

河北省 NT20 名校联合体 2023-2024 学年高一下学期

收心考试数学试题

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 4\}$, $B = \left\{x \mid \frac{1}{4} \leq 2^x \leq 8\right\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B =$ ()

A. $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$

B. $\{x | 1 \leq x \leq 3\}$

C. $\{x | 2 \leq x \leq 4\}$

D. $\{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 3\}$

【答案】B

【解析】因为 $B = \left\{x \mid \frac{1}{4} \leq 2^x \leq 8\right\}$, 所以 $B = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$,

因为 $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x | 1 \leq x \leq 4\}$, 故 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$.

故选：B.

2. 若点 $P(-2\sqrt{2}, y)$ 是角 α 终边上一点, 且 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 y 的值为 ()

A. $-\sqrt{2}$

B. $\sqrt{2}$

C. -2

D. 2

【答案】D

【解析】 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 又由三角函数的定义得 $\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{8+y^2}}$,

所以 $\frac{y}{\sqrt{8+y^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 又 $y > 0$, 解得 $y = 2$.

故选：D.

3. 已知 $a = 0.5^{0.9}$, $b = \ln 3$, $c = \log_3 \frac{1}{2}$, 则 ()

A. $a > b > c$

B. $b > a > c$

C. $c > a > b$

D. $a > c > b$

【答案】B

【解析】因为 $a = 0.5^{0.9} \in (0, 1)$, $b = \ln 3 > \ln e = 1$, $c = \log_3 \frac{1}{2} < \log_3 1 = 0$,

高级中学名校试卷

所以 $b > a > c$.

故选: B.

4. 若 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin \alpha$ 的值为 ()

A. $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$

B. $\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$

C. $\frac{3\pm 4\sqrt{3}}{10}$

D. $\frac{4\sqrt{3}\pm 3}{10}$

【答案】A

【解析】因为 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 可得 $\alpha - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$,

又因为 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5} < \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\alpha - \frac{\pi}{6} \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$,

所以 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{4}{5}$,

则 $\sin \alpha = \sin\left[\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3+4\sqrt{3}}{10}$.

故选: A.

5. 已知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且 $f(x) - f(2-x) = 0$, 当 $0 < x \leq 1$ 时, $f(x) = 2^x$, 则

$f(\log_2 12)$ 的值为 ()

A. -4

B. $-\frac{3}{4}$

C. $-\frac{4}{3}$

D. $-\frac{1}{4}$

【答案】C

【解析】 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(x) = -f(-x)$,

又因为 $f(x) - f(2-x) = 0$, 所以 $f(-x) = -f(2-x)$,

即 $f(x+2) = -f(x)$, 所以 $f(x+4) = f(x)$,

所以 $f(x)$ 的周期为 4, $f(\log_2 12) = f(\log_2 12 - 4) = f\left(\log_2 \frac{3}{4}\right)$,

因为 $f(x)$ 为奇函数,

$$\text{所以 } f\left(\log_2 \frac{3}{4}\right) = f\left(-\log_2 \frac{4}{3}\right) = -f\left(\log_2 \frac{4}{3}\right) = -2^{\log_2 \frac{4}{3}} = -\frac{4}{3}.$$

故选: C.

6. 若 $f(x) = \frac{e^x \cdot \sin x}{e^{ax} + 1}$ 为奇函数, 则 $a =$ ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. -1

【答案】C

$$\text{【解 析】由题意得 } f(x) = \frac{e^x \cdot \sin x}{e^{ax} + 1} = \frac{\sin x}{e^{(a-1)x} + e^{-x}},$$

因为 $y = \sin x$ 为奇函数, 所以 $y = e^{(a-1)x} + e^{-x}$ 为偶函数,

令 $g(x) = e^{(a-1)x} + e^{-x}$, 定义域为 $\mathbb{R}$, 则 $g(-x) = g(x)$, $\therefore e^{-(a-1)x} + e^x = e^{(a-1)x} + e^{-x}$,

$$\text{即 } \frac{e^{2(a-1)x} - 1}{e^{(a-1)x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}, \text{ 即 } a - 1 = 1, \therefore a = 2,$$

