

2024 年北京高考数学

一、单选题

1. 已知集合 $M = \{x | -3 < x < 1\}$, $N = \{x | -1 \leq x < 4\}$, 则 $M \cup N = (\quad)$

- A. $\{x | -1 \leq x < 1\}$ B. $\{x | x > -3\}$
C. $\{x | -3 < x < 4\}$ D. $\{x | x < 4\}$

2. 已知 $\frac{z}{i} = -1 - i$, 则 $z = (\quad)$.

- A. $-1 - i$ B. $-1 + i$ C. $1 - i$ D. $1 + i$

3. 圆 $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$ 的圆心到直线 $x - y + 2 = 0$ 的距离为 $(\quad)$

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. 3 D. $3\sqrt{2}$

4. 在 $(x - \sqrt{x})^4$ 的展开式中, x^3 的系数为 $(\quad)$

- A. 6 B. -6 C. 12 D. -12

5. 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 是向量, 则“ $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$ ”是“ $\vec{a} = -\vec{b}$ 或 $\vec{a} = \vec{b}$ ”的 $(\quad)$.

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 设函数 $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$. 已知 $f(x_1) = -1$, $f(x_2) = 1$, 且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$, 则 $\omega = (\quad)$

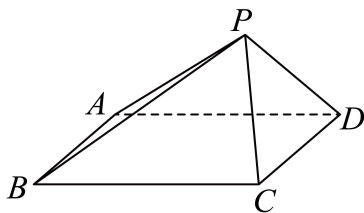
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

7. 生物丰富度指数 $d = \frac{S-1}{\ln N}$ 是河流水质的一个评价指标, 其中 S, N 分别表示河流中的生物种类数与生物个体总数.

生物丰富度指数 d 越大, 水质越好. 如果某河流治理前后的生物种类数 S 没有变化, 生物个体总数由 N_1 变为 N_2 , 生物丰富度指数由 2.1 提高到 3.15, 则 $(\quad)$

- A. $3N_2 = 2N_1$ B. $2N_2 = 3N_1$
C. $N_2^2 = N_1^3$ D. $N_2^3 = N_1^2$

8. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, $PA = PB = 4$, $PC = PD = 2\sqrt{2}$, 该棱锥的高为 $(\quad)$.



- A. 1 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

9. 已知 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 是函数 $y = 2^x$ 的图象上两个不同的点, 则 $(\quad)$

- A. $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$ B. $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} > \frac{x_1 + x_2}{2}$

$$C. \log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} < x_1 + x_2$$

$$D. \log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} > x_1 + x_2$$

10. 已知 $M = \{(x, y) | y = x + t(x^2 - x), 1 \leq x \leq 2, 0 \leq t \leq 1\}$ 是平面直角坐标系中的点集. 设 d 是 M 中两点间距离的最大值, S 是 M 表示的图形的面积, 则 ()

$$A. d = 3, S < 1$$

$$B. d = 3, S > 1$$

$$C. d = \sqrt{10}, S < 1$$

$$D. d = \sqrt{10}, S > 1$$

二、填空题

11. 抛物线 $y^2 = 16x$ 的焦点坐标为_____.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 它们的终边关于原点对称. 若 $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, 则 $\cos \beta$ 的最大值为_____.

13. 若直线 $y = k(x - 3)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 只有一个公共点, 则 k 的一个取值为_____.

14. 汉代刘歆设计的“铜嘉量”是龠、合、升、斗、斛五量合一的标准量器, 其中升量器、斗量器、斛量器的形状均可视为圆柱. 若升、斗、斛量器的容积成公比为 10 的等比数列, 底面直径依次为 65mm, 325mm, 325mm, 且斛量器的高为 230mm, 则斗量器的高为_____mm, 升量器的高为_____mm.

15. 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是两个不同的无穷数列, 且都不是常数列. 记集合 $M = \{k | a_k = b_k, k \in \mathbb{N}^*\}$, 给出下列 4 个结论:

①若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为等差数列, 则 M 中最多有 1 个元素;

②若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为等比数列, 则 M 中最多有 2 个元素;

③若 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, 则 M 中最多有 3 个元素;

④若 $\{a_n\}$ 为递增数列, $\{b_n\}$ 为递减数列, 则 M 中最多有 1 个元素.

其中正确结论的序号是_____.

三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\angle A$ 为钝角, $a = 7$, $\sin 2B = \frac{\sqrt{3}}{7} b \cos B$.

