

2023-2024 年回龙观育新学校高二上数学月考试卷

一、选择题（每题 5 分）

1. 已知 $A(1,1,1)$, $B(-3,1,5)$, 则 $|\vec{AB}|$ 的值为 ()

A. 4

B. $4\sqrt{2}$

C. 5

D. $5\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】

先求得 $\vec{AB} = (-4, 0, 4)$, 再利用空间向量模的公式计算.

【详解】 $\because A(1,1,1)$, $B(-3,1,5)$, $\therefore \vec{AB} = (-4, 0, 4)$, $\therefore |\vec{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$,

故选: B.

【点睛】本题考查空间向量的坐标运算和向量的模的计算, 属基础题.

可以熟记 $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$, 直接计算.

2. 已知向量 $\vec{a} = (-1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, -2, x)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 x 等于 ()

A. -6

B. -3

C. 3

D. 6

【答案】B

【解析】

【分析】由 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 列方程求解即可.

【详解】因为向量 $\vec{a} = (-1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, -2, x)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$,

所以 $\frac{1}{-1} = \frac{-2}{2} = \frac{x}{3}$, 得 $x = -3$,

故选: B.

3. 若向量 $\vec{AB} = (0, 2, 1)$, $\vec{AC} = (-1, 1, -2)$, 则平面 ABC 的一个法向量可以是 ()

A. $(3, -1, -2)$

B. $(-4, 2, 2)$

C. $(5, 1, -2)$

D. $(5, -2, 1)$

【答案】C

【解析】

【分析】设平面 ABC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 根据向量垂直的坐标表示求解可得答案.

【详解】解: 设平面 ABC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 因为向量 $\vec{AB} = (0, 2, 1)$, $\vec{AC} = (-1, 1, -2)$,

所以 $\begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{n} = 2y+z=0 \\ \vec{AC} \cdot \vec{n} = -x+y-2z=0 \end{cases}$, 取 $y=1$, 得 $\vec{n}=(5,1,-2)$,

故选: C.

4. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长等于 a , 则 $\vec{AC_1} \cdot \vec{BC_1}$ 的值为 ()

A. a^2

B. $2a^2$

C. $3a^2$

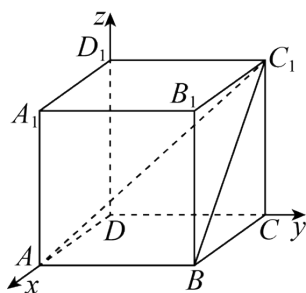
D. $\sqrt{6} a^2$

【答案】B

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系, 利用向量的坐标表示、数量积的坐标表示计算判断作答.

【详解】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 建立空间直角坐标系, 如图所示,



则 $A(a, 0, 0)$, $B(a, a, 0)$, $C_1(0, a, a)$, $\vec{AC_1}=(-a, a, a)$, $\vec{BC_1}=(-a, 0, a)$,

所以 $\vec{AC_1} \cdot \vec{BC_1} = a^2 + 0 + a^2 = 2a^2$.

故选: B

5. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是 C_1D_1 的中点, 则异面直线 DE 与 AC 所成角的余弦值为 ()

A. $\frac{1}{20}$

B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

C. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

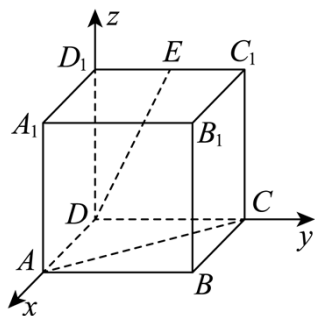
D. $-\frac{1}{20}$

【答案】B

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系, 利用直线的方向向量求异面直线 DE 与 AC 所成的角的余弦值.

【详解】设正方体棱长为 1, 以 D 为原点建立空间直角坐标系如图所示,



则 $D(0,0,0)$, $E(0, \frac{1}{2}, 1)$, $A(1,0,0)$, $C(0,1,0)$,

所以 $\vec{DE} = (0, \frac{1}{2}, 1)$, $\vec{AC} = (-1, 1, 0)$,

$$\text{则 } \cos \langle \vec{DE}, \vec{AC} \rangle = \frac{\vec{DE} \cdot \vec{AC}}{|\vec{DE}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

则异面直线 DE 与 AC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

故选: B.

