绝密*本科目考试启用前

2024 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

本试卷共 12 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合$M=\{x\,|\,-4<x\le 1\}$，$N=\{x\,|\,-1<x<3\}$，则$M\cup N=$（　　）

A. $\{x\ -4<x<3\}$　　B. $\{x\ -1<x\le 1\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{x\ -1<x<4\}$

【答案】A

【解析】

【分析】直接根据并集含义即可得到答案.

【详解】由题意得$M\cup N=(-4,3)$，

故选：A.

2. 已知$\dfrac{z}{\mathrm{i}}=\mathrm{i}-1$，则$z=$（　　）.

A. $1-\mathrm{i}$　　B. $-\mathrm{i}$　　C. $-1-\mathrm{i}$　　D. 1

【答案】C

【解析】

【分析】直接根据复数乘法即可得到答案.

【详解】由题意得$z=\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)=-1-\mathrm{i}$，

故选：C.

3. 求圆$x^2+y^2-2x+6y=0$的圆心到$x-y+2=0$的距离（　　）

A. $2\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{6}$

【答案】C

【解析】

【分析】求出圆心坐标，再利用点到直线距离公式即可.

【详解】由题意得 $x^2+y^2-2x+6y=0$，即 $(x-1)^2+(y+3)^2=10$，

则其圆心坐标为 $(1,-3)$，则圆心到直线 $x-y+2=0$ 的距离为 $\frac{|1+3+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$，

故选：C.

4. $\left(x-\sqrt{x}\right)^4$ 的二项展开式中 x^3 的系数为（　　）

A. 15　　B. 6　　C. -4　　D. -13

【答案】B

【解析】

【分析】写出二项展开式，令 $4-\frac{r}{2}=3$，解出 r 然后回代入二项展开式系数即可得解.

【详解】$\left(x-\sqrt{x}\right)^4$ 的二项展开式为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_4^r x^{4-r}\left(-\sqrt{x}\right)^r=\mathrm{C}_4^r\left(-1\right)^r x^{4-\frac{r}{2}},\left(r=0,1,2,3,4\right)$，

令 $4-\frac{r}{2}=3$，解得 $r=2$，

故所求即为 $\mathrm{C}_4^2(-1)^2=6$.

故选：B.

5. 已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，则“$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$”是“$\vec{a}=\vec{b}$ 或 $\vec{a}=-\vec{b}$”的（　　）条件.

A. 必要而不充分条件　　B. 充分而不必要条件

C. 充分且必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据向量数量积分析可知 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ 等价于 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，结合充分、必要条件分析判断.

【详解】因为 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2=0$，可得 $\vec{a}^2=\vec{b}^2$，即 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，

可知 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ 等价于 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，

若 $\vec{a}=\vec{b}$ 或 $\vec{a}=-\vec{b}$，可得 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，即 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$，可知必要性成立；

若 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$，即 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，无法得出 $\vec{a}=\vec{b}$ 或 $\vec{a}=-\vec{b}$，

例如 $\vec{a}=(1,0),\vec{b}=(0,1)$，满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，但 $\vec{a}\neq\vec{b}$ 且 $\vec{a}\neq-\vec{b}$，可知充分性不成立；

综上所述，“$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$”是“$\vec{a}\neq\vec{b}$且$\vec{a}\neq-\vec{b}$”的必要不充分条件.

故选：A.

6. 已知$f(x)=\sin wx(w>0)$，$f(x_1)=-1$，$f(x_2)=1$，$|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{2}$，则 $w=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】根据三角函数最值分析周期性，结合三角函数最小正周期公式运算求解.

【详解】由题意可知：x_1为$f(x)$的最小值点，x_2为$f(x)$的最大值点，

则$|x_1-x_2|_{\min}=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，即$T=\pi$，

且$w>0$，所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.

故选：B.

