第三章

导数及其应用

第三讲　导数的综合应用

第二课时　导数与不等式恒(能)成立

栏目导航

考点突破・互动探究

名师讲坛・素养提升

考点突破·互动探究

考点1 分离参数法

例 (2024·石家庄模拟)已知函数$f(x)=axe^x-(a+1)(2x-1)$.

(1)若$a=1$，求函数$f(x)$的图象在点$(0, f(0))$处的切线方程；

(2)当$x>0$时，函数$f(x)\geqslant 0$恒成立，求实数a的取值范围.

[分析] $a=1$时$f(x)$的解析式 $\xrightarrow{\text{数学运算}}$ 求$f'(x)$，$f'(0)$，$f(0)$ $\xrightarrow{\text{数学运算}}$ 写出切线方程 $\xrightarrow[\text{逻辑推理}]{\text{数学运算}}$ 由$f(1)\geqslant 0$得$a>0$ $\xrightarrow{\text{数学运算}}$ 分离参数构造函数$F(x)$ $\xrightarrow{\text{数学运算}}$ 求$f'(x)$，判断正负，求最值 $\xrightarrow{\text{逻辑推理}}$ 求a的取值范围

[解析]　(1)若$a=1$，则$f(x)=xe^x-2(2x-1)$.

即$f'(x)=xe^x+e^x-4$，

则$f'(0)=-3$，$f(0)=2$，

所以所求切线方程为$3x+y-2=0$.

(2)由$f(1)\geqslant 0$，得$a\geqslant\dfrac{1}{e-1}>0$，

则$f(x)\geqslant 0$对任意的$x>0$恒成立可转化为$\dfrac{a}{a+1}\geqslant\dfrac{2x-1}{xe^x}$对任意的$x>0$恒成立.

【卡壳点】不能把$\dfrac{a}{a+1}$看作整体，分离出来

设函数 $F(x)=\dfrac{2x-1}{x\mathrm{e}^{x}}(x>0)$，

则 $F'(x)=-\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x^{2}\mathrm{e}^{x}}$.

【**易错点**】导数运算

当$0<x<1$时，$F'(x)>0$；当$x>1$时，$F'(x)<0$，

所以函数$F(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，所以$F(x)_{\max}=F(1)=\frac{1}{e}$.

【卡壳点】不能确定$F(x)_{\max}=F(1)$

于是$\dfrac{a}{a+1}\geqslant\dfrac{1}{e}$，解得 $a\geqslant\dfrac{1}{e-1}$.

故实数 a 的取值范围是$\left[\dfrac{1}{e-1},\ +\infty\right)$.

名师点拨：分离参数法解决恒成立问题的策略

1．分离变量．构造函数，直接把问题转化为函数的最值问题．

2．$a\geqslant f(x)$恒成立$\Leftrightarrow a\geqslant f(x)_{\max}$；

$a\leqslant f(x)$恒成立$\Leftrightarrow a\leqslant f(x)_{\min}$.

【变式训练】

已知函数$f(x)=x^2-(a+1)\ln x$，若$f(x)\geqslant(a^2-a)\ln x$对$x\in(1,+\infty)$恒成立，求$a$的取值范围.

[解析] 由$f(x)\geqslant(a^2-a)\ln x$对$x\in(1,+\infty)$恒成立，得$a^2+1\leqslant\frac{x^2}{\ln x}$对$x\in(1,+\infty)$恒成立.

【卡壳点】分离参数，构造函数

设$h(x)=\frac{x^2}{\ln x}(x>1)$，则$h'(x)=\frac{x(2\ln x-1)}{(\ln x)^2}$.

【易错点】注意定义域要求

当 $x\in(1,\sqrt{e})$时，$h'(x)<0$；当 $x\in(\sqrt{e},+\infty)$时，$h'(x)>0$.

所以 $h(x)_{\min}=h(\sqrt{e})=2e$，

则 $a^2+1\leqslant 2e$，解得$-\sqrt{2e-1}\leqslant a\leqslant\sqrt{2e-1}$.

故 a 的取值范围是$[-\sqrt{2e-1},\sqrt{2e-1}]$.

考点2 等价转化法

例 已知函数$f(x)=e^{x-1}-ax+\ln x(a\in\mathbf{R})$，若不等式$f(x)\geqslant\ln x-a+1$对一切$x\in[1,+\infty)$恒成立，求实数$a$的取值范围.

[解析] $f(x)\geqslant\ln x-a+1$可化为$e^{x-1}-ax+a-1\geqslant0(x>0)$，

令$\varphi(x)=e^{x-1}-ax+a-1$，

则当$x\in[1,+\infty)$时，$\varphi(x)_{\min}\geqslant0$，

$\because\varphi'(x)=e^{x-1}-a$，

①当 $a\leqslant\frac{1}{e}$时，$\varphi'(x)>0$，

∴$\varphi(x)$在$[1，+\infty)$上单调递增，

∴$\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=1-a+a-1=0\geqslant 0$恒成立，

∴$a\leqslant\frac{1}{e}$符合题意.