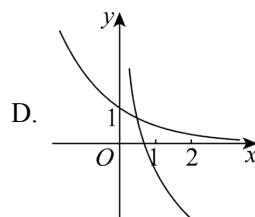
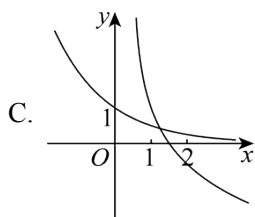
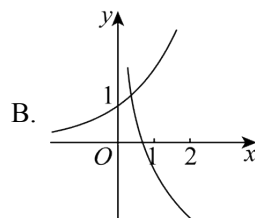
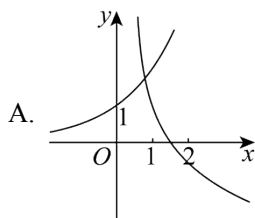
此时 $f(x) = \frac{\sin x}{e^x + e^{-x}}$, 定义域为 $\mathbb{R}$, 满足 $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{e^{-x} + e^x} = \frac{-\sin x}{e^{-x} + e^x} = -f(x)$,

即 $f(x) = \frac{e^x \cdot \sin x}{e^{ax} + 1}$ 为奇函数, 故 $a = 2$.

故选: C.

7. 在同一平面直角坐标系中, 函数 $y = a^x$, $y = \log_a x - a$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象可能是

()



高级中学名校试卷

【答案】D

【解析】当 $a > 1$ 时, $y = a^x$ 与 $y = \log_a x - a (a > 0)$ 单调递增, A, B 均不符合题意;

当 $0 < a < 1$ 时, $y = a^x$ 与 $y = \log_a x - a$ 单调递减,

对于 $y = \log_a x - a$, 当 $x = 1$ 时 $y < 0$, C 不正确.

故选: D.

8. 定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 都有

$(x_1 - x_2)[x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)] > 0$ 成立, 且 $f(4) = 2$, 则不等式 $\frac{f(x)}{x} > \frac{1}{2}$ 的解集为()

A. $(4, +\infty)$

B. $(0, 4)$

C. $(0, 2)$

D. $(2, +\infty)$

【答案】A

【解析】令 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$,

因为对 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $(x_1 - x_2)[x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)] > 0$,

即 $\frac{\frac{f(x_1)}{x_1} - \frac{f(x_2)}{x_2}}{x_1 - x_2} > 0$ 成立,

不妨设 $0 < x_1 < x_2$, 则 $x_1 - x_2 < 0$, 故 $x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2) < 0$, 则 $\frac{f(x_1)}{x_1} < \frac{f(x_2)}{x_2}$,

即 $g(x_1) < g(x_2)$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又因为 $f(4) = 2$,

所以 $g(4) = \frac{f(4)}{4} = \frac{1}{2}$,

故 $\frac{f(x)}{x} > \frac{1}{2}$ 可化为 $g(x) > g(4)$, 所以由 $g(x)$ 的单调性可得 $x > 4$,

即不等式 $\frac{f(x)}{x} > \frac{1}{2}$ 的解集为 $(4, +\infty)$.

故选: A.

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 已知角 A, B, C 是三角形 ABC 的三个内角, 下列结论一定成立的有 ()

A. $\sin(A+B) = \sin C$

B. $\cos(A+B) = \cos C$

C. 若 $\sin A > \sin B$, 则 $A > B$

D. 若 $A > B$, 则 $\sin A > \sin B$

【答案】ACD

【解析】A 选项, $\sin(A+B) = \sin(\pi - C) = \sin C$, 选项 A 正确;

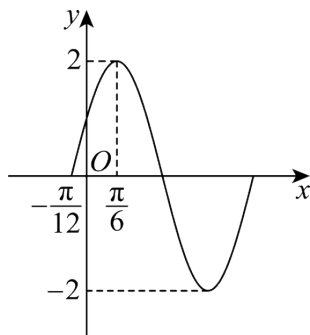
B 选项, $\cos(A+B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$, 选项 B 错误;

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $\sin A > \sin B \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow A > B$, 故 C 和 D 正确.

故选: ACD.