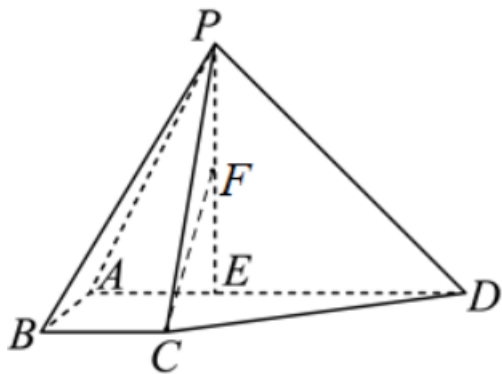
(1) 求 $\angle A$;

(2) 从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 使得 $\triangle ABC$ 存在, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①: $b = 7$; 条件②: $\cos B = \frac{13}{14}$; 条件③: $c \sin A = \frac{5}{2} \sqrt{3}$.

注: 如果选择的条件不符合要求, 第 (2) 问得 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $BC \parallel AD$, $AB = BC = 1$, $AD = 3$, 点 E 在 AD 上, 且 $PE \perp AD$, $PE = DE = 2$.



(1)若 F 为线段 PE 中点, 求证: $BF \parallel$ 平面 PCD .

(2)若 $AB \perp$ 平面 PAD , 求平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值.

18. 某保险公司为了了解该公司某种保险产品的索赔情况, 从合同险期限届满的保单中随机抽取 1000 份, 记录并整理这些保单的索赔情况, 获得数据如下表:

赔偿次数	0	1	2	3	4
单数	800	100	60	30	10

假设: 一份保单的保费为 0.4 万元; 前 3 次索赔时, 保险公司每次赔偿 0.8 万元; 第四次索赔时, 保险公司赔偿 0.6 万元. 假设不同保单的索赔次数相互独立. 用频率估计概率.

(1)估计一份保单索赔次数不少于 2 的概率;

(2)一份保单的毛利润定义为这份保单的保费与赔偿总金额之差.

(i) 记 X 为一份保单的毛利润, 估计 X 的数学期望 $E(X)$;

(ii) 如果无索赔的保单的保费减少 4%, 有索赔的保单的保费增加 20%, 试比较这种情况下一份保单毛利润的数学期望估计值与 (i) 中 $E(X)$ 估计值的大小. (结论不要求证明)

19. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 以椭圆 E 的焦点和短轴端点为顶点的四边形是边长为 2 的正方形. 过点

$(0, t) (t > \sqrt{2})$ 且斜率存在的直线与椭圆 E 交于不同的两点 A, B , 过点 A 和 $C(0, 1)$ 的直线 AC 与椭圆 E 的另一个交点为 D .

(1)求椭圆 E 的方程及离心率;

(2)若直线 BD 的斜率为 0, 求 t 的值.

20. 设函数 $f(x) = x + k \ln(1+x) (k \neq 0)$, 直线 l 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(t, f(t)) (t > 0)$ 处的切线.

(1)当 $k = -1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2)求证: l 不经过点 $(0, 0)$.

(3)当 $k = 1$ 时, 设点 $A(t, f(t)) (t > 0)$, $C(0, f(t))$, $O(0, 0)$, B 为 l 与 y 轴的交点, $S_{\triangle ACO}$ 与 $S_{\triangle ABO}$ 分别表示 $\triangle ACO$ 与 $\triangle ABO$ 的面积. 是否存在点 A 使得 $2S_{\triangle ACO} = 15S_{\triangle ABO}$ 成立? 若存在, 这样的点 A 有几个?

(参考数据: $1.09 < \ln 3 < 1.10$, $1.60 < \ln 5 < 1.61$, $1.94 < \ln 7 < 1.95$)

21. 已知集合 $M = \{(i, j, k, w) | i \in \{1, 2\}, j \in \{3, 4\}, k \in \{5, 6\}, w \in \{7, 8\}, \text{且 } i + j + k + w \text{ 为偶数}\}$. 给定数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_8$,

和序列 $\Omega: T_1, T_2, \dots, T_s$, 其中 $T_t = (i_t, j_t, k_t, w_t) \in M (t = 1, 2, \dots, s)$, 对数列 A 进行如下变换: 将 A 的第 i_t, j_t, k_t, w_t 项均加 1,

其余项不变，得到的数列记作 $T_1(A)$ ；将 $T_1(A)$ 的第 i_2, j_2, k_2, w_2 项均加 1，其余项不变，得到数列记作 $T_2T_1(A)$ ；……；

