(2)能组成多少个无重复数字且为 5 的倍数的四位数?

(3)能组成多少个无重复数字且比 1230 大的四位数?

【答案】(1)156

(2)108

(3)284

【知识点】排列数的计算、数字排列问题、分步乘法计数原理及简单应用

【分析】(1) 考虑个位数字的情况, 分为三类, 分别计算每种情况的偶数的个数, 相加可得答案;

(2) 考虑个位数字分别为 0, 5 时情况, 分别计算每种情况的数的个数, 相加可得答案;

(3) 从千位数字百位数字以及十位数字个位数字, 分类考虑, 分别计算出每种情况的数的个数, 相加可得答案.

【详解】(1) 由题意组成无重复数字的四位偶数分为三类:

第一类: 0 在个位时, 有 A_5^3 个;

第二类: 2 在个位时, 首位从 1, 3, 4, 5 中选定 1 个, 有 A_4^1 种, 十位和百位从余下的数字中选, 有 A_4^2 种, 共有 $A_4^1 \cdot A_4^2$ 个;

第三类: 4 在个位时, 与第二类同理, 也有 $A_4^1 \cdot A_4^2$ 个,

由分类加法计数原理知, 共有 $A_5^3 + A_4^1 \cdot A_4^2 + A_4^1 \cdot A_4^2 = 156$ 个无重复数字的四位偶数.

(2) 组成无重复数字且为 5 的倍数的四位数分为两类:

个位上的数字是 0 时, 满足条件的四位数有 A_5^3 个;

个位数上的数字是 5 时, 满足条件的四位数有 $A_4^1 \cdot A_4^2$ 个,

故满足条件的四位数有 $A_5^3 + A_4^1 \cdot A_4^2 = 108$ (个) .

(3) 组成无重复数字且比 1230 大的四位数分为四类:

第一类: 形如 2□□□, 3□□□, 4□□□, 5□□□, 共 $A_4^1 \cdot A_5^3$ 个;

第二类: 形如 13□□, 14□□, 15□□, 共有 $A_3^1 \cdot A_4^2$ 个;

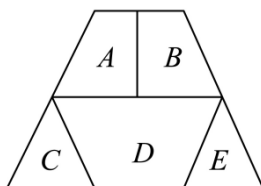
第三类: 形如 124□, 125□, 共有 $A_2^1 \cdot A_3^1$ 个;

第四类: 形如 123□, 共有 A_2^1 个.

由分类加法计数原理知, 共有 $A_4^1 \cdot A_5^3 + A_3^1 \cdot A_4^2 + A_2^1 \cdot A_3^1 + A_2^1 = 284$ (个) .

题型 07 涂色问题

【典例 1】（2425 高二上·全国·单元测试）用红、黄、蓝、绿、橙五种不同颜色给如图所示的 5 块区域 A, B, C, D, E 涂色，要求同一区域用同一种颜色，相邻区域使用不同颜色，则共有涂色方法（ ）



- A. 120 种 B. 720 种 C. 840 种 D. 960 种

【答案】D

【知识点】涂色问题

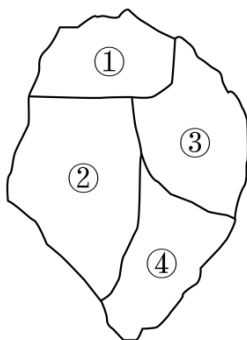
【分析】利用分步乘法计数原理可得答案.

【详解】A 有 5 种颜色可选，B 有 4 种颜色可选，D 有 3 种颜色可选，

C，E 均有 4 种颜色可选，故共有涂色方法 $5 \times 4 \times 3 \times 4 \times 4 = 960$ （种）.

故选：D.

【典例 2】（2425 高三上·福建福州·期中）如图，对某市的 4 个区县地图进行着色，要求有公共边的两个地区不能用同一种颜色，现有 4 种不同的颜色可供选择，则不同的着色方法有_____种.



【答案】48

【知识点】涂色问题

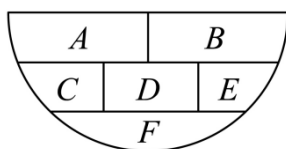
【分析】利用分步乘法计数原理来求得正确答案.