7. 记水的质量为$d=\frac{S-1}{\ln n}$，并且 d 越大，水质量越好．若 S 不变，且$d_1=2.1$，$d_2=2.2$，则n_1与n_2的关系为（　　）

A. $n_1<n_2$

B. $n_1>n_2$

C. 若$S<1$，则$n_1<n_2$；若$S>1$，则$n_1>n_2$；

D. 若$S<1$，则$n_1>n_2$；若$S>1$，则$n_1<n_2$；

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意分析可得$\begin{cases}n_1=e^{\frac{S-1}{2.1}}\\n_2=e^{\frac{S-1}{2.2}}\end{cases}$，讨论 S 与 1 的大小关系，结合指数函数单调性分析判断.

【详解】由题意可得$\begin{cases}d_1=\frac{S-1}{\ln n_1}=2.1\\d_2=\frac{S-1}{\ln n_2}=2.2\end{cases}$，解得$\begin{cases}n_1=e^{\frac{S-1}{2.1}}\\n_2=e^{\frac{S-1}{2.2}}\end{cases}$，

若$S>1$，则$\frac{S-1}{2.1}>\frac{S-1}{2.2}$，可得$e^{\frac{S-1}{2.1}}>e^{\frac{S-1}{2.2}}$，即$n_1>n_2$；

若$S=1$，则$\frac{S-1}{2.1}=\frac{S-1}{2.2}=0$，可得$n_1=n_2=1$；

若$S<1$，则$\frac{S-1}{2.1}<\frac{S-1}{2.2}$，可得$e^{\frac{S-1}{2.1}}<e^{\frac{S-1}{2.2}}$，即$n_1<n_2$；

结合选项可知 C 正确，ABD 错误；

故选：C.

8. 已知以边长为 4 的正方形为底面的四棱锥，四条侧棱分别为 4，4，$2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}$，则该四棱锥的高为（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

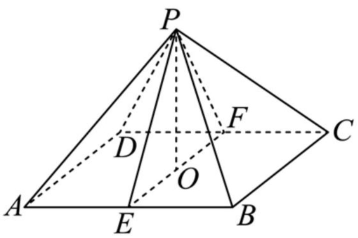
【答案】D

【解析】

【分析】取点作辅助线， 根据题意分析可知平面$PEF\perp$平面$ABCD$，可知$PO\perp$平面$ABCD$，利用等体积法求点到面的距离.

【详解】如图，底面$ABCD$为正方形，

当相邻的棱长相等时，不妨设$PA=PB=AB=4, PC=PD=2\sqrt{2}$，



分别取AB, CD的中点E, F，连接PE, PF, EF，

则$PE\perp AB, EF\perp AB$，且$PE\cap EF=E$，PE, EF Ì 平面PEF，

可知$AB\perp$平面PEF，且AB Ì 平面$ABCD$，

所以平面$PEF\perp$平面$ABCD$，

过P作EF的垂线，垂足为O，即$PO\perp EF$，

由平面$PEF\cap$平面$ABCD=EF$，PO Ì 平面PEF，

所以$PO\perp$平面$ABCD$，

由题意可得：$PE=2\sqrt{3}, PF=2, EF=4$，则$PE^2+PF^2=EF^2$，即$PE\perp PF$，

则$\frac{1}{2}PE\cdot PF=\frac{1}{2}PO\cdot EF$，可得$PO=\frac{PE\cdot PF}{EF}=\sqrt{3}$，

所以四棱锥的高为$\sqrt{3}$.

当相对的棱长相等时，不妨设$PA = PC = 4$，$PB = PD = 2\sqrt{2}$，

因为 $BD=4\sqrt{2}=PB+PD$，此时不能形成三角形 PBD，与题意不符，这样情况不存在.

故选：D.

9. 已知 $\left(x_1,y_1\right)$，$\left(x_2,y_2\right)$ 是函数 $y=2^x$ 图象上不同的两点，则下列正确的是（　　）

A. $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}>\dfrac{x_1+x_2}{2}$　　　　B. $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}$

C. $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}>x_1+x_2$　　　　D. $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}<x_1+x_2$

【答案】A

【解析】

【分析】根据指数函数和对数函数的单调性结合基本不等式分析判断 AB；举例判断 CD 即可.