【点睛】本题考查关键是建立适当的空间直角坐标系, 利用空间向量计算求解, 属基础题.

6. 设 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 是空间向量, 则以下说法中错误的是 ()

A. $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 一定共面

B. $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 一定不共面

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

D. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用共面向量的定义可判断 AB 选项; 利用空间向量数量积的运算性质可判断 CD 选项.

【详解】对于 A 选项, 任意两个空间向量都共面, A 对;

对于 B 选项, $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 可能共面, 也可能不共面, B 错;

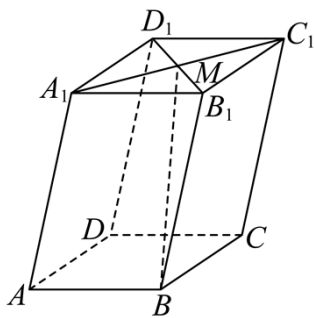
对于 C 选项, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, C 对;

对于 D 选项, $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, D 对.

故选: B.

7. 如图, 在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M 是 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点, 若 $\vec{AA_1} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AD} = \vec{c}$,

且 $\vec{BM} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, 则 $x + y + z =$ ()



- A. 1 B. $-\frac{1}{2}$ C. 0 D. -1

【答案】A

【解析】

【分析】根据给定的几何体，结合空间向量运算用 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 表示 $\vec{BM}$ ，再利用空间向量基本定义即可求解.

【详解】在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， M 是 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点，

$$\vec{BM} = \vec{BB_1} + \vec{B_1M} = \vec{AA_1} + \frac{1}{2}(\vec{B_1A_1} + \vec{B_1C_1}) = \vec{AA_1} - \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c},$$

$$\text{又 } \vec{BM} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}, \text{ 由空间向量基本定理, 知 } x=1, y=-\frac{1}{2}, z=\frac{1}{2},$$

所以 $x+y+z=1$.

故选: A

8. 设空间两个不同的单位向量 $\vec{a} = (m, n, 0)$ 、 $\vec{b} = (p, q, 0)$ 与向量 $(1, 1, 1)$ 的夹角都是 45° ，则 $\frac{m+n}{p+q}$ 的值为

()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. -1 D. 1

【答案】D

【解析】

【分析】根据单位向量的模为 1，结合向量的夹角公式，列式化简求值，即可得答案.

【详解】由题意可知 $\vec{a} = (m, n, 0)$ 、 $\vec{b} = (p, q, 0)$ 为单位向量，设 $\vec{c} = (1, 1, 1)$

$$\text{故 } \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{p^2 + q^2} = 1, |\vec{c}| = \sqrt{3},$$

又它们与向量 $\vec{c} = (1, 1, 1)$ 的夹角都是 45° ,

$$\text{故 } \cos\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \cos\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{即 } \frac{m+n}{\sqrt{m^2+n^2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{p+q}{\sqrt{p^2+q^2} \cdot \sqrt{3}}, \therefore \frac{m+n}{p+q} = 1,$$

故选：D

9. 已知 $A(4,1,3)$ 、 $B(2,-5,1)$ ， C 为线段 AB 反向延长线上一点，且 $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{3}$ ，则点 C 的坐标是 ()

A. $\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

B. $\left(\frac{8}{3}, -3, 2\right)$

C. $\left(\frac{14}{3}, 3, \frac{11}{3}\right)$

D. $\left(\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据向量共线，确定向量之间的倍数关系，结合向量的坐标运算即可求得答案.

【详解】由题意知 $\vec{AC} = -\frac{1}{3}\vec{AB}$ ，设点 $C(x, y, z)$ ，

$$\text{故 } (x-4, y-1, z-3) = -\frac{1}{3}(2-4, -5-1, 1-3),$$

$$\text{即 } \begin{cases} x-4 = \frac{2}{3} \\ y-1 = 2 \\ z-3 = \frac{2}{3} \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x = \frac{14}{3} \\ y = 3 \\ z = \frac{11}{3} \end{cases},$$

$$\text{故点 } C \text{ 坐标为 } \left(\frac{14}{3}, 3, \frac{11}{3}\right),$$

故选：C

10. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 30° ，则

()

A. $AB = 2AD$

B. AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 30°

C. $AC = CB_1$

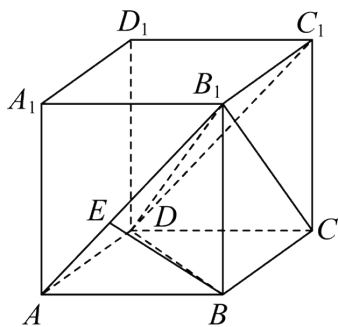
D. B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 45°

【答案】D

【解析】

【分析】根据线面角的定义以及长方体的结构特征即可求出.