以此类推，得到 $T_s \cdots T_2T_1(A)$ ，简记为 $\Omega(A)$ 。

(1) 给定数列 $A: 1, 3, 2, 4, 6, 3, 1, 9$ 和序列 $\Omega: (1, 3, 5, 7), (2, 4, 6, 8), (1, 3, 5, 7)$ ，写出 $\Omega(A)$ ；

(2) 是否存在序列 Ω ，使得 $\Omega(A)$ 为 $a_1 + 2, a_2 + 6, a_3 + 4, a_4 + 2, a_5 + 8, a_6 + 2, a_7 + 4, a_8 + 4$ ，若存在，写出一个符合条件的 Ω ；若不存在，请说明理由；

(3) 若数列 A 的各项均为正整数，且 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 为偶数，求证：“存在序列 Ω ，使得 $\Omega(A)$ 的各项都相等”的充要条件为“ $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = a_7 + a_8$ ”。

2024 年北京高考数学

一、单选题

1. 已知集合 $M = \{x | -3 < x < 1\}$, $N = \{x | -1 \leq x < 4\}$, 则 $M \cup N =$ ()

- A. $\{x | -1 \leq x < 1\}$ B. $\{x | x > -3\}$
C. $\{x | -3 < x < 4\}$ D. $\{x | x < 4\}$

【答案】C

【详解】根据题意得 $M \cup N = \{x | -3 < x < 4\}$.

故选 C.

2. 已知 $\frac{z}{i} = -1 - i$, 则 $z =$ ().

- A. $-1 - i$ B. $-1 + i$ C. $1 - i$ D. $1 + i$

【答案】C

【详解】根据题意得 $z = i(-1 - i) = 1 - i$.

故选 C.

3. 圆 $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$ 的圆心到直线 $x - y + 2 = 0$ 的距离为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. 3 D. $3\sqrt{2}$

【答案】D

【详解】根据题意得 $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$, 即 $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 10$,

则其圆心坐标为 $(1, -3)$, 则圆心到直线 $x - y + 2 = 0$ 的距离为 $\frac{|1 - (-3) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 3\sqrt{2}$.

故选 D.

4. 在 $(x - \sqrt{x})^4$ 的展开式中, x^3 的系数为 ()

- A. 6 B. -6 C. 12 D. -12

【答案】A

【分析】写出二项展开式, 令 $4 - \frac{r}{2} = 3$, 解出 r 然后代入二项展开式系数即可得解.

【详解】 $(x - \sqrt{x})^4$ 的二项展开式为 $T_{r+1} = C_4^r x^{4-r} (-\sqrt{x})^r = C_4^r (-1)^r x^{4-\frac{r}{2}}, (r = 0, 1, 2, 3, 4)$,

令 $4 - \frac{r}{2} = 3$, 解得 $r = 2$, 即 $C_4^2 (-1)^2 = 6$.

故选 A.

5. 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 是向量, 则“ $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$ ”是“ $\vec{a} = -\vec{b}$ 或 $\vec{a} = \vec{b}$ ”的 ().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【详解】因为 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0$ ，可得 $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$ ，即 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，

可知 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ 等价于 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，

若 $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\vec{a} = -\vec{b}$ ，可得 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，即 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ ，可知必要性成立；

若 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ ，即 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，无法得出 $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\vec{a} = -\vec{b}$ ，

例如 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1)$ ，满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，但 $\vec{a} \neq \vec{b}$ 且 $\vec{a} \neq -\vec{b}$ ，可知充分性不成立；

“ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ ”是“ $\vec{a} \neq \vec{b}$ 且 $\vec{a} \neq -\vec{b}$ ”的必要不充分条件。

故选 B.

6. 设函数 $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$. 已知 $f(x_1) = -1$, $f(x_2) = 1$ ，且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$ ，则 $\omega =$ ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【详解】根据题意可知： x_1 为 $f(x)$ 的最小值点， x_2 为 $f(x)$ 的最大值点，

则 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$ ，即 $T = \pi$ ，且 $\omega > 0$ ，所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ 。

故选 B.