【详解】按①→②→③→④的顺序进行着色，

按分步计数原理可得不同的着色方法有 $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$.

故答案为：48

【典例 3】（2324 高二下·山西临汾·期中）如图，这是一面含 A, B, C, D, E, F 六块区域的墙，现有含甲的五种不同颜色的油漆，一位工人要对这面墙涂色，相邻的区域不同色，则共有_____种不同的涂色方法；若区域 D 不能涂甲油漆，则共有_____种不同的涂色方法.



【答案】 1200 960

【知识点】分类加法计数原理、分步乘法计数原理及简单应用、涂色问题

【分析】直接由分类、分步计数原理即可求解.

【详解】

第一空：若 C, E 的涂色相同，则共有 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 3 = 360$ 种方法；

若 C, E 的涂色不相同，则共有 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times (1 \times 3 + 2 \times 2) = 840$ 种方法.

故共有 1200 种不同的涂色方法.

第二空：因为区域 D 不能涂甲油漆，所以区域 D 的涂色方法有 4 种.

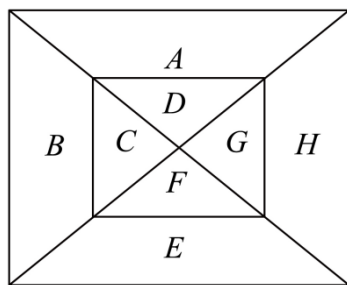
若 C, E 的涂色相同，则共有 $4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 = 288$ 种方法；

若 C, E 的涂色不相同，则共有 $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times (1 \times 3 + 2 \times 2) = 672$ 种方法.

故共有 960 种不同的涂色方法.

故答案为：1200, 960.

【变式 1】（2425 高三上·广西南宁·开学考试）在如图方格中，用 4 种不同颜色做涂色游戏，要求相邻区域颜色不同，每个区域只能涂一种颜色.



①若区域 A, B, C, D 涂 2 种颜色，区域 E, F, G, H 涂另外 2 种颜色，则有 _____ 种不同涂法.

②若区域 A, B, C, D 涂 4 种颜色（ A, B, C, D 涂的颜色互不相同），区域 E, F, G, H 也涂这 4 种颜色（ E, F, G, H 涂的颜色互不相同），则有 _____ 种不同涂法.

【答案】 24 216

【知识点】分类加法计数原理、涂色问题

【分析】①利用分步计数原理可求不同的涂法 ②先涂 A, B, C, D ，再就 F, G 的涂色情况分类计算即可.

【详解】①先涂 A, B, C, D ，共有 $C_4^2 \times A_2^2 = 12$ 种，再涂 E, F, G, H ，共有 $A_2^2 = 2$ 种，

故共有 $12 \times 2 = 24$ 种涂法.

②先涂 A, B, C, D ，共有 $A_4^4 = 24$ ，

若 F, G 所涂颜色为 A, B 所用颜色，则共有 $A_2^2 \times A_2^2 = 4$ 种涂法；

若 F, G 所涂颜色为 C, D 所用颜色，则共有 1 种涂法；

若 F, G 所涂颜色为 A, C 所用颜色，则共有 1 种涂法；

同理 F, G 所涂颜色为 A, D 所用颜色，则共有 1 种涂法；

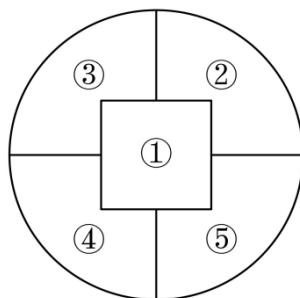
F, G 所涂颜色为 B, C 所用颜色，则共有 1 种涂法；

F, G 所涂颜色为 B, D 所用颜色, 则共有 1 种涂法;

故共有涂法 $24 \times (4 + 5) = 216$ 种,

故答案为: 24, 216.

【变式 2】(2425 高三上·重庆长寿·开学考试) 某次文化艺术展, 以体现了中华文化的外圆内方经典的古钱币造型作为该活动的举办标志, 举办方计划在入口处设立一个如下图所示的造型·现拟在图中五个不同的区域栽种花卉, 要求相邻的两个区域的花卉品种不一样.



