

甘肃省庄浪县第四中学 2024-2025 学年高三数学试题开学统练试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 $z = \frac{5}{2-i}$ (i 为虚数单位)，则 $\bar{z} =$ ()

- A. $2+i$ B. $2-i$ C. $1+2i$ D. $1-2i$

2. 设 $x \in \mathbf{R}$ ，则“ $x^3 < 27$ ”是“ $|x| < 3$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知复数 z 满足： $(1+i)(z-1) = 1-i$ ，则 z 的共轭复数为 ()

- A. $1-2i$ B. $1+i$ C. $-1+i$ D. $1+2i$

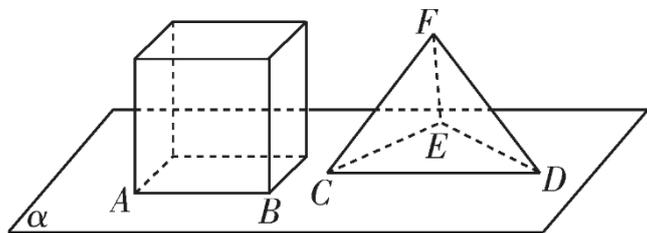
4. 3 本不同的语文书，2 本不同的数学书，从中任意取出 2 本，取出的书恰好都是数学书的概率是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{10}$

5. 已知 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2}$ ， $b = 0.2^{\frac{1}{2}}$ ， $c = \log_{\frac{1}{3}} 2$ ，则 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $b > c > a$ D. $a > c > b$

6. 如图，正方体的底面与正四面体的底面在同一平面 α 上，且 $AB \parallel CD$ ，若正方体的六个面所在的平面与直线 CE ， EF 相交的平面个数分别记为 m ， n ，则下列结论正确的是 ()



- A. $m = n$ B. $m = n + 2$ C. $m < n$ D. $m + n < 8$

7. 已知函数 $f(x) = x - [x]$ ，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大正整数，则下列结论正确的是 ()

- A. $f(x)$ 的值域是 $[0, 1]$ B. $f(x)$ 是奇函数
C. $f(x)$ 是周期函数 D. $f(x)$ 是增函数

8. 设 \vec{a}, \vec{b} 为非零向量，则“ $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ”是“ \vec{a} 与 \vec{b} 共线”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

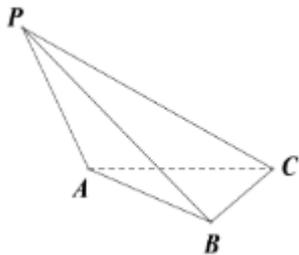
9. 若函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 图象的一个对称中心为 $(\frac{\pi}{3}, 0)$, 其相邻一条对称轴方程为 $x = \frac{7\pi}{12}$, 该对称轴处所对应的函数值为 -1 , 为了得到 $g(x) = \cos 2x$ 的图象, 则只要将 $f(x)$ 的图象()

- A. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 B. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 D. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

10. 将 3 个黑球 3 个白球和 1 个红球排成一排, 各小球除了颜色以外其他属性均相同, 则相同颜色的小球不相邻的排法共有 ()

- A. 14 种 B. 15 种 C. 16 种 D. 18 种

11. 如图示, 三棱锥 $P-ABC$ 的底面 ABC 是等腰直角三角形, $\angle ACB = 90^\circ$, 且 $PA = PB = AB = \sqrt{2}$, $PC = \sqrt{3}$, 则 PC 与面 PAB 所成角的正弦值等于 ()



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

12. 已知抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点为 F , 过点 F 的直线 l 交抛物线 C 于 A, B 两点, 其中点 A 在第一象限, 若弦 AB 的长为 $\frac{25}{4}$, 则 $\frac{|AF|}{|BF|} = ()$

- A. 2 或 $\frac{1}{2}$ B. 3 或 $\frac{1}{3}$ C. 4 或 $\frac{1}{4}$ D. 5 或 $\frac{1}{5}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

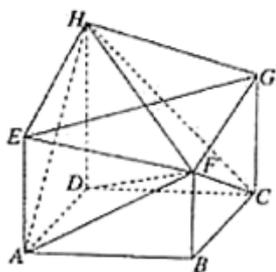
13. 已知 $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, \vec{a} 在 \vec{b} 方向上的投影为 $\sqrt{6}$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为_____.