【详解】如图所示：



不妨设 $AB = a, AD = b, AA_1 = c$ ，依题以及长方体的结构特征可知， B_1D 与平面 $ABCD$ 所成角为

$\angle B_1DB$ ， B_1D 与平面 AA_1B_1B 所成角为 $\angle DB_1A$ ，所以 $\sin 30^\circ = \frac{c}{B_1D} = \frac{b}{B_1D}$ ，即 $b = c$ ，

$B_1D = 2c = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ，解得 $a = \sqrt{2}c$ 。

对于 A， $AB = a$ ， $AD = b$ ， $AB = \sqrt{2}AD$ ，A 错误；

对于 B，过 B 作 $BE \perp AB_1$ 于 E ，易知 $BE \perp$ 平面 AB_1C_1D ，所以 AB 与平面 AB_1C_1D 所成角为 $\angle BAE$ ，

因为 $\tan \angle BAE = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $\angle BAE \neq 30^\circ$ ，B 错误；

对于 C， $AC = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3}c$ ， $CB_1 = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{2}c$ ， $AC \neq CB_1$ ，C 错误；

对于 D， B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成角为 $\angle DB_1C$ ， $\sin \angle DB_1C = \frac{CD}{B_1D} = \frac{a}{2c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，而

$0 < \angle DB_1C < 90^\circ$ ，所以 $\angle DB_1C = 45^\circ$ 。D 正确。

故选：D。

11. 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，底面是等腰直角三角形， $\angle ACB = 90^\circ$ ，侧棱 $AA_1 = 2$ ， D, E 分别是

CC_1 与 A_1B 的中点，点 E 在平面 ABD 上的射影是 $\triangle ABD$ 的重心 G ，则 A_1B 与平面 ABD 所成角的余弦

()

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{7}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{7}$

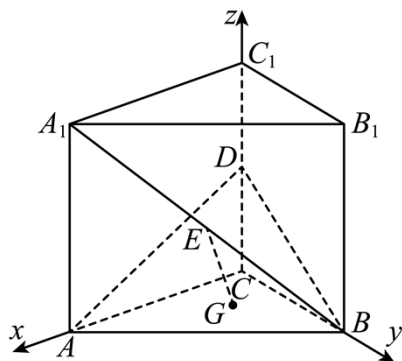
【答案】B

【解析】

【分析】以 CA, CB, CC_1 所在直线分别为 x, y, z 轴，建立空间直角坐标系，根据 $\vec{GE} \cdot \vec{BD} = 0$ 列出方程求得

a 的值, 得到向量 $\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{A_1B}$, 且 $\overrightarrow{GE}$ 是平面 ABD 的一个法向量, 设 A_1B 与平面 ABD 所成角为 θ , 再利用线面角的向量求法可得答案.

【详解】



由题意, 以 C 为坐标原点, CA, CB, CC_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系,

设 $CA = CB = a$, 则 $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $D(0, 0, 1)$, $A_1(a, 0, 2)$,

可得 $E\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 1\right)$, $G\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{GE} = \left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{BD} = (0, -a, 1)$,

因为点 E 在平面 ABD 上的射影是 $\triangle ABD$ 的重心, 所以 $GE \perp$ 平面 ABD ,

所以 $\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, 即 $\frac{a}{6} \times 0 + \frac{a}{6} \times (-a) + \frac{2}{3} \times 1 = 0$, 解得 $a = 2$,

可得 $B(0, 2, 0)$, $A_1(2, 0, 2)$, 所以 $\overrightarrow{A_1B} = (-2, 2, -2)$, $\overrightarrow{GE} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$,

因为 $GE \perp$ 平面 ABD , 所以 $\overrightarrow{GE}$ 是平面 ABD 的一个法向量,

设 A_1B 与平面 ABD 所成角为 θ ($0 \leq \theta \leq 90^\circ$),

$$\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{GE} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{GE}|}{|\overrightarrow{A_1B}| \cdot |\overrightarrow{GE}|} = \frac{\left| -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \right|}{\sqrt{4+4+4} \times \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}}} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{所以 } \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

故选: B.