10. 已知函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 其中

$f(x)$ 的图象与 x 轴的一个交点的横坐标为 $-\frac{\pi}{12}$, 则 ()



A. $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 中心对称

C. $f(x)$ 的图象可以由 $y = 2 \sin 2x$ 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到

D. $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增

【答案】AC

【解析】由图 $A = 2$, 知 $\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{4} = \frac{T}{4}$, $\therefore T = \pi$, $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$,

因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 2$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 则 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, $\therefore f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$,

$\because f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, $\therefore T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 故 A 正确;

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$, 故 $f(x)$ 的图象不关于点 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 中心对称, 故 B 错误,

$f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 可以由 $y = 2\sin 2x$ 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到,

C 正确;

当 $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} \in \left(-\pi, \frac{\pi}{3}\right)$, $\therefore f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 不单调, D 错误.

故选: AC.

11. 若命题“ $\exists x \in \mathbf{R}$, $(k^2 - 1)x^2 + 2(k - 1)x - 1 > 0$ ”是假命题, 则 k 的值可能为 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】AB

【解析】由题知 $\forall x \in \mathbf{R}$, $(k^2 - 1)x^2 + 2(k - 1)x - 1 \leq 0$ 是真命题,

当 $k^2 - 1 = 0$, 即 $k = 1$ 时, $-1 < 0$ 恒成立, $k = -1$ 时, $-2x - 1 \leq 0$ 不恒成立;

当 $k^2 - 1 < 0$ 时, $\Delta = 4(k - 1)^2 + 4(k^2 - 1) \leq 0$, 解得 $0 \leq k < 1$, 综上得 $0 \leq k \leq 1$.

故选: AB.

12. 已知方程 $e^x + x = 0$ 与 $x + \ln x = 0$ 的根分别为 x_1, x_2 , 则下列说法正确的是 ()

A. $x_1 + x_2 = 0$

B. $\frac{1}{2} < x_2 < 1$

C. $\ln x_2 = x_1$

D. $4x_1x_2 - 1 > 2(x_1 - x_2)$

【答案】ABC

【解析】对于 AC, 方程 $e^x + x = 0$ 与 $x + \ln x = 0$ 的根分别为 x_1, x_2 ,

即 $y = e^x$ 与 $y = -x$ 的交点横坐标为 x_1 , $y = \ln x$ 与 $y = -x$ 的交点横坐标为 x_2 ,

由题知 $e^{x_1} = -x_1$, $\ln x_2 = -x_2$,

$y = e^x$ 与 $y = \ln x$ 的图象关于 $y = x$ 对称,

与 $y = -x$ 相交可得点 (x_1, e^{x_1}) 与点 $(x_2, \ln x_2)$ 关于 $y = x$ 对称,

高级中学名校试卷

所以 $x_1 = \ln x_2 = -x_2$ ，即 $x_1 + x_2 = 0$ ，故 AC 正确；

设 $f(x) = e^x + x$ ，明显其单调递增，又 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} > 0$ ， $f(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ ，

对于 B，由零点存在定理可知 $-1 < x_1 < -\frac{1}{2}$ ，根据对称性可得 $\frac{1}{2} < x_2 < 1$ ，B 正确；

对于 D，由 B 选项知， $2x_1 + 1 < 0$ ， $2x_2 - 1 > 0$ ，

则 $4x_1x_2 - 1 - 2x_1 + 2x_2 = (2x_1 + 1)(2x_2 - 1) < 0$ ，所以 $4x_1x_2 - 1 < 2(x_1 - x_2)$ ，D 错误。

故选：ABC.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 函数 $f(x) = \sqrt{\ln x - 1} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}$ 的定义域为_____.

【答案】 $[e, 3)$

【解析】要使函数 $f(x) = \sqrt{\ln x - 1} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}$ 有意义，

则应有 $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x - 1 \geq 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases}$ ，解得 $e \leq x < 3$ ，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $[e, 3)$.

故【答案】为： $[e, 3)$.

14. 已知 $\tan \frac{\theta}{2} = -3$ ，则 $\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta - 1}$ 的值为_____.

【答案】 $-\frac{1}{6}$

【解析】原式 $= \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}\right)^2} + \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{-2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}} - \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$
 $= \frac{1 + \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} = \frac{1-3}{1+3} - \frac{1}{-3} = -\frac{1}{6}.$

故【答案】为： $-\frac{1}{6}$.