14. 在 $(1+x)^6(1+y)^4$ 的展开式中, x^2y^3 的系数为_____.

15. 如图, 已知 $AC = BC = 4$, $\angle ACB = 90^\circ$, M 为 BC 的中点, D 为以 AC 为直径的圆上一动点, 则 $\vec{AM} \cdot \vec{DC}$ 的最小值是_____.

(2) 求二面角 $B-MG-N$ 的余弦值.

20. (12分) 底面 $ABCD$ 为菱形的直四棱柱, 被一平面截取后得到如图所示的几何体. 若 $DA = DH = DB = 4$, $AE = CG = 3$.



(1) 求证: $EG \perp DF$;

(2) 求二面角 $A-HF-C$ 的正弦值.

21. (12分) 4月23日是“世界读书日”, 某中学开展了一系列的读书教育活动. 学校为了解高三学生课外阅读情况, 采用分层抽样的方法从高三某班甲、乙、丙、丁四个读书小组 (每名学生只能参加一个读书小组) 学生抽取 12 名学生参加问卷调查. 各组人数统计如下:

小组	甲	乙	丙	丁
人数	12	9	6	9

(1) 从参加问卷调查的 12 名学生中随机抽取 2 人, 求这 2 人来自同一个小组的概率;

(2) 从已抽取的甲、丙两个小组的学生中随机抽取 2 人, 用 X 表示抽得甲组学生的人数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

22. (10分) 已知函数 $f(x) = (2-x)e^x + ax$.

(I) 已知 $x=2$ 是 $f(x)$ 的一个极值点, 求曲线 $f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程

(II) 讨论关于 x 的方程 $f(x) = a \ln x (a \in R)$ 根的个数.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. B

【解析】

根据复数的除法法则计算 z ，由共轭复数的概念写出 \bar{z} 。

【详解】

$$Q z = \frac{5}{2-i} = \frac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{10+5i}{5} = 2+i,$$

$$\therefore \bar{z} = 2-i,$$

故选：B

本题主要考查了复数的除法计算，共轭复数的概念，属于容易题。

2. B

【解析】

先解不等式化简两个条件，利用集合法判断充分必要条件即可

【详解】

解不等式 $x^3 < 27$ 可得 $x < 3$ ，

解绝对值不等式 $|x| < 3$ 可得 $-3 < x < 3$ ，

由于 $\{x | -3 < x < 3\}$ 为 $\{x | x < 3\}$ 的子集，

据此可知“ $x^3 < 27$ ”是“ $|x| < 3$ ”的必要不充分条件。

故选：B

本题考查了必要不充分条件的判定，考查了学生数学运算，逻辑推理能力，属于基础题。

3. B

【解析】

转化 $(1+i)(z-1)=1-i$ ，为 $z-1=\frac{1-i}{1+i}$ ，利用复数的除法化简，即得解

【详解】

复数 z 满足： $(1+i)(z-1)=1-i$

$$\text{所以 } z-1 = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i$$

$$\Rightarrow z = 1 - i$$

$$\therefore \bar{z} = 1 + i$$

故选：B

本题考查了复数的除法和复数的基本概念，考查了学生概念理解，数学运算的能力，属于基础题.

4. D

【解析】

把5本书编号，然后用列举法列出所有基本事件. 计数后可求得概率.

【详解】

3本不同的语文书编号为 A, B, C ，2本不同的数学书编号为 a, b ，从中任意取出2本，所有的可能为：

$AB, AC, Aa, Ab, BC, Ba, Bb, Ca, Cb, ab$ 共10个，恰好都是数学书的只有 ab 一种， \therefore 所求概率为 $P = \frac{1}{10}$.

故选：D.

本题考查古典概型，解题方法是列举法，用列举法写出所有的基本事件，然后计数计算概率.

