

类型三 利润最值问题

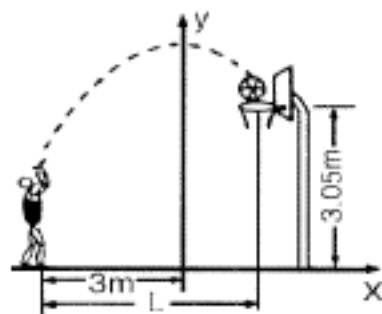
例 1、不论自变量 x 取什么实数，二次函数 $y=2x^2-6x+m$ 的函数值总是正值，你认为 m 的取值范围是 $m > \frac{9}{2}$ ，此时关于一元二次方程 $2x^2-6x+m=0$ 的解的情况是_____（填“有解”或“无解”）

【答案】：有解

【解析】： $y = 2(x - \frac{3}{2})^2 + m - \frac{9}{2}$

$\because 2(x - \frac{3}{2})^2 \geq 0$ ，要使 $y > 0$ ，只有 $m - \frac{9}{2} > 0 \therefore m > \frac{9}{2}$

例 2、小明在某次投篮中，球的运动路线是抛物线 $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3.5$ 的一部分，如图所示，若命中篮圈中心，则他与篮底的距离 L 是_____。



【答案】：4.5 米

【解析】：当 $y = 3.05$ 时， $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3.5 = 3.05$

$x^2 = 5 \times 0.45$ ， $x = 1.5$ 或 $x = -1.5$ （不合题意，舍去）

例 3、在距离地面 $2m$ 高的某处把一物体以初速度 V_0 (m/s) 竖直向上抛出，在不计空气阻力的情况下，其上升高度 s (m) 与抛出时间 t (s) 满足： $S = V_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ （其中 g 是常数，通常取 $10m/s^2$ ），若 $V_0 = 10m/s$ ，则该物体在运动过程中最高点距离地面_____m。

【答案】：7 米

【解析】： $s = -5t^2 + 10t = -5(t-1)^2 + 5$

当 $t = 1$ 时， $s_{\max} = 5$ ，所以，最高点距离地面 $5 + 2 = 7$ (米)。

例 4、影响刹车距离的最主要因素是汽车行驶的速度及路面的摩擦系数。有研究表明，晴天在某段公路上行驶上，速度为 V (km/h) 的汽车的刹车距离 S (m) 可由公式 $S = \frac{1}{100}V^2$ 确定；雨天行驶时，这一公式为 $S = \frac{1}{50}V^2$ 。如果车行驶的速度是 $60km/h$ ，那么在雨天行驶和晴天行驶相比，刹车距离相差_____米。

【答案】： 36

例 5、将进货单价为 70 元的某种商品按零售价 100 元售出时，每天能卖出 20 个．若这种商品的零售价在一定范围内每降价 1 元，其日销售量就增加了 1 个，为了获得最大利润，则应降价__元，最大利润为_____元．

【答案】： 5 元, 625 元

【解析】： 设每件价格降价 x 元，利润为 y 元，

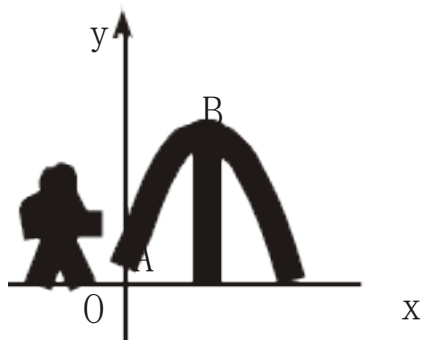
$$\text{则： } y = (100 - 70 - x)(20 + x)$$

$$= -x^2 + 10x + 600 = -((x - 5)^2 + 625$$

$$\text{当 } x = 5, \quad y_{\max} = 625 \quad (\text{元})$$

答： 价格提高 5 元，才能在半个月内获得最大利润．

例 6、如图，一小孩将一只皮球从 A 处抛出去，它所经过的路线是某个二次函数图象的一部分，如果他的出手处 A 距地面的距离 OA 为 1 m，球路的最高点 B(8, 9)，则这个二次函数的表达式为_____，小孩将球抛出了约_____米(精确到 0.1 m) ．