12. 正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面边长为 $2\sqrt{2}$, 侧棱长为 4, E, F 分别为棱 AB, BC 的中点, 则三

棱锥 $B_1 - EFD_1$ 的体积为 ()

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

B. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{16}{3}$

D. 16

【答案】C

【解析】

【分析】连接 BD 交 EF 与点 G ，连接 B_1G, D_1G ，证明 $EF \perp$ 平面 B_1D_1G ，由条件结合锥体体积公式求解.

【详解】连接 BD 交 EF 与点 G ，连接 B_1G, D_1G ，

因为多面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正四棱柱，

所以 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ，四边形 $ABCD$ 为正方形，

由四边形 $ABCD$ 为正方形，可得 $AC \perp BD$ ，

由 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ，又 $AC \subset$ 平面 $ABCD$ ，可得 $AC \perp DD_1$ ，

因为 $BD, DD_1 \subset$ 平面 B_1D_1G ， $BD \cap DD_1 = D$ ，

所以 $AC \perp$ 平面 B_1D_1G ，

因为 E, F 分别为棱 AB, BC 的中点，

所以 $EF \parallel AC$ ，

所以 $EF \perp$ 平面 B_1D_1G ，

所以三棱锥 B_1-EFD_1 的体积

$$V_{B_1-EFD_1} = V_{E-B_1D_1G} + V_{F-B_1D_1G} = \frac{1}{3} S_{\triangle B_1D_1G} \cdot EG + \frac{1}{3} S_{\triangle B_1D_1G} \cdot FG = \frac{1}{3} S_{\triangle B_1D_1G} \cdot EF,$$

因为四边形 $ABCD$ 为正方形， $AB = 2\sqrt{2}$ ，

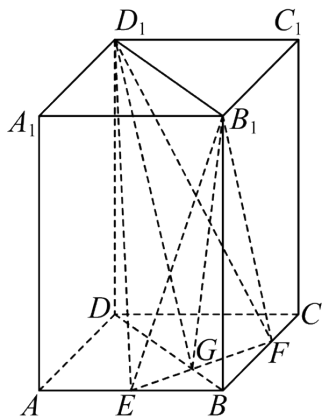
所以 $EF = \frac{1}{2} AC = 2$ ， $BD = 4$ ，

因为 $B_1D_1 = BD = 4$ ，点 G 到边 B_1D_1 的距离 $d = BB_1 = 4$ ，

所以 $S_{\triangle B_1D_1G} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$ ，

所以 $V_{B_1-EFD_1} = \frac{1}{3} \times 8 \times 2 = \frac{16}{3}$ ，

故选：C.



二、填空题（每题 5 分）

13. 已知空间 $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (-4, 2, x)$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $|\vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 根据空间向量的垂直，根据数量积的坐标表示，建立方程，结合模长公式，可得答案.

【详解】 由 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 且 $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (-4, 2, x)$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8 + 6 + x = 0$, 解得 $x = 2$,
故 $|\vec{b}| = \sqrt{16 + 4 + 4} = 2\sqrt{6}$.

故答案为: $2\sqrt{6}$.

14. 若 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB}^2 = 4$, 且 $|\vec{AP}| = 1$, 则 $|\vec{AB}| = \underline{\hspace{2cm}}$, $\vec{CP} \cdot \vec{AB}$ 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

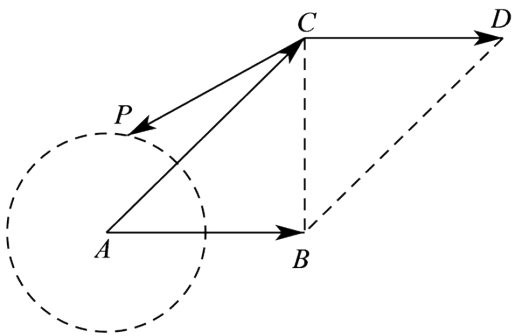
【答案】 ①. 2 ②. -2

【解析】

【分析】 由 $\vec{AB}^2 = |\vec{AB}|^2 = 4$ 即可求 $|\vec{AB}|$, 结合已知条件可得 C 在过 B 点垂直于 AB 的直线上, 而 P 在以 A 为圆心, 1 为半径的圆周上, 应用数形结合法判断 $\vec{CP} \cdot \vec{AB}$ 的最大时 P, C 的位置, 即可确定最大值.