5. B

【解析】

利用指数函数和对数函数的单调性，将数据和0,1做对比，即可判断.

【详解】

$$\text{由于 } 0 < \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2} < \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1,$$

$$0.2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{5}}} = \sqrt{5},$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 2 < \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$$

故 $b > a > c$.

故选：B.

本题考查利用指数函数和对数函数的单调性比较大小，属基础题.

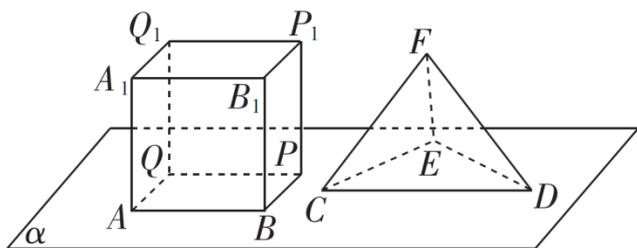
6. A

【解析】

根据题意，画出几何位置图形，由图形的位置关系分别求得 m, n 的值，即可比较各选项.

【详解】

如下图所示， $CE \subset$ 平面 $ABPQ$ ，从而 $CE //$ 平面 $A_1B_1P_1Q_1$ ，



易知 CE 与正方体的其余四个面所在平面均相交，

$\therefore m = 4$ ，

$\because EF //$ 平面 BPP_1B_1 ， $EF //$ 平面 AQQ_1A_1 ，且 EF 与正方体的其余四个面所在平面均相交，

$\therefore n = 4$ ，

\therefore 结合四个选项可知，只有 $m = n$ 正确。

故选：A.

本题考查了空间几何体中直线与平面位置关系的判断与综合应用，对空间想象能力要求较高，属于中档题.

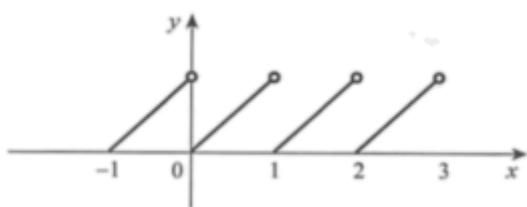
7. C

【解析】

根据 $[x]$ 表示不超过 x 的最大正整数，可构建函数图象，即可分别判断值域、奇偶性、周期性、单调性，进而下结论.

【详解】

由 $[x]$ 表示不超过 x 的最大正整数，其函数图象为



选项 A，函数 $f(x) \in [0, 1)$ ，故错误；

选项 B，函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数，故错误；

选项 C，函数 $f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数，故正确；

选项 D，函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1), [1, 2), [2, 3)$ 上是增函数，但在整个定义域范围上不具备单调性，故错误.

故选：C

本题考查对题于 $[x]$ 的理解，属于函数新定义问题，可作出图象分析性质，属于较难题.

8. A

【解析】

根据向量共线的性质依次判断充分性和必要性得到答案.

【详解】

若 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 共线, 且方向相同, 充分性;

当 \vec{a} 与 \vec{b} 共线, 方向相反时, $|\vec{a} + \vec{b}| \neq |\vec{a}| + |\vec{b}|$, 故不必要.

故选: A.

本题考查了向量共线, 充分不必要条件, 意在考查学生的推断能力.

9. B

【解析】

由函数的图象的顶点坐标求出 A , 由周期求出 ω , 由五点法作图求出 φ 的值, 可得 $f(x)$ 的解析式, 再根据函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律, 诱导公式, 得出结论.

【详解】

根据已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$

(其中 $A > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象过点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$, $(\frac{7\pi}{12}, -1)$,

可得 $A = 1$, $\frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}$,

解得: $\omega = 2$.

再根据五点法作图可得 $2 \cdot \frac{\pi}{3} + \varphi = \pi$,

可得: $\varphi = \frac{\pi}{3}$,

可得函数解析式为: $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

故把 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度,

可得 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x$ 的图象,

故选 B.

本题主要考查由函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象求解析式, 由函数的图象的顶点坐标求出 A , 由周期求出 ω

，由五点法作图求出 φ 的值，函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律，诱导公式的应用，属于中档题.