现有木绣球、玫瑰、广玉兰、锦带花、石竹等 5 各不同的品种.

(1) (i) 共有多少种不同的栽种方法;

【答案】(1) (i) 420 种;

【知识点】涂色问题、写出简单离散型随机变量分布列、计算条件概率、求离散型随机变量的均值

【分析】(1) (i) 规定涂色顺序为: ①→③→②→④→⑤, 分类讨论②和④是否同色, 进而分析求解;

【详解】(1) (i) 规定涂色顺序为: ①→③→②→④→⑤,

若②和④同色, 方法数为 $C_5^1 C_4^1 C_3^1 \times 3 = 180$;

若②和④不同色, 方法数为 $C_5^1 C_4^1 C_3^1 \times 2 \times 2 = 240$;

所以共有 $180 + 240 = 420$ 种不同的栽种方法;

题型 08 全排列问题

【典例 1】(2324 高二下·广东·期中) 某种产品的加工需要经过 A, B, C, D, E, F, G 七道工序, 要求 A, B 两道工序必须相邻, C, D 两道工序不能相邻, 则不同的加工顺序有 ()

A. 960 种

B. 836 种

C. 816 种

D. 720 种

【答案】A

【知识点】全排列问题、相邻问题的排列问题、不相邻排列问题

【分析】先捆绑, 再全排列后插空得出加工顺序.

【详解】先捆绑 A, B 再和 E, F, G 排列, 然后插入 C, D ,

共有 $A_2^2 A_4^4 A_5^2 = 2 \times 24 \times 20 = 960$ 种排法.

故选: A.

【典例 2】（2324 高二下·甘肃·期末）甲、乙、丙等 7 名学生准备利用暑假时间从 A，B，C 三个社区中选一个参加义务劳动，若甲、乙、丙恰好去三个不同的社区，则所有不同的选择种数为_____。

【答案】486

【知识点】分步乘法计数原理及简单应用、全排列问题

【分析】先安排甲、乙、丙去三个社区，再让余下 4 人选择所去社区，然后利用分步乘法计数原理列式计算即得。

【详解】依题意，甲、乙、丙恰好去三个不同的社区有 A_3^3 种方法，
除甲、乙、丙外的余下 4 人，每个选择一个社区的方法有 3 种，4 人去社区的方法种数为 3^4 ，
所以所有不同的选择种数为 $3^4 A_3^3 = 486$ 。

故答案为：486

【点睛】方法点睛：解排列组合问题要遵循两个原则：一是按元素(或位置)的性质进行分类；二是按事情发生的过程进行分步。具体地说，解排列组合问题常以元素(或位置)为主体，即先满足特殊元素(或位置)，再考虑其他元素(或位置)。

【典例 3】（2324 高二下·北京丰台·期末）2024 年春节期间，全国各大影院热映《第二十条》、《飞驰人生 2》、《热辣滚烫》、《熊出没·逆转时空》4 部优秀的影片。现有 4 名同学，每人选择这 4 部影片中的 1 部观看。

(1)如果这 4 名同学选择观看的影片均不相同，那么共有多少种不同的选择方法？

(2)如果这 4 名同学中的甲、乙 2 名同学分别选择观看影片《第二十条》、《飞驰人生 2》，那么共有多少种不同的选择方法？

(3)如果这 4 名同学中恰有 2 名同学选择观看同一部影片，那么共有多少种不同的选择方法？

【答案】(1)24；

(2)16；

(3)144.

【知识点】全排列问题

【分析】（1）直接全排列可得；

（2）另外 2 人观影 4 部电影，用乘法原理计算可得；

（3）先选 2 人观看同一部电影，然后再安排另外 2 人观看其余的 3 部电影。

【详解】（1）因为 4 名同学观看的影片均不相同，
所以不同的选择方法共有 $A_4^4 = 24$ 种。

（2）因为甲、乙 2 名同学选择观看的影片已确定，
所以不同的选择方法共有 $4 \times 4 = 16$ 种。

（3）因为恰有 2 名同学选择观看同一部影片，
所以不同的选择方法共有 $C_4^2 C_4^1 A_3^2 = 6 \times 4 \times 6 = 144$ 种。

【变式 1】（2324 高二下·安徽安庆·期末）某寝室 4 名室友拍毕业照，4 位同学站成一排，其中甲乙两位同学必须相邻，且甲在乙的右边，则不同的排法种数有（ ）

- A. 24 种 B. 12 种 C. 8 种 D. 6 种

【答案】D

【知识点】分步乘法计数原理及简单应用、全排列问题、相邻问题的排列问题

【分析】先排甲乙，再根据全排列结合分步乘法公式计算.