【详解】 由 $\vec{AB}^2 = |\vec{AB}|^2 = 4$, 可得 $|\vec{AB}| = 2$,

由题设, C 在过 B 点垂直于 AB 的直线上, 而 P 在以 A 为圆心, 1 为半径的圆周上, 若 $\vec{CD} = \vec{AB}$, 如下图所示,



$\therefore \vec{CP} \cdot \vec{AB} = \vec{CP} \cdot \vec{CD}$, 要使 $\vec{CP} \cdot \vec{AB}$ 的最大, 只需 A, P, B 共线, $\vec{CP}$ 在 $\vec{CD}$ 上的投影最短,

由图知: A, P, B 共线时, $\vec{CP} \cdot \vec{AB}$ 的最大为 -2 .

故答案为: $2, -2$.

【点睛】关键点点睛: 由已知条件将向量转化为图形形式, 数形结合法分析 $\vec{CP} \cdot \vec{AB}$ 的最大时动点的位置, 即可求最大值.

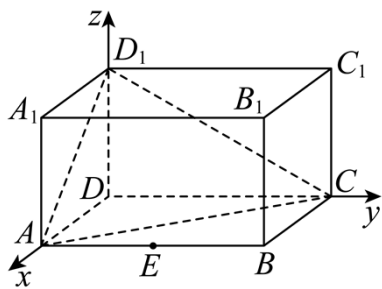
15. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD = AA_1 = 1$, $AB = 2$, 若 E 为 AB 的中点, 则点 E 到面 ACD_1 的距离是_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】以 D 为原点, DA 为 x 轴, DC 为 y 轴, DD_1 为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 利用向量法能求出点 E 到面 ACD_1 的距离.

【详解】以 D 为原点, DA 为 x 轴, DC 为 y 轴, DD_1 为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 如下图所示:



$$E(1, 1, 0), A(1, 0, 0), C(0, 2, 0), D_1(0, 0, 1),$$

$$\vec{AC} = (-1, 2, 0), \vec{AD_1} = (-1, 0, 1), \vec{AE} = (0, 1, 0),$$

设平面 ACD_1 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AC} = -x + 2y = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AD_1} = -x + z = 0 \end{cases}, \text{取 } y=1, \text{得 } \vec{n} = (2, 1, 2),$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 到面 } ACD_1 \text{ 的距离为 } d = \frac{|\vec{AE} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{1}{3}.$$

故答案为: $\frac{1}{3}$.

【点睛】本题考查点到平面距离的向量求法, 属于基础题.

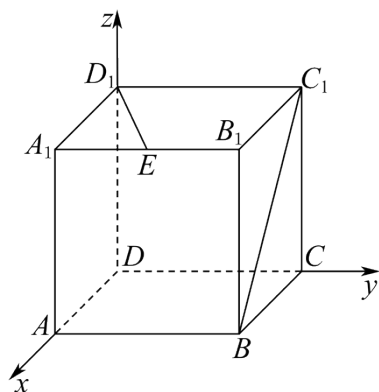
16. 在棱长是 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 A_1B_1 的中点, 则异面直线 D_1E 和 BC_1 间的距离是

【答案】 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系, 求得相关点坐标, 利用空间距离的向量求法, 即可求得答案.