【答案】： 24.5 米

【解析】： 设 $y = a(x - 8)^2 + 9$ ，将点 A(0,1) 代入，得 $a = -\frac{1}{8}$

$$y = -\frac{1}{8}(x - 8)^2 + 9 = -\frac{1}{8}x^2 + 2x + 1$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 得 } y = -\frac{1}{8}(x - 8)^2 + 9 = 0$$

$$(x - 8)^2 = 8 \times 9$$

$$x = 8 \pm 6\sqrt{2}, \quad C(8 + 6\sqrt{2}, 0), \quad \therefore OC = 8 + 8 + 6\sqrt{2} \approx 24.5 \quad (\text{米})$$

例 7、某商品现在的售价为每件 60 元，每星期可卖出 300 件，市场调查反映：每涨价 1 元，每星期少卖出 10 件；每降价 1 元，每星期可多卖出 20 件，已知商品的进价为每件 40 元，如何定价才能使利润最大？

【答案】： 65 元

【解析】： 设涨价（或降价）为每件 x 元，利润为 y 元，

y_1 为涨价时的利润， y_2 为降价时的利润

$$\begin{aligned}\text{则： } y_1 &= (60 - 40 + x)(300 - 10x) \\ &= -10(x^2 - 10x - 600) \\ &= -10(x - 5)^2 + 6250\end{aligned}$$

当 $x = 5$ ，即：定价为 65 元时， $y_{\max} = 6250$ （元）

$$\begin{aligned}y_2 &= (60 - 40 - x)(300 + 20x) \\ &= -20(x - 20)(x + 15) \\ &= -20(x - 2.5)^2 + 6125\end{aligned}$$

当 $x = 2.5$ ，即：定价为 57.5 元时， $y_{\max} = 6125$ （元）

综合两种情况，应定价为 65 元时，利润最大。

例 8、某商店购进一批单价为 20 元的日用品，如果以单价 30 元销售，那么半个月内可以售出 400 件。根据销售经验，提高单价会导致销售量的减少，即销售单价每提高 1 元，销售量相应减少 20 件。如何提高售价，才能在半个月内获得最大利润？

【答案】： 5 元

【解析】： 设每件价格提高 x 元，利润为 y 元，

$$\begin{aligned}\text{则： } y &= (30 + x - 20)(400 - 20x) \\ &= -20(x + 10)(x - 20)\end{aligned}$$

$$= -20(x - 5)^2 + 4500$$

当 $x = 5$, $y_{\max} = 4500$ (元)

答：价格提高 5 元，才能在半个月内获得最大利润。

例 9、某旅行社组团去外地旅游，30 人起组团，每人单价 800 元。旅行社对超过 30 人的团给予优惠，即旅行团每增加一人，每人的单价就降低 10 元。你能帮助分析一下，当旅行团的人数是多少时，旅行社可以获得最大营业额？

【答案】：55 人

【解析】：设旅行团有 x 人 ($x \geq 30$)，营业额为 y 元，

则： $y = x[800 - 10(x - 30)]$

$$= -10x(x - 110)$$

$$= -10(x - 55)^2 + 30250$$

当 $x = 55$, $y_{\max} = 30250$ (元)

答：当旅行团的人数是 55 人时，旅行社可以获得最大营业额。

例 10、 某产品每件成本 10 元，试销阶段每件产品的销售价 x (元)与产品的日销售量 y (件)之间的关系如下表：

x (元)	15	20	30	...
y (件)	25	20	10	...

若日销售量 y 是销售价 x 的一次函数。

- (1)求出日销售量 y (件)与销售价 x (元)的函数关系式；
- (2)要使每日的销售利润最大，每件产品的销售价应定为多少元？此时每日销售利润是多少元？

【答案】： (1) $y = -x + 40$. (2) 25 元， 225 元

【解析】： (1)设一次函数表达式为 $y = kx + b$.

则 $\begin{cases} 15k + b = 25, \\ 2k + b = 20 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = -1 \\ b = 40 \end{cases}$,

即一次函数表达式为 $y = -x + 40$.

(2) 设每件产品的销售价应定为 x 元, 所获销售利润为 w 元

$$w = (x - 10)y = (x - 10)(-x + 40)$$

$$= -x^2 + 50x - 400$$

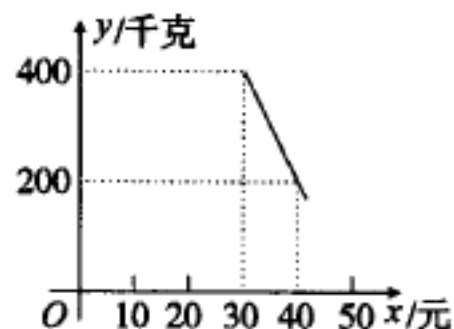
$$= -(x - 25)^2 + 225$$

当 $x = 25$, $y_{\max} = 225$ (元)

答: 产品的销售价应定为 25 元时, 每日获得最大销售利润为 225 元.