7. 生物丰富度指数 $d = \frac{S-1}{\ln N}$ 是河流水质的一个评价指标，其中 S, N 分别表示河流中的生物种类数与生物个体总数。

生物丰富度指数 d 越大，水质越好。如果某河流治理前后的生物种类数 S 没有变化，生物个体总数由 N_1 变为 N_2 ，

生物丰富度指数由 2.1 提高到 3.15，则 ()

A. $3N_2 = 2N_1$

B. $2N_2 = 3N_1$

C. $N_2^2 = N_1^3$

D. $N_2^3 = N_1^2$

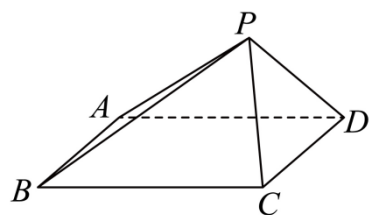
【答案】D

【分析】根据题意分析可得 $\frac{S-1}{\ln N_1} = 2.1$, $\frac{S-1}{\ln N_2} = 3.15$ ，消去 S 即可求解。

【详解】根据题意得 $\frac{S-1}{\ln N_1} = 2.1$, $\frac{S-1}{\ln N_2} = 3.15$ ，则 $2.1 \ln N_1 = 3.15 \ln N_2$ ，即 $2 \ln N_1 = 3 \ln N_2$ ，所以 $N_2^3 = N_1^2$ 。

故选 D.

8. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形， $PA = PB = 4$ ， $PC = PD = 2\sqrt{2}$ ，该棱锥的高为 ()。



A. 1

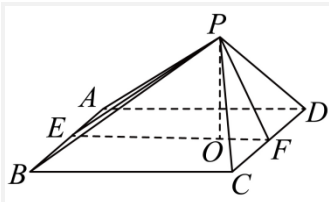
B. 2

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】D

【详解】底面 $ABCD$ 为正方形，当相邻的棱长相等时，不妨设 $PA = PB = AB = 4$, $PC = PD = 2\sqrt{2}$ ，



分别取 AB, CD 的中点 E, F ，连接 PE, PF, EF ，
 则 $PE \perp AB, EF \perp AB$ ，且 $PE \cap EF = E$ ， $PE, EF \subset$ 平面 PEF ，
 可知 $AB \perp$ 平面 PEF ，且 $AB \subset$ 平面 $ABCD$ ，
 所以平面 $PEF \perp$ 平面 $ABCD$ ，
 过 P 作 EF 的垂线，垂足为 O ，即 $PO \perp EF$ ，
 由平面 $PEF \cap$ 平面 $ABCD = EF$ ， $PO \subset$ 平面 PEF ，
 所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$ ，

根据题意可得： $PE = 2\sqrt{3}, PF = 2, EF = 4$ ，则 $PE^2 + PF^2 = EF^2$ ，即 $PE \perp PF$ ，

则 $\frac{1}{2}PE \cdot PF = \frac{1}{2}PO \cdot EF$ ，可得 $PO = \frac{PE \cdot PF}{EF} = \sqrt{3}$ ，

所以四棱锥的高为 $\sqrt{3}$ 。

当相对的棱长相等时，不妨设 $PA = PC = 4$ ， $PB = PD = 2\sqrt{2}$ ，

因为 $BD = 4\sqrt{2} = PB + PD$ ，此时不能形成三角形 PBD ，这样情况不存在。

故选 D。

9. 已知 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) 是函数 $y = 2^x$ 的图象上两个不同的点，则 ()

A. $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$

B. $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} > \frac{x_1 + x_2}{2}$

C. $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} < x_1 + x_2$

D. $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} > x_1 + x_2$

【答案】B

【详解】根据题意不妨设 $x_1 < x_2$ ，因为函数 $y = 2^x$ 是增函数，所以 $0 < 2^{x_1} < 2^{x_2}$ ，即 $0 < y_1 < y_2$ ，

AB. 可得 $\frac{2^{x_1} + 2^{x_2}}{2} > \sqrt{2^{x_1} 2^{x_2}} = 2^{\frac{x_1 + x_2}{2}}$ ，即 $\frac{y_1 + y_2}{2} > 2^{\frac{x_1 + x_2}{2}} > 0$ ，

根据函数 $y = \log_2 x$ 是增函数，所以 $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} > \log_2 2^{\frac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ，A 正确，B 错误；

C. 例如 $x_1 = 0, x_2 = 1$ ，则 $y_1 = 1, y_2 = 2$ ，可得 $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} = \log_2 \frac{3}{2} \in (0, 1)$ ，即 $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} < 1 = x_1 + x_2$ ，C 错误；

D. 例如 $x_1 = -1, x_2 = -2$ ，则 $y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{4}$ ，可得 $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} = \log_2 \frac{3}{8} = \log_2 3 - 3 \in (-2, -1)$ ，即 $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} > -3 = x_1 + x_2$ ，