15. 已知 $a, b \in \mathbf{R}^+$, $2a+b=3$, 则 $\frac{2}{a+2} + \frac{1}{b+1}$ 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{9}{8}$

【解析】 因为 $a, b \in \mathbf{R}^+$ 且 $2a+b=3$, 所以 $(2a+4)+(b+1)=8$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{2}{a+2} + \frac{1}{b+1} &= \frac{4}{2a+4} + \frac{1}{b+1} = \left(\frac{4}{2a+4} + \frac{1}{b+1} \right) [(2a+4)+(b+1)] \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{8} \left(5 + \frac{2a+4}{b+1} + \frac{4(b+1)}{2a+4} \right) \geq \frac{1}{8} \left(5 + 2\sqrt{\frac{2a+4}{b+1} \cdot \frac{4(b+1)}{2a+4}} \right) = \frac{9}{8}, \end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{2a+4}{b+1} = \frac{4(b+1)}{2a+4}$, 即 $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{5}{3}$ 时等号成立,

故 $\frac{2}{a+2} + \frac{1}{b+1}$ 的最小值为 $\frac{9}{8}$.

故【答案】为: $\frac{9}{8}$.

16. 已知函数 $f(x) = \ln \left(\frac{\sqrt{1+9x^2} + 3x}{e^2} \right)$, 若 $f(kx^2+2) + f(2-kx) + 4 > 0$ 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围是_____.

【答案】 $[0, 16)$

$$\text{【解析】 } f(x) = \ln \left(\frac{\sqrt{1+9x^2} + 3x}{e^2} \right) = \ln(\sqrt{1+9x^2} + 3x) - 2,$$

因为 $\sqrt{1+9x^2} + 3x > |3x| + 3x \geq 0$, 故 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$$\text{令 } g(x) = \ln(\sqrt{1+9x^2} + 3x), \text{ 则 } g(-x) = \ln(\sqrt{1+9x^2} - 3x),$$

故 $g(x) + g(-x) = \ln 1 = 0$, 即 $g(-x) = -g(x)$, 其中 $x \in \mathbf{R}$,

所以 $g(x)$ 为奇函数,

当 $x \geq 0$ 时, 任意 $0 \leq x_1 < x_2$, 则 $0 < \sqrt{1+9x_1^2} + 3x_1 < \sqrt{1+9x_2^2} + 3x_2$,

$$\text{故 } \ln(\sqrt{1+9x_1^2} + 3x_1) < \ln(\sqrt{1+9x_2^2} + 3x_2),$$

故 $g(x_1) < g(x_2)$, 故 $g(x)$ 为 $[0, +\infty)$ 上的增函数,

由 $g(x)$ 为奇函数可得 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数,

高级中学名校试卷

由 $f(kx^2+2)+f(2-kx)+4>0$ 可得 $g(kx^2+2)>-g(2-kx)$,

故 $g(kx^2+2)>g(kx-2)$, 故 $kx^2+2>kx-2$, 于是 $kx^2-kx+4>0$ 恒成立,

当 $k=0$ 时不等式恒成立;

当 $k \neq 0$ 时, 要满足题意则需 $\begin{cases} k > 0 \\ k^2 - 16k < 0 \end{cases}$, $0 < k < 16$, 故 $0 \leq k < 16$.

故【答案】为: $[0, 16)$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 计算:

$$(1) \quad 0.027^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} - (\sqrt{2}-1)^0 - (0.25)^{-1} + \sqrt[6]{(-3)^6};$$

$$(2) \quad \log_4 9 \cdot \log_3 8 - \lg 2 \cdot \lg 50 - \lg 25 - (\lg 2)^2 - e^{-3 \ln 2}.$$

$$\text{解: (1) } 0.027^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} - (\sqrt{2}-1)^0 - (0.25)^{-1} + \sqrt[6]{(-3)^6}$$

$$= \frac{10}{3} + \frac{2}{3} - 1 - 4 + 3 = 2.$$

$$(2) \quad \log_4 9 \cdot \log_3 8 - \lg 2 \cdot \lg 50 - \lg 25 - (\lg 2)^2 - e^{-3 \ln 2}$$

$$= 3 - \lg 2 \cdot (\lg 5 + 1) - 2 \lg 5 - (\lg 2)^2 - \frac{1}{8}$$

$$= 3 - \lg 2 \cdot (\lg 5 + \lg 2 + 1) - 2 \lg 5 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

$$18. \text{ 已知集合 } A = \{x \mid 1 - \frac{4}{x+1} \geq 0\}, \quad B = \{x \mid x^2 + 2kx - 3k^2 < 0\}.$$