【详解】以 D 为坐标原点, 以 DA, DC, DD_1 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,



$$\text{则 } D_1(0, 0, 2), E(2, 1, 2), B(2, 2, 0), C_1(0, 2, 2),$$

$$\text{则 } \vec{D_1E} = (2, 1, 0), \vec{BC_1} = (-2, 0, 2),$$

设与异面直线 D_1E 和 BC_1 都垂直的向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

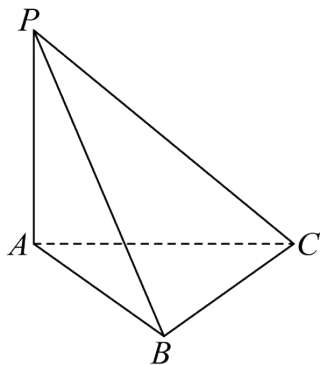
$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{D_1E} = 2x + y = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BC_1} = -2x + 2z = 0 \end{cases}, \text{令 } z=1, \text{则 } \vec{n} = (1, -2, 1),$$

$$\text{又 } \vec{BE} = (0, -1, 2), \text{故异面直线 } D_1E \text{ 和 } BC_1 \text{ 间的距离是 } d = \frac{|\vec{BE} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{故答案为: } \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

三、解答题（每题 12 分）

17. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ， $PA = AB = BC = 1$ ， $PC = \sqrt{3}$.



(1) 求证： $BC \perp$ 平面 PAB ；

(2) 求二面角 $A-PC-B$ 的大小.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{\pi}{3}$

【解析】

【分析】(1) 先由线面垂直的性质证得 $PA \perp BC$ ，再利用勾股定理证得 $BC \perp PB$ ，从而利用线面垂直的判定定理即可得证；

(2) 结合 (1) 中结论，建立空间直角坐标系，分别求得平面 PAC 与平面 PBC 的法向量，再利用空间向量夹角余弦的坐标表示即可得解.

【小问 1 详解】

因为 $PA \perp$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC ,

所以 $PA \perp BC$ ，同理 $PA \perp AB$ ，

所以 $\triangle PAB$ 为直角三角形，

又因为 $PB = \sqrt{PA^2 + AB^2} = \sqrt{2}$ ， $BC = 1$, $PC = \sqrt{3}$ ，

所以 $PB^2 + BC^2 = PC^2$ ，则 $\triangle PBC$ 为直角三角形，故 $BC \perp PB$ ，

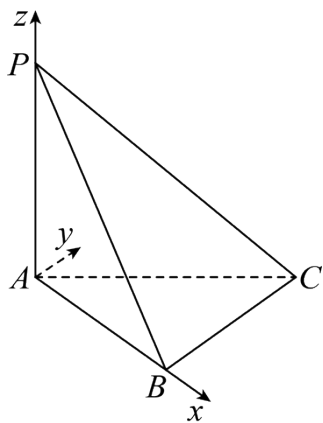
又因为 $BC \perp PA$ ， $PA \cap PB = P$ ，

所以 $BC \perp$ 平面 PAB .

【小问 2 详解】

由 (1) $BC \perp$ 平面 PAB ，又 $AB \subset$ 平面 PAB ，则 $BC \perp AB$ ，

以 A 为原点， AB 为 x 轴，过 A 且与 BC 平行的直线为 y 轴， AP 为 z 轴，建立空间直角坐标系，如图，



则 $A(0,0,0), P(0,0,1), C(1,1,0), B(1,0,0)$,

所以 $\overrightarrow{AP} = (0,0,1), \overrightarrow{AC} = (1,1,0), \overrightarrow{BC} = (0,1,0), \overrightarrow{PC} = (1,1,-1)$,

设平面 PAC 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} z_1 = 0, \\ x_1 + y_1 = 0, \end{cases}$

令 $x_1 = 1$, 则 $y_1 = -1$, 所以 $\vec{m} = (1, -1, 0)$,

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} y_2 = 0 \\ x_2 + y_2 - z_2 = 0 \end{cases}$,

令 $x_2 = 1$, 则 $z_2 = 1$, 所以 $\vec{n} = (1, 0, 1)$,

所以 $\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$,

又因为二面角 $A-PC-B$ 为锐二面角,

所以二面角 $A-PC-B$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

18. 已知棱长为 1 的正方体 AC_1 , E, F 分别是 B_1C_1 、 C_1D 的中点.

(1) 求证: E, F, D, B 共面;

(2) 求点 A_1 到平面 $BDEF$ 的距离;

(3) 求直线 A_1D 与平面 $BDEF$ 所成的角.

【答案】(1) 见解析 (2) 1

(3) $\frac{\pi}{4}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/836130201233010211>