【详解】由题意不妨设 $x_1<x_2$，因为函数 $y=2^x$ 是增函数，所以 $0<2^{x_1}<2^{x_2}$，即 $0<y_1<y_2$，

对于选项 AB：可得 $\dfrac{2^{x_1}+2^{x_2}}{2}>\sqrt{2^{x_1}\cdot 2^{x_2}}=2^{\frac{x_1+x_2}{2}}$，即 $\dfrac{y_1+y_2}{2}>2^{\frac{x_1+x_2}{2}}>0$，

根据函数 $y=\log_2 x$ 是增函数，所以 $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}>\log_2 2^{\frac{x_1+x_2}{2}}=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，故 A 正确，B 错误；

对于选项 C：例如 $x_1=0,x_2=1$，则 $y_1=1,y_2=2$，

可得 $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}=\log_2\dfrac{3}{2}\in\left(0,1\right)$，即 $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}<1=x_1+x_2$，故 C 错误；

对于选项 D：例如 $x_1=-1,x_2=-2$，则 $y_1=\dfrac{1}{2},y_2=\dfrac{1}{4}$，

可得 $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}=\log_2\dfrac{3}{8}=\log_2 3-3\in\left(-2,-1\right)$，即 $\log_2\dfrac{y_1+y_2}{2}>-3=x_1+x_2$，故 D 错误，

故选：A.

10. 若集合 $\left\{\left(x,y\right)\mid y=x+t(x^2-x),0\le t\le 1,1\le x\le 2\right\}$ 表示的图形中，两点间最大距离为 d、面积为 S，则（　　）

A. $d=3$，$S<1$　　　　B. $d=3$，$S>1$

C. $d=\sqrt{10}$，$S<1$　　　　D. $d=\sqrt{10}$，$S>1$

【答案】C

【解析】

【分析】先以 t 为变量，分析可知所求集合表示的图形即为平面区域 $\begin{cases}y\le x^2\\ y\ge x\end{cases}$，结合图形分析求解即可.

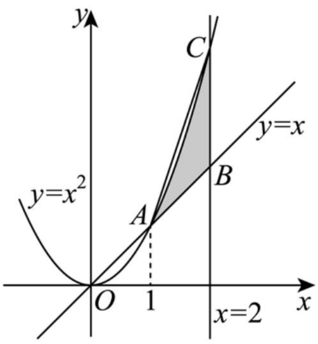
ïl$1 \leq x \leq 2$

【详解】对任意给定 $x\in[1,2]$，则 $x^2-x=x(x-1)\geq 0$，且 $t\in[0,1]$，

可知 $x\leq x+t(x^2-x)\leq x+x^2-x=x^2$，即 $x\leq y\leq x^2$，

再结合 x 的任意性，所以所求集合表示的图形即为平面区域 $\begin{cases} y\leq x^2 \\ y\geq x \\ 1\leq x\leq 2 \end{cases}$，

如图阴影部分所示，其中 $A(1,1),B(2,2),C(2,4)$，



可知任意两点间距离最大值 $d=|AC|=\sqrt{10}$；

阴影部分面积 $S<S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$.

故选：C.

【点睛】方法点睛： 数形结合的重点是"以形助数"，在解题时要注意培养这种思想意识，做到心中有图，见数想图，以开拓自己的思维．使用数形结合法的前提是题目中的条件有明确的几何意义，解题时要准确把握条件、结论与几何图形的对应关系，准确利用几何图形中的相关结论求解．

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11．已知抛物线 $y^2=16x$，则焦点坐标为________.

【答案】$(4,0)$

【解析】

【分析】形如 $y^2=2px,(p\neq 0)$ 的抛物线的焦点坐标为 $\left(\frac{p}{2},0\right)$，由此即可得解.

【详解】由题意抛物线的标准方程为 $y^2=16x$，所以其焦点坐标为 $(4,0)$.

故答案为：$(4,0)$.

12. 已知$\alpha \in \left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，且 α 与β 的终边关于原点对称，则$\cos\beta$ 的最大值为________.