(1) 若 $k=1$, 求集合 $A \cap B$;

(2) 若“ $x \in B$ ”的充分不必要条件是“ $x \in A$ ”, 求实数 k 的取值范围.

$$\text{解: (1) 由不等式 } 1 - \frac{4}{x+1} \geq 0, \text{ 即 } \frac{x-3}{x+1} \geq 0, \text{ 解得 } -1 < x \leq 3, \text{ 即 } A = \{x \mid -1 < x \leq 3\},$$

$$\text{当 } k=1 \text{ 时, 集合 } B = \{x \mid x^2 + 2x - 3 < 0\},$$

$$\text{又由 } x^2 + 2x - 3 < 0, \text{ 解得 } -3 < x < 1, \text{ 所以 } B = \{x \mid -3 < x < 1\},$$

$$\text{所以 } A \cap B = \{x \mid -1 < x < 1\}.$$

(2) 由 (1) 知 $A = \{x | -1 < x \leq 3\}$,

又由 $x^2 + 2kx - 3k^2 < 0$, 可得 $(x + 3k)(x - k) < 0$,

当 $k > 0$ 时, 解得 $-3k < x < k$, 即集合 $B = \{x | -3k < x < k\}$;

当 $k = 0$ 时, 集合 $B = \emptyset$;

当 $k < 0$ 时, 解得 $k < x < -3k$, 即集合 $B = \{x | k < x < -3k\}$,

因为“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分不必要条件, 即集合 A 是 B 的真子集,

所以当 $k > 0$ 时, 满足 $\begin{cases} -3k \leq -1 \\ k > 3 \end{cases}$, 解得 $k > 3$;

当 $k = 0$ 时, 不符合题意;

当 $k < 0$ 时, 满足 $\begin{cases} k \leq -1 \\ -3k > 3 \end{cases}$, 解得 $k < -1$,

综上所述, 实数 k 的取值范围为 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

19. 已知函数 $f(x) = \frac{\sin(\pi - x) - \cos(\pi + x)}{3\cos(\pi - x) + \sin(-\pi - x)}$.

(1) 若 $f(\varphi) = 3$, 求 $\tan \varphi$ 的值;

(2) 若 $f(\alpha - \beta) = -\frac{3}{5}$, $f(\alpha) = -\frac{1}{2}$, 且 $\alpha \in (0, \pi)$, $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 求 $2\alpha - \beta$ 的值.

解: (1) 由已知 $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{-3\cos x + \sin x}$,

即 $f(x) = \frac{\tan x + 1}{-3 + \tan x}$,

因为 $f(\varphi) = 3$, 即 $\frac{\tan \varphi + 1}{-3 + \tan \varphi} = 3$, 解得 $\tan \varphi = 5$.

(2) 依题意, 由 $f(\alpha - \beta) = -\frac{3}{5}$, $f(\alpha) = -\frac{1}{2}$,

得 $\frac{\tan(\alpha - \beta) + 1}{-3 + \tan(\alpha - \beta)} = -\frac{3}{5}$, $\frac{\tan \alpha + 1}{-3 + \tan \alpha} = -\frac{1}{2}$,

解得 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$, $\tan \alpha = \frac{1}{3}$,

$$\therefore \tan(2\alpha - \beta) = \tan[(\alpha - \beta) + \alpha] = \frac{\tan(\alpha - \beta) + \tan \alpha}{1 - \tan(\alpha - \beta)\tan \alpha} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = 1,$$

$$\because \alpha \in (0, \pi), \tan \alpha = \frac{1}{3}, \therefore \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{又 } \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \therefore \alpha - \beta \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\therefore 2\alpha - \beta \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{6}\right),$$

$$\therefore 2\alpha - \beta = -\frac{3\pi}{4}.$$

20. 已知幂函数 $f(x) = (m^2 - 4m + 4) \cdot x^{2m-4}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减.

(1) 求函数 $f(x)$ 的〔解析〕式;

(2) 若 $f(1-2x) < f(x+2)$, 求 x 的取值范围;

(3) 若对任意 $x \in [1, 2]$, 都存在 $a \in [1, 2]$, 使得 $f(x) \leq at^2 - t + a + 1$ 成立, 求实数 t 的取值范围.