10. D

【解析】

采取分类计数和分步计数相结合的方法，分两种情况具体讨论，一种是黑白依次相间，一种是开始仅有两个相同颜色的排在一起

【详解】

首先将黑球和白球排列好，再插入红球.

情况 1：黑球和白球按照黑白相间排列（“黑白黑白黑白”或“白黑白黑白黑”），此时将红球插入 6 个球组成的 7 个空中即可，因此共有 $2 \times 7 = 14$ 种；

情况 2：黑球或白球中仅有两个相同颜色的排在一起（“黑白白黑白黑”、“黑白黑白白黑”、“白黑黑白黑白”“白黑白黑黑白”），此时红球只能插入两个相同颜色的球之中，共 4 种.

综上所述，共有 $14 + 4 = 18$ 种.

故选：D

本题考查排列组合公式的具体应用，插空法的应用，属于基础题

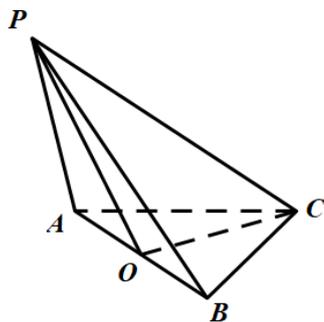
11. A

【解析】

首先找出 PC 与面 PAB 所成角，根据所成角所在三角形利用余弦定理求出所成角的余弦值，再根据同角三角函数关系求出所成角的正弦值.

【详解】

由题知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形且 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\triangle ABP$ 是等边三角形，



设 AB 中点为 O ，连接 PO ， CO ，可知 $PO = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ， $CO = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

同时易知 $AB \perp PO$ ， $AB \perp CO$ ，

所以 $AB \perp$ 面 POC ，故 $\angle POC$ 即为 PC 与面 PAB 所成角，

$$\text{有 } \cos \angle POC = \frac{PO^2 + CO^2 - PC^2}{2PO \cdot CO} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{故 } \sin \angle POC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle POC} = \frac{1}{3}.$$

故选: A.

本题主要考查了空间几何中线面夹角的计算, 属于基础题.

12. C

【解析】

先根据弦长求出直线的斜率, 再利用抛物线定义可求出 $|AF|, |BF|$.

【详解】

$$\text{设直线的倾斜角为 } \theta, \text{ 则 } |AB| = \frac{2p}{\cos^2 \theta} = \frac{4}{\cos^2 \theta} = \frac{25}{4},$$

$$\text{所以 } \cos^2 \theta = \frac{16}{25}, \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 = \frac{9}{16}, \text{ 即 } \tan \theta = \pm \frac{3}{4},$$

所以直线 l 的方程为 $y = \pm \frac{3}{4}x + 1$. 当直线 l 的方程为 $y = \frac{3}{4}x + 1$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x^2 = 4y \\ y = \frac{3}{4}x + 1 \end{cases}, \text{ 解得 } x_1 = -1 \text{ 和 } x_2 = 4, \text{ 所以 } \frac{|AF|}{|BF|} = \left| \frac{4-0}{0-(-1)} \right| = 4;$$

同理, 当直线 l 的方程为 $y = -\frac{3}{4}x + 1$. $\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{1}{4}$, 综上, $\frac{|AF|}{|BF|} = 4$ 或 $\frac{1}{4}$. 选 C.

本题主要考查直线和抛物线的位置关系, 弦长问题一般是利用弦长公式来处理. 出现了到焦点的距离时, 一般考虑抛物线的定义.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $\frac{\pi}{6}$

【解析】

由向量投影的定义可求得两向量夹角的余弦值, 从而得角的大小.

【详解】

$$a \text{ 在 } b \text{ 方向上的投影为 } |a| \cos \langle a, b \rangle = \sqrt{6}, \therefore \cos \langle a, b \rangle = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 即夹角为 } \frac{\pi}{6}.$$

故答案为: $\frac{\pi}{6}$.

本题考查求向量的夹角, 掌握向量投影的定义是解题关键.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/835220223022011314>