D 错误，

故选 B。

10. 已知 $M = \{(x, y) | y = x + t(x^2 - x), 1 \leq x \leq 2, 0 \leq t \leq 1\}$ 是平面直角坐标系中的点集. 设 d 是 M 中两点间距离的最大值，

S 是 M 表示的图形的面积，则 ()

A. $d = 3, S < 1$

B. $d = 3, S > 1$

C. $d = \sqrt{10}, S < 1$

D. $d = \sqrt{10}, S > 1$

【答案】C

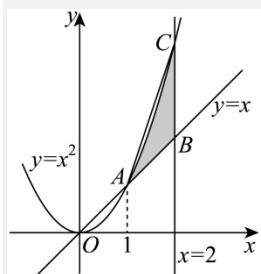
【分析】先以 t 为变量，分析可知所求集合表示的图形即为平面区域 $\begin{cases} y \leq x^2 \\ y \geq x \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ 。

【详解】对任意给定 $x \in [1, 2]$ ，则 $x^2 - x = x(x-1) \geq 0$ ，且 $t \in [0, 1]$ ，

可知 $x \leq x + t(x^2 - x) \leq x + x^2 - x = x^2$ ，即 $x \leq y \leq x^2$ ，

再结合 x 的任意性，所以所求集合表示的图形即为平面区域 $\begin{cases} y \leq x^2 \\ y \geq x \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ ，

如图阴影部分所示，其中 $A(1, 1), B(2, 2), C(2, 4)$ ，



可知任意两点间距离最大值 $d = |AC| = \sqrt{10}$ ；阴影部分面积 $S < S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$ 。

故选 C。

二、填空题

11. 抛物线 $y^2 = 16x$ 的焦点坐标为_____。

【答案】(4,0)

【分析】形如 $y^2 = 2px, (p \neq 0)$ 的抛物线的焦点坐标为 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ 。

【详解】根据题意抛物线的标准方程为 $y^2 = 16x$ ，所以其焦点坐标为(4,0)。

故答案为(4,0)。

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 Ox 为始边，它们的终边关于原点对称.若 $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ ，则 $\cos \beta$ 的最大值为_____。

【答案】 $-\frac{1}{2}$ / -0.5

【分析】首先得出 $\beta = \alpha + \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 。

【详解】根据题意 $\beta = \alpha + \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，从而 $\cos \beta = \cos(\alpha + \pi + 2k\pi) = -\cos \alpha$ ，

因为 $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ ，所以 $\cos \alpha$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ ， $\cos \beta$ 的取值范围是 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ ，

当且仅当 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, 即 $\beta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时, $\cos \beta$ 取得最大值, 且最大值为 $-\frac{1}{2}$.

答案为 $-\frac{1}{2}$.

13. 若直线 $y = k(x-3)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 只有一个公共点, 则 k 的一个取值为 _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ (或 $-\frac{1}{2}$, 答案不唯一)

【分析】联立直线方程与双曲线方程, 根据交点个数与方程根的情况列式即可求解.

【详解】联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \\ y = k(x-3) \end{cases}$, 化简并整理得: $(1-4k^2)x^2 + 24k^2x - 36k^2 - 4 = 0$,

由题意得 $1-4k^2 = 0$ 或 $\Delta = (24k^2)^2 + 4(36k^2 + 4)(1-4k^2) = 0$,

解得 $k = \pm \frac{1}{2}$ 或无解, 即 $k = \pm \frac{1}{2}$, 经检验正确.

答案为 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$.

14. 汉代刘歆设计的“铜嘉量”是龠、合、升、斗、斛五量合一的标准量器, 其中升量器、斗量器、斛量器的形状均可视为圆柱. 若升、斗、斛量器的容积成公比为 10 的等比数列, 底面直径依次为 65mm, 325mm, 325mm, 且斛量器的高为 230mm, 则斗量器的高为 _____ mm, 升量器的高为 _____ mm.

【答案】 23 57.5 / $\frac{115}{2}$

【详解】设升量器的高为 h_1 , 斗量器的高为 h_2 (单位都是 mm), 则 $\frac{\pi \left(\frac{325}{2}\right)^2 h_2}{\pi \left(\frac{65}{2}\right)^2 h_1} = \frac{\pi \left(\frac{325}{2}\right)^2 \times 230}{\pi \left(\frac{325}{2}\right)^2 h_2} = 10$,

$h_2 = 23\text{mm}$, $h_1 = \frac{115}{2}\text{mm}$.