解: (1) 由幂函数 $f(x) = (m^2 - 4m + 4) \cdot x^{2m-4}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

$$\text{可得 } \begin{cases} m^2 - 4m + 4 = 1 \\ 2m - 4 > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } m = 3,$$

$$\text{所以 } f(x) = x^2.$$

(2) 由函数 $f(x) = x^2$ 图象关于 y 轴对称, 且在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

则 $f(1-2x) < f(x+2)$ 可化为 $|1-2x| < |x+2|$, 平方得 $4x^2 - 4x + 1 < x^2 + 4x + 4$,

化简得 $3x^2 - 8x - 3 < 0$, 解得 $-\frac{1}{3} < x < 3$, 所以 x 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{3}, 3\right)$.

(3) 由 (1) 知 $f(x) = x^2$,

因为对 $\forall x \in [1, 2]$, 使得 $f(x) \leq at^2 - t + a + 1$ 都成立,

所以 $f(x)_{\max} \leq at^2 + t + 2a + 9$, 其中 $x \in [1, 2]$,

由 (1) 可得函数 $f(x) = x^2$ 在 $x \in [1, 2]$ 上的最大值为 4, 所以 $at^2 - t + a + 1 \geq 4$,

因为存在 $a \in [1, 2]$, 使得 $at^2 - t + a + 1 \geq 4$ 成立, 可得 $(at^2 - t + a - 3)_{\max} \geq 0$,

又因为 $t^2 + 1 > 0$, 所以 $y = a(t^2 + 1) - t - 3$ 是关于 a 的单调递增函数,

所以 $(at^2 - t + a - 3)_{\max} = 2(t^2 + 1) - t - 3 \geq 0$, 即 $2t^2 - t - 1 > 0$, 解得 $t \leq -\frac{1}{2}$ 或 $t \geq 1$,

所以实数 t 的取值范围为 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$.

21. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin^2 x + (\sin x + \cos x)^2 - \sqrt{3}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 若 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, 求 $y = f(x)$ 的最值及取最值时 x 的值;

(3) 若函数 $y = f(x) - m$ 在 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内有且只有一个零点, 求实数 m 的取值范围.

解: (1) $f(x) = 2\sqrt{3}\sin^2 x + (\sin x + \cos x)^2 - \sqrt{3}$

$$= 2\sqrt{3} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + 1 + 2\sin x \cos x - \sqrt{3}$$

$$= \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x + 1 = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1,$$

故函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

(2) 由 (1) 知 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$, 因为 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, 所以

$$\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right],$$

令 $t = \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 则 $y = \sin t$, 函数 $y = \sin t$ 在区间 $\left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,

在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增, 所以 $t = \frac{\pi}{6}$, 即 $x = \frac{\pi}{4}$ 时,

函数 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ 有最大值, 最大值为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$,

当 $t = -\frac{\pi}{2}$, 即 $x = -\frac{\pi}{12}$, 函数 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ 有最小值,

最小值为 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -1$,

综上 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, $y = f(x)$ 的最小值为 -1 , 此时 $x = -\frac{\pi}{12}$; 最大值为 2 , 此时 $x = \frac{\pi}{4}$.

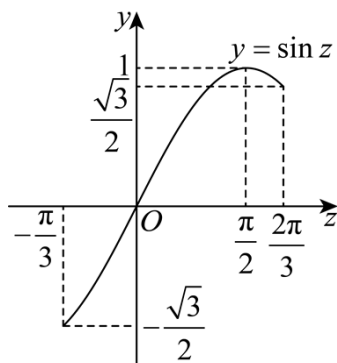
(3) 因为函数 $y = f(x) - m$ 在 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内有且只有一个零点,

所以 $f(x) - m = 0$ 在 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 只有一个实根,

$$2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 - m = 0, \text{ 即 } \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{m-1}{2},$$

即函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 在 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 的图象在与直线 $y = \frac{m-1}{2}$ 只有一个交点,

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$, 画出 $y = \sin z$ 在 $z \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上的图象, 如下:



结合函数图象可知:

函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 的图象与直线 $y = \frac{m-1}{2}$ 只有一个交点时,

$$\frac{m-1}{2} \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \{1\}, \text{ 即 } m \in [1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}) \cup \{3\}.$$

22. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = \frac{a \cdot 3^x + b}{3^x + 1}$ 是奇函数, 且 $f(1) = 1$.

(1) 求实数 a, b 的值;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/836155235231010112>