【答案】$-\frac{1}{2}$##-0.5

【解析】

【分析】首先得出 $\beta = a + \pi + 2k\pi, k \in Z$，结合三角函数单调性即可求解最值.

【详解】由题意 $\beta = a + \pi + 2k\pi, k \in Z$，从而 $\cos\beta = \cos(a + \pi + 2k\pi) = -\cos a$，

因为$\alpha \in \left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，所以$\cos a$ 的取值范围是$\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$，$\cos\beta$ 的取值范围是$\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right]$，

当且仅当$\alpha = \frac{\pi}{3}$，即 $\beta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$时，$\cos\beta$ 取得最大值，且最大值为$-\frac{1}{2}$.

故答案为：$-\frac{1}{2}$.

13. 已知双曲线$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$，则过$(3,0)$且和双曲线只有一个交点的直线的斜率为________.

【答案】$\pm\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】首先说明直线斜率存在，然后设出方程，联立双曲线方程，根据交点个数与方程根的情况列式即可求解.

【详解】联立$x = 3$与$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$，解得 $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$，这表明满足题意的直线斜率一定存在，

设所求直线斜率为k，则过点$(3,0)$且斜率为k 的直线方程为$y = k(x-3)$，

联立$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \\ y = k(x-3) \end{cases}$，化简并整理得：$(1-4k^2)x^2 + 24k^2x - 36k^2 - 4 = 0$，

由题意得$1-4k^2 = 0$或$\Delta = (24k^2)^2 + 4(36k^2+4)(1-4k^2) = 0$，

解得$k = \pm\frac{1}{2}$或无解，即$k = \pm\frac{1}{2}$，经检验，符合题意.

故答案为：$\pm\frac{1}{2}$.

14. 已知三个圆柱的体积为公比为 10 的等比数列．第一个圆柱的直径为 65mm，第二、三个圆柱的直径为 325mm，第三个圆柱的高为 230mm，求前两个圆柱的高度分别为________.

【答案】$\frac{115}{2}$mm,23mm

【解析】

【分析】根据体积为公比为 10 的等比数列可得关于高度的方程组，求出其解后可得前两个圆柱的高度.

【详解】设第一个圆柱的高为h_1，第二个圆柱的高为h_2，则$\frac{\pi\left(\frac{325}{2}\right)^2 h_2}{\pi\left(\frac{65}{2}\right)^2 h_1}=\frac{\pi\left(\frac{325}{2}\right)^2\times 230}{\pi\left(\frac{325}{2}\right)^2 h_2}=10$，

故$h_2=23\text{mm}$，$h_1=\frac{115}{2}\text{mm}$，

故答案为：$\frac{115}{2}$mm,23mm .

15. 已知$M=\{k\mid a_k=b_k\}$，a_n，b_n不为常数列且各项均不相同，下列正确的是______.

①a_n，b_n均为等差数列，则M中最多一个元素；

②a_n，b_n均为等比数列，则M中最多三个元素；

③a_n为等差数列，b_n为等比数列，则M中最多三个元素；

④a_n单调递增，b_n单调递减，则M中最多一个元素.

【答案】①③④

【解析】

【分析】利用两类数列的散点图的特征可判断①④的正误，利用反例可判断②的正误，结合通项公式的特征及反证法可判断③的正误.

【详解】对于①, 因为$\{a_n\},\{b_n\}$均为等差数列，故它们的散点图分布在直线上，

而两条直线至多有一个公共点，故M中至多一个元素，故①正确.

对于②, 取$a_n=2^{n-1},b_n=-(-2)^{n-1}$, 则$\{a_n\},\{b_n\}$均为等比数列，

但当n为偶数时，有$a_n=2^{n-1}=b_n=-(-2)^{n-1}$，此时$M$中有无穷多个元素，

故②错误.