【详解】根据题意，分 2 步进行分析：

①甲，乙必须相邻且甲在乙的右边，将甲乙看成一个整体，有 1 种顺序，

②将甲乙整体与丙丁全排列，有 $A_3^3 = 6$ 种情况，

则有 $1 \times 6 = 6$ 种排法.

故选：D

【变式 2】（2324 高二下·江苏扬州·阶段练习）用 0，1，2，3，4，5 这 6 个数字可以组成多少个符合下列条件的无重复的数字？（列式并计算）

(1)六位数；

(2)六位奇数；

(3)能被 5 整除的六位数；

(4)组成的六位数按从小到大顺序排列，第 265 个数是多少？

(5)六位数中数字 1，2 始终相邻的数

【答案】(1)600

(2)288

(3)216

(4)310245

(5)192

【知识点】数字排列问题、全排列问题、元素（位置）有限制的排列问题、相邻问题的排列问题

【分析】（1）先排个位，再排其它位的数字，再利用分步乘法计数原理可求得结果，

（2）先是个位排 1 个奇数，然后排除 0 之外的数字，再利用分步乘法计数原理可求得结果，

（3）讨论个位数是 0 或 5，然后进行计算即可.

（4）讨论首位是 1，首位是 2 和首位是 3 时的不同个数再结合第 265 个数求解即可.

（5）先将 1,2 捆绑，再排首位和其它位即可求解.

【详解】（1）先排首数，有 $A_5^1 = 5$ 种，最后排其它有 $A_5^5 = 120$ 种，

根据分步计数原理得，六位数有 $5 \times 120 = 600$ 种；

（2）先排个位数，有 $A_3^1 = 3$ 种，

因为 0 不能在首位，再排首位有 4 种，最后排其它有 $A_4^4 = 24$ 种，

根据分步计数原理得，六位奇数有 $3 \times 4 \times 24 = 288$ 个；

(3) 能被 5 整除的六位数, 则个位数是 0 或 5,

个位数是 0, 则有 A_5^5 种,

个位数是 5, 先排首位, 0 不作为首位, 则有 A_4^1 种排法, 其余位置有 A_4^4 种排法, 故共有 $A_5^5 + A_4^1 A_4^4 = 216$ 个.

(4) 首位数字不能为 0, 首位数字为 1 有 $A_5^5 = 120$ 种,

首位数字为 2, 有 $A_5^5 = 120$ 种,

首位数字为 3, 万位数字上为 0, 有 $A_4^4 = 24$ 种, 此时所有 6 位数有 $120 + 120 + 24 = 264$ 个,

故第 264 个数是 305421, 第 265 个数是 310245.

(5) 先将 1, 2 捆绑看做一个元素, 有 A_2^2 种方法, 再排首位, 除 0 外均可, 有 A_4^1 种, 再排其它位有 $A_4^4 = 24$ 种,

故共有 $A_2^2 \times A_4^1 \times A_4^4 = 192$ 个数.

题型 09 元素位置有限制问题

【典例 1】(2425 高三上·重庆·阶段练习) 我校田径队有十名队员, 分别记为

$A, B, C, D, E, F, G, H, J, K$, 为完成某训练任务, 现将十名队员分成甲、乙两队. 其中将 A, B, C, D, E 五人排成一行形成甲队, 要求 A 与 B 相邻, C 在 D 的左边, 剩下的五位同学排成一行形成乙队, 要求 F 与 G 不相邻, 则不同的排列方法种数为 ()

A. 432

B. 864

C. 1728

D. 2592

【答案】C

【知识点】分步乘法计数原理及简单应用、元素(位置)有限制的排列问题、相邻问题的排列问题、不相邻排列问题

【分析】先计算甲队的排列总数, 分别要用上捆绑法和除序法, 然后再利用插空法计算乙队的排列总数, 最后利用计数原理计算总的排列方法数即可.