答案为 $23\text{mm}, \frac{115}{2}\text{mm}$.

15. 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是两个不同的无穷数列, 且都不是常数列. 记集合 $M = \{k \mid a_k = b_k, k \in \mathbb{N}^*\}$, 给出下列 4 个结论:

①若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为等差数列, 则 M 中最多有 1 个元素;

②若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为等比数列, 则 M 中最多有 2 个元素;

③若 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, 则 M 中最多有 3 个元素;

④若 $\{a_n\}$ 为递增数列, $\{b_n\}$ 为递减数列, 则 M 中最多有 1 个元素.

其中正确结论的序号是 _____.

【答案】 ①③④

【详解】①, 因为 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均为等差数列, 故它们的散点图分布在直线上,

而两条直线至多有一个公共点, 故 M 中至多一个元素, ①正确.

②, 取 $a_n = 2^{n-1}, b_n = -(-2)^{n-1}$, 则 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均为等比数列, 但当 n 为偶数时, 有 $a_n = 2^{n-1} = b_n = -(-2)^{n-1}$, 此时 M 中有

无穷多个元素，②错误.

③，设 $b_n = Aq^n$ ($Aq \neq 0, q \neq \pm 1$), $a_n = kn + b$ ($k \neq 0$), 若 M 中至少四个元素，则关于 n 的方程 $Aq^n = kn + b$ 至少有 4 个不同的正数解，若 $q > 0, q \neq 1$ ，则由 $y = Aq^n$ 和 $y = kn + b$ 的散点图可得关于 n 的方程 $Aq^n = kn + b$ 至多有两个不同的解，矛盾；若 $q < 0, q \neq \pm 1$ ，考虑关于 n 的方程 $Aq^n = kn + b$ 奇数解的个数和偶数解的个数，当 $Aq^n = kn + b$ 有偶数解，此方程即为 $A|q|^n = kn + b$ ，方程至多有两个偶数解，且有两个偶数解时 $Ak \ln|q| > 0$ ，

否则 $Ak \ln|q| < 0$ ，因 $y = A|q|^n, y = kn + b$ 单调性相反，

方程 $A|q|^n = kn + b$ 至多一个偶数解，

当 $Aq^n = kn + b$ 有奇数解，此方程即为 $-A|q|^n = kn + b$ ，

方程至多有两个奇数解，且有两个奇数解时 $-Ak \ln|q| > 0$ 即 $Ak \ln|q| < 0$

否则 $Ak \ln|q| > 0$ ，因 $y = -A|q|^n, y = kn + b$ 单调性相反，

方程 $A|q|^n = kn + b$ 至多一个奇数解，

因为 $Ak \ln|q| > 0, Ak \ln|q| < 0$ 不可能同时成立，因此 $Aq^n = kn + b$ 不可能有 4 个不同的整数解，即 M 中最多有 3 个元素，③正确.

④因为 $\{a_n\}$ 为递增数列， $\{b_n\}$ 为递减数列，前者散点图呈上升趋势，后者的散点图呈下降趋势，两者至多一个交点，

④正确.

答案为①③④.

三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ， $\angle A$ 为钝角， $a = 7$ ， $\sin 2B = \frac{\sqrt{3}}{7} b \cos B$.

(1) 求 $\angle A$ ；

(2) 从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得 $\triangle ABC$ 存在，求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①： $b = 7$ ；条件②： $\cos B = \frac{13}{14}$ ；条件③： $c \sin A = \frac{5}{2} \sqrt{3}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

【答案】(1) $A = \frac{2\pi}{3}$ ；

(2) 选择①无解；选择②和③ $\triangle ABC$ 面积均为 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

【分析】选择①，利用正弦定理得 $B = \frac{\pi}{3}$ ，结合（1）问答案即可排除；选择②，首先求出 $\sin B = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ ，再代入式子得 $b = 3$ ，再利用两角和的正弦公式即可求出 $\sin C$ ，最后利用三角形面积公式即可；选择③，首先得到 $c = 5$ ，再利用正弦定理得到 $\sin C = \frac{5\sqrt{3}}{14}$ ，再利用两角和的正弦公式即可求出 $\sin B$ ，最后利用三角形面积公式即可；

【详解】(1) 根据题意得 $2 \sin B \cos B = \frac{\sqrt{3}}{7} b \cos B$ ，因为 A 为钝角，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/835142311142011310>