对于③, 设$b_n=Aq^n(Aq\neq 0,q\neq\pm 1)$，$a_n=kn+b\,(k\neq 0)$，

若M中至少四个元素，则关于n的方程$Aq^n=kn+b$至少有 4 个不同的正数解，

若 $q>0, q\neq 1$，则由 $y=Aq^n$ 和 $y=kn+b$ 的散点图可得关于 n 的方程 $Aq^n=kn+b$ 至多有两个不同的解，矛盾；

若$q<0,q\neq\pm1$，考虑关于n 的方程$Aq^n=kn+b$奇数解的个数和偶数解的个数，

当$Aq^n=kn+b$有偶数解，此方程即为$A|q|^n=kn+b$，

方程至多有两个偶数解，且有两个偶数解时$Ak\ln|q|>0$，

否则$Ak\ln|q|<0$，因$y=A|q|^n,y=kn+b$单调性相反，

方程$A|q|^n=kn+b$至多一个偶数解，

当$Aq^n=kn+b$有奇数解，此方程即为$-A|q|^n=kn+b$，

方程至多有两个奇数解，且有两个奇数解时$-Ak\ln|q|>0$即$Ak\ln|q|<0$

否则$Ak\ln|q|>0$，因$y=-A|q|^n,y=kn+b$单调性相反，

方程$A|q|^n=kn+b$至多一个奇数解，

因为$Ak\ln|q|>0$，$Ak\ln|q|<0$不可能同时成立，

故$Aq^n=kn+b$不可能有4个不同的正数解，故③正确.

对于④, 因为$\{a_n\}$为单调递增，$\{b_n\}$为递减数列，前者散点图呈上升趋势，

后者的散点图呈下降趋势，两者至多一个交点，故④正确.

故答案为：①③④

【点睛】思路点睛：对于等差数列和等比数列的性质的讨论，可以利用两者散点图的特征来分析，注意讨论两者性质关系时，等比数列的公比可能为负，此时要注意合理转化.

三、解答题共6小题，共85分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 在$\triangle ABC$中，$a=7$，A为钝角，$\sin 2B=\frac{\sqrt{3}}{7}b\cos B$.

（1）求$\angle A$；

（2）从条件①、条件②和条件③这三个条件中选择一个作为已知，求$\triangle ABC$的面积.

①$b=7$；②$\cos B=\frac{13}{14}$；③$c\sin A=\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

注：如果选择条件①、条件②和条件③分别解答，按第一个解答计分.

【答案】（1）$A=\frac{2\pi}{3}$；

（2）选择①无解；选择②和③$\triangle ABC$面积均为$\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

【解析】

【分析】（1）利用正弦定理即可求出答案；

（2）选择①，利用正弦定理得$B=\frac{\pi}{3}$，结合（1）问答案即可排除；选择②，首先求出$\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，再代入式子得$b=3$，再利用两角和的正弦公式即可求出$\sin C$，最后利用三角形面积公式即可；选择③，首先得到$c=5$，再利用正弦定理得到$\sin C=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，再利用两角和的正弦公式即可求出$\sin B$，最后利用三角形面积公式即可；

【小问 1 详解】

由题意得$2\sin B\cos B=\frac{\sqrt{3}}{7}b\cos B$，因为A 为钝角，

则$\cos B\neq 0$，则$2\sin B=\frac{\sqrt{3}}{7}b$，则$\frac{b}{\sin B}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{7}}=\frac{a}{\sin A}=\frac{7}{\sin A}$，解得$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为A 为钝角，则$A=\frac{2\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

选择①$b=7$，则$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{14}b=\frac{\sqrt{3}}{14}\times 7=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为$A=\frac{2\pi}{3}$，则$B$为锐角，则$B=\frac{\pi}{3}$，

此时$A+B=\pi$，不合题意，舍弃；

选择②$\cos B=\frac{13}{14}$，因为B为三角形内角，则$\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{13}{14}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

则代入$2\sin B=\frac{\sqrt{3}}{7}b$得$2\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{\sqrt{3}}{7}b$，解得$b=3$，

$$\sin C=\sin(A+B)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+B\right)=\sin\frac{2\pi}{3}\cos B+\cos\frac{2\pi}{3}\sin B$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{13}{14}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{5\sqrt{3}}{14},$$

则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 7\times 3\times\frac{5\sqrt{3}}{14}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$.