例 11、超市购进一批 20 元/千克的绿色食品, 如果以 30 元/千克销售, 那么每天可售出 400 千克. 由销售经验知, 每天销售量 y (千克) 与销售单价 x (元)

($x \geq 30$) 存在如下图所示的一次函数关系式.



(1) 试求出 y 与 x 的函数关系式;

(2) 设超市销售该绿色食品每天获得利润 P 元, 当销售单价

为何值时, 每天可获得最大利润? 最大利润是多少?

(3) 根据市场调查, 该绿色食品每天可获利润不超过 4480 元, 现该超市经理要求每天利润不得低于 4180 元, 请你帮助该超市确定绿色食品销售单价 x 的范围 (直接写出答案).

【答案】: (1) $y = -20x + 1000$ ($30 \leq x \leq 50$). (2) 4500 (3) $31 \leq x \leq 34$ 或 $36 \leq x \leq 39$.

【解析】: (1) 设 $y = kx + b$ 由图象可知,

$$\begin{cases} 30k + b = 400 \\ 40k + b = 200 \end{cases}, \quad \text{解之得: } \begin{cases} k = -20 \\ b = 1000 \end{cases}$$

即一次函数表达式为 $y = -20x + 1000$ ($30 \leq x \leq 50$).

$$(2) P = (x - 20)y = (x - 20)(-20x + 1000) = -20x^2 + 1400x - 20000$$

$\because a = -20 < 0 \quad \therefore P$ 有最大值.

当 $x = \frac{1400}{2 \times (-20)} = 35$ 时, $P_{\max} = 4500$ (元)

(或通过配方, $P = -20(x - 35)^2 + 4500$, 也可求得最大值)

答: 当销售单价为 35 元/千克时, 每天可获得最大利润 4500 元.

(3) $\because 4180 \leq -20(x - 35)^2 + 4500 \leq 4480, \quad 1 \leq (x - 35)^2 \leq 16$

$\therefore 31 \leq x \leq 34$ 或 $36 \leq x \leq 39$.

例 12、某果品批发公司为指导今年的樱桃销售, 对往年的市场销售情况进行了调查统计, 得到如下数据:

销售价 x (元/千克)	...	25	24	23	22	...
销售量 y (千克)	...	2000	2500	3000	3500	...

(1) 在如图的直角坐标系内, 作出各组有序数对 (x, y) 所对应的点. 连接各点并观察所得的图形, 判断 y 与 x 之间的函数关系, 并求出 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 若樱桃进价为 13 元/千克, 试求销售利润 P (元) 与销售价 x (元/千克) 之间的函数关系式, 并求出当 x 取何值时, P 的值最大?

【答案】: (1) $y = -500x + 14500$. (2) 21 元, 32000 元

【解析】: (1) 由图象可知, y 是 x 的一次函数,

设 $y = kx + b$,

$\because$ 点 $(25, 2000), (24, 2500)$ 在图象上,

$$\therefore \begin{cases} 2000 = 25k + b \\ 2500 = 24k + b \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} k = -500 \\ b = 14500 \end{cases},$$

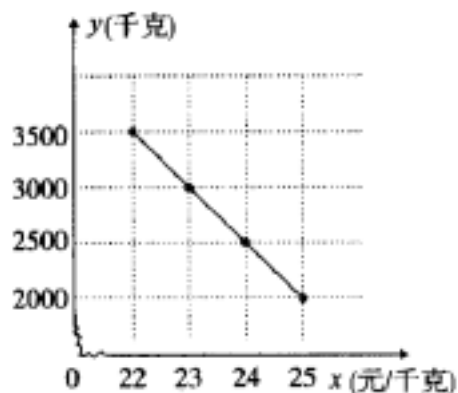
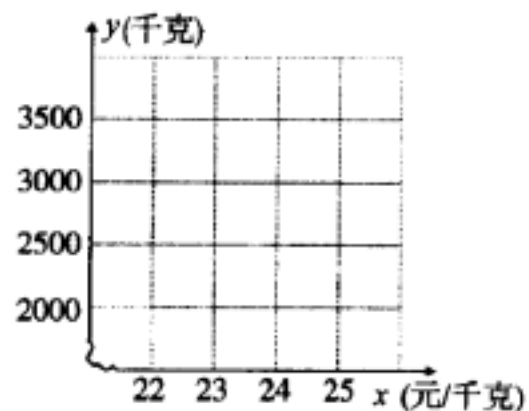
$\therefore y = -500x + 14500$.