【详解】甲队, 先用捆绑法, 将 A 与 B 捆绑有 $A_2^2 = 2$ 种, 将 A 与 B 看作一个整体, 再用除序法得 $\frac{A_4^4}{A_2^2} = 12$ 种, 利用计数原理可知, 一共为 $2 \times 12 = 24$ 种;

乙队, 利用插空法得 $A_3^3 A_4^2 = 72$ 种;

按照计数原理可知, 一共 $24 \times 72 = 1728$ 种.

故选: C

【典例 2】(2425 高二下·全国·课后作业) 用 0, 1, 2, 3, 4, 5 组成一个没有重复数字的六位数, 该六位数是 5 的倍数且奇数与偶数相间, 则满足条件的这样的六位数有 _____ 个.

【答案】20

【知识点】元素(位置)有限制的排列问题

【分析】可分为两类即个位是 0 或个位是 5, 分别求得六位数的个数, 结合分类计数原理, 即可求解.

【详解】若该六位数的个位是0，百位和万位为偶数有 A_2^2 种，其余奇数位有 A_3^3 种，

则满足条件的六位数有 $A_3^3 A_2^2$ 个；

若个位是5，因六位数要求奇数与偶数相间，则首位为偶数，

从2，4中选一个在首位有 A_2^1 种，其余偶数位有 A_2^2 种，奇数位有 A_2^2 种，

满足条件的六位数有 $A_2^1 A_2^2 A_2^2$ 个。

故共有 $A_3^3 A_2^2 + A_2^1 A_2^2 A_2^2 = 20$ 个。

故答案为：20。

【典例3】（2425 高三上·贵州贵阳·阶段练习）今年暑期旅游旺季，贵州以凉爽的气候条件和丰富的旅游资源为依托，吸引了各地游客前来游玩。由安顺黄果树瀑布、荔波小七孔、西江千户苗寨、赤水丹霞、兴义万峰林、铜仁梵净山6个景点谐音组成了贵州文旅的拳头产品“黄小西吃晚饭”。小明和家人计划游览以上6个景点，若铜仁梵净山不安排在首末位置，且荔波小七孔和西江千户苗寨安排在相邻位置，则一共有_____种不同的游览顺序方案。（用数字作答）

【答案】144

【知识点】分步乘法计数原理及简单应用、元素（位置）有限制的排列问题、相邻问题的排列问题

【分析】先将荔波小七孔和西江千户苗寨看成一个景点，利用排列有 $A_3^1 A_4^4 = 3 \times 24 = 72$ 种排法，再利用分步计数原理，即可求解。

【详解】将荔波小七孔和西江千户苗寨捆绑到一起，看成一个景点，有 $A_2^2 = 2$ 种排法，

又铜仁梵净山不安排在首末位置，有 $A_3^1 A_4^4 = 3 \times 24 = 72$ 种排法，

所以共有 $2 \times 72 = 144$ 种不同的游览顺序方案，

故答案为：144。

【变式1】（2425 高二下·全国·课后作业）一位语文老师在网上购买了四书五经各一套，四书指《大学》《中庸》《论语》《孟子》，五经指《诗经》《尚书》《礼记》《周易》《春秋》，他将9本书整齐地放在同一层书架上，若四书，五经必须分别排在一起，且《大学》和《春秋》不能相邻，则不同方式的排列种数为（ ）

A. 5760

B. 5660

C. 5642

D. 5472

【答案】D

【知识点】元素（位置）有限制的排列问题、不相邻排列问题

【分析】计算出所有情况后减去《大学》和《春秋》相邻的情况即可得。

【详解】四书、五经必须分别排在一起，共有 $A_5^5 A_4^4 A_2^2 = 5760$ 种，

若《大学》和《春秋》相邻，则不符合条件，共有 $A_3^3 A_4^4 A_2^2 = 288$ 种，

则共有 $5760 - 288 = 5472$ 种。

故选：D。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/828100065034007040>