②当 $a>\frac{1}{e}$时，令 $\varphi'(x)=0$，得 $x=\ln a+1$.

当$x\in(0，\ln a+1)$时，$\varphi'(x)<0$，

当$x\in(\ln a+1，+\infty)$时，$\varphi'(x)>0$，

∴$\varphi(x)$在$(0，\ln a+1)$上单调递减，在$(\ln a+1，+\infty)$上单调递增.

当 $\ln a+1\leqslant 1$，即$\frac{1}{e}<a\leqslant 1$ 时，$\varphi(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，

$\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=0\geqslant 0$ 恒成立，

$\therefore \frac{1}{e}<a\leqslant 1$ 符合题意.

当$\ln a+1>1$，即$a>1$时，$\varphi(x)$在$[1,\ln a+1)$上单调递减，在$(\ln a+1,+\infty)$上单调递增，

$\therefore \varphi(x)_{\min}=\varphi(\ln a+1)<\varphi(1)=0$与$\varphi(x)\geqslant 0$恒成立矛盾，

故$a>1$不符合题意.

综上，实数a的取值范围为$(-\infty,1]$.

名师点拨：“等价转化法”解决不等式恒成立问题

在不等式恒成立问题中，如果不能分离参数或分离参数后的函数的最值比较难求，可以把含参不等式整理成$f(x，a)>0$或$f(x，a)\geq 0$的形式，然后从研究函数的性质入手，通过讨论函数的单调性和极值，直接用参数表达函数的最值，然后根据题意，建立关于参数的不等式，解不等式即得参数的取值范围.

(1)如果$f(x，a)$有最小值$g(a)$，则$f(x，a)>0$恒成立$\Leftrightarrow g(a)>0$，$f(x，a)\geq 0$恒成立$\Leftrightarrow g(a)\geq 0$.

(2)如果$f(x，a)$有最大值$g(a)$，则$f(x，a)<0$恒成立$\Leftrightarrow g(a)<0$，$f(x，a)\leq 0$恒成立$\Leftrightarrow g(a)\leq 0$.

【变式训练】

设函数$f(x)=(1-x^2)e^x$，当$x\geq 0$时，$f(x)\leq ax+1$，求实数a的取值范围.

[解析]　令$g(x)=f(x)-ax-1=(1-x^2)e^x-(ax+1)$，

令$x=0$，可得$g(0)=0$.

$g'(x)=(1-x^2-2x)e^x-a$，

令$h(x)=(1-x^2-2x)e^x-a$，

则$h'(x)=-(x^2+4x+1)e^x$，

当$x\geq 0$时，$h'(x)<0$，$h(x)$在$[0，+\infty)$上单调递减，

故$h(x)\leqslant h(0)=1-a$，即$g'(x)\leqslant 1-a$，

要使$f(x)-ax-1\leqslant 0$在$x\geqslant 0$时恒成立，需要$1-a\leqslant 0$，

即$a\geqslant 1$，此时$g(x)\leqslant g(0)=0$，故$a\geqslant 1$.

综上所述，实数a的取值范围是$[1，+\infty)$.

考点3 双变量的恒(能)成立问题

转化为$g(x)_{max}-g(x)_{min}\geq M$

例 设$f(x)=\dfrac{a}{x}+x\ln x$，$g(x)=x^3-x^2-3$.

（1）如果存在x_1，$x_2\in[0，2]$使得$g(x_1)-g(x_2)\geq M$成立，求满足上述条件的最大整数M；

（2）如果对于任意的s，$t\in\left[\dfrac{1}{2}，2\right]$，都有$f(s)\geq g(t)$成立，求实数$a$的取值范围.

转化为$f(s)_{min}\geq g(t)_{max}$

[解析]　(1)如果存在x_1，$x_2\in[0,2]$使得$g(x_1)-g(x_2)\geqslant M$成立，等价于$[g(x_1)-g(x_2)]_{\max}\geqslant M$.

由 $g(x)=x^3-x^2-3$，得 $g'(x)=3x^2-2x=3x\left(x-\frac{2}{3}\right)$.

令 $g'(x)>0$ 得 $x<0$ 或 $x>\frac{2}{3}$，令 $g'(x)<0$ 得 $0<x<\frac{2}{3}$，又 $x\in[0,2]$，

所以 $g(x)$在区间$\left[0,\ \frac{2}{3}\right]$上单调递减，在区间$\left[\frac{2}{3},\ 2\right]$上单调递增，所以

$g(x)_{\min}=g\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{85}{27}$,