(2) $P = (x - 13) \cdot y = (x - 13) \cdot (-500x + 14500)$

$$= -500(x - 13)(x - 29)$$

$$= -500(x^2 - 42x + 377)$$

$$= -500(x^2 - 42x + 441 - 441 + 377)$$



$$=-500(x-21)^2+32000$$

∴P 与x 的函数关系式为 $P=-500x^2+21000x-188500$,

当销售价为 21 元/千克时, 能获得最大利润, 最大利润为32000 元.

例 13、有一种螃蟹, 从海上捕获后不放养, 最多只能存活两天. 如果放养在塘内, 可以延长存活时间, 但每天也有一定数量的蟹死去. 假设放养期内蟹的个体质量基本保持不变, 现有一经销商, 按市场价收购这种活蟹 1000 kg 放养在塘内, 此时市场价为每千克 30 元, 据测算, 此后每千克活蟹的市场价每天可上升1 元, 但是, 放养一天需支出各种费用为 400 元, 且平均每天还有 10 kg 蟹死去, 假定死蟹均于当天全部销售出, 售价都是每千克 20 元.

(1) 设 x 天后每千克活蟹的市场价为p 元, 写出p 关于x 的函数关系式;

(2) 如果放养 x 天后将活蟹一次性出售, 并记 1000 kg 蟹的销售总额为 Q 元, 写出 Q 关于 x 的函数关系式.

(3) 该经销商将这批蟹放养多少天后出售, 可获最大利润(利润=Q-收购总额)?

【答案】: (1) $p=30+x$, (2) $Q=(1000-10x)(30+x)+200x=-10x^2+900x+30000$. (3) 25 天

【解析】: (1) 由题意知: $p=30+x$,

(2) 由题意知: 活蟹的销售额为 $(1000-10x)(30+x)$ 元,

死蟹的销售额为 $200x$ 元.

$$\therefore Q=(1000-10x)(30+x)+200x=-10x^2+900x+30000.$$

(3) 设总利润为W 元

$$\text{则: } W=Q-1000 \times 30-400x=-10x^2+500x$$

$$=-10(x^2-50x)=-10(x-25)^2+6250.$$

当 $x=25$ 时, 总利润最大, 最大利润为6250 元.

答: 这批蟹放养 25 天后出售, 可获最大利润.

例 14、政府出台了一系列“三农”优惠政策, 使农民收入大幅度增加. 某农户生产经销一种农副产品, 已知这种产品的成本价为20 元/千克. 市场调查发现, 该产品每天的销售量 w (千克) 与销售价 x (元/千克) 有如下关系: $w=-2x+80$. 设这种产品每天的

销售利润为 y (元) .

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 当销售价定为多少元时, 每天的销售利润最大? 最大利润是多少?

(3) 如果物价部门规定这种产品的销售价不得高于 28 元/千克, 该农户想要每天获得 150 元的销售利润, 销售价应定为多少元?

【答案】: (1) $y = -2x^2 + 120x - 1600$ (2) 30, 200 (3) 25 元

【解析】: $y = (x - 20)w = (x - 20)(-2x + 80)$

$$= -2(x - 20)(x - 40)$$

$$= -2(x^2 - 60x + 800) = -2(x - 30)^2 + 200$$

$$= -2x^2 + 120x - 1600$$

当 $x = 30$, $y_{\max} = 200$ (元)

(1) y 与 x 之间的的函数关系式为: $y = -2x^2 + 120x - 1600$

(2) 当销售价定为 30 元时, 每天的销售利润最大, 最大利润是200 元.

(3) $-2(x - 30)^2 + 200 = 150$, $(x - 30)^2 = 25$

$$x_1 = 35 > 28 \text{ (不合题意, 舍去)} \quad x_2 = 25$$

答: 该农户想要每天获得 150 元的销售利润, 销售价应定为 25 元.

例 15、研究所对某种新型产品的产销情况进行了研究, 为投资商在甲、乙两地生产并销售该产品提供了如下成果: 第一年的年产量为 x (吨)时, 所需的全部费用 y (万元) 与 x 满足关系式 $y = \frac{1}{10}x^2 + 5x + 90$, 投入市场后当年能全部售出, 且在甲、乙两地每吨的售价

,

(万 元) 均 与

满足一次函数关系.（注：年利润=年销售
额-全部费用）

（1）成果表明，在甲地生产并销售 吨

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/836242054001010110>