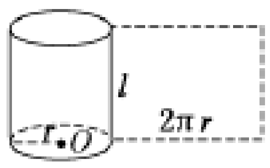
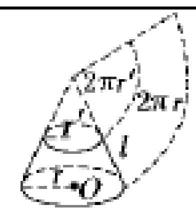
【第一节 空间几何体的表面积与体积】之小船创作

1．圆柱、圆锥、圆台的侧面展开图及侧面积公式

	圆柱	圆锥	圆台
侧面展开图			
侧面积公式	$S_{圆柱侧}=\underline{2\pi rl}$	$S_{圆锥侧}=\underline{\pi rl}$	$S_{圆台侧}=\underline{\pi(r+r')l}$

2．空间几何体的表面积与体积公式

名称 / 几何体	表面积	体积
柱体(棱柱和圆柱)	$S_{表面积}=S_{侧}+2S_{底}$	$V=\underline{Sh}$
锥体(棱锥和圆锥)	$S_{表面积}=S_{侧}+S_{底}$	$V=\frac{1}{3}Sh$
台体(棱台和圆台)	$S_{表面积}=S_{侧}+S_{上}+S_{下}$	$V=\frac{1}{3}(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}S_{下}})h$
球	$S=\underline{4\pi R^2}$	$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

[小题体验]

1．一个球的表面积是 16π，那么这个球的体积为________．

解析：设球的半径为R，因为表面积是 16π，所以 $4\pi R^2=16\pi$，解得 $R=2$．所以体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32\pi}{3}$．

答案：$\frac{32}{3}\pi$

2．(2018·南京高三年级学情调研)将一个正方形绕着它的一边所在的直线旋转一周，所得圆柱的体积为 $27\pi\ cm^3$，则该圆柱的侧面积为________cm^2.

解析：设正方形的边长为 a cm，则 $\pi a^2 \cdot a=27\pi$，得 $a=3$，所以侧面积 $2\pi\times3\times3=18\pi\ cm^2$.

答案：18π

3．(2018·海安高三质量测试)已知正三棱锥的体积为 $36\sqrt{3}\ cm^3$，高为 4 cm，则底面边长为________cm.

解析：设正三棱锥的底面边长为 a cm，则其面积为 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，由题意知$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times4=36\sqrt{3}$，解得 $a=6\sqrt{3}$.

答案：$6\sqrt{3}$

1．求组合体的表面积时，组合体的衔接部分的面积问题易出错.

2．易混侧面积与表面积的概念.

[小题纠偏]

1．圆柱的底面直径与高都等于球的直径，则球的体积与圆柱体积之比为________，球的表面积与圆柱的侧面积之比为________.

答案：2∶3　1∶1

2．已知正四棱柱的底面边长为 3 cm，侧面的对角线长为 $3\sqrt{5}$ cm，则这个正四棱柱的侧面积是________cm^2.

解析：正四棱柱的高为$\sqrt{(3\sqrt{5})^2-3^2}=6$ cm，所以侧面积是 $4\times3\times6=72$ cm^2.

答案：72

考点一　空间几何体的表面积

基础送分型考点——自主练透

[题组练透]

1．棱长为 2 的正四面体的表面积是________.

解析：每个面的面积为：$\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.所以正四面体的表面积为 $4\sqrt{3}$.

答案：$4\sqrt{3}$

2．一个六棱锥的体积为 $2\sqrt{3}$，其底面是边长为 2 的正六边形，侧棱长都相等，则该六棱锥的侧面积为________.

解析：由题意可知该六棱锥为正六棱锥，正六棱锥的高为 h，侧面的斜高为 h′.

由题意，得$\frac{1}{3}\times6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\times h=2\sqrt{3}$，

所以 $h=1$，

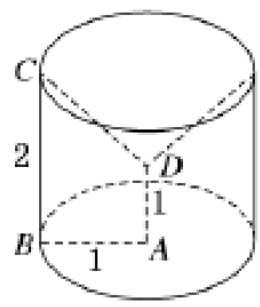
所以斜高 $h'=\sqrt{1^2+3^2}=2$，

所以 $S_{侧}=6\times\frac{1}{2}\times2\times2=12$.

答案：12

3．已知在梯形 ABCD 中，$AB\perp BC$，$AD\parallel BC$，$BC=2AD=2AB=2$，将梯形 ABCD 绕 AD 所在的直线旋转一周形成的几何体的表面积为________.

解析：由题意得几何体如图所示，几何体是底面半径为 1，高为 2 的圆柱挖去一个底面半径为 1，高为 1 的圆锥后剩下的部分，所以几何体的表面积为一个圆柱底面与圆柱侧面、圆锥侧面之和，即 $\pi\times1^2+2\pi\times1\times2+\pi\times1\times\sqrt{1^2+1^2}=(5+\sqrt{2})\pi$.



答案：$(5+\sqrt{2})\pi$

[谨记通法]

几何体的表面积的求法

(1)求表面积问题的思路是将立体几何问题转化为平面问题，即空间图形平面化，这是解决立体几何的主要出发点.

(2)求不规则几何体的表面积时，通常将所给几何体分割成基本的柱、锥、台体，先求这些柱、锥、台体的表面积，

再通过求和或作差求得几何体的表面积.

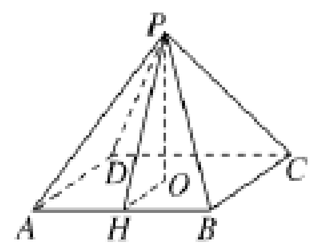
考点二　空间几何体的体积

重点保分型考点——师生共研

[典例引领]

1．(2018·苏州高三暑假测试)如图，正四棱锥 P-ABCD 的底面一边 AB 的长为 $2\sqrt{3}$ cm，侧面积为 $8\sqrt{3}$ cm^2，则它的体积为________cm^3.

解析：记正四棱锥P-ABCD的底面中心为点O，棱 AB 的中点为H，连结 PO，HO，PH，则 PO⊥平面ABCD,因为正四棱锥的侧面积为 $8\sqrt{3}$ cm^2,所以 $8\sqrt{3}=4\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times PH$，解得 PH＝2，在 Rt△PHO 中，$HO=\sqrt{3}$，所以 PO＝1，所以 $V_{P\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\text{正方形}ABCD}\cdot PO=4$ cm^3.



答案：4

2．(2019·高邮模拟)如图，在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，已知 $AB=AA_1=3$，点 P 在棱 CC_1 上，则三棱锥 $P\text{-}ABA_1$ 的体积为________.

解析：因为 $S_{\triangle ABA_1}=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$，点 P 到平面 ABA_1 的距离

h 为△ABC 的高$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以三棱锥 P -ABA_1 的体积 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABA_1}h=\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

答案：$\frac{9\sqrt{3}}{4}$

[由题悟法]

有关几何体体积的类型及解题策略

常见类型	解题策略
球的体积问题	直接利用球的体积公式求解，在实际问题中要根据题意作出图形，构造直角三角形确定球的半径
锥体、柱体的体积问题	根据题设条件求出所给几何体的底面积和高，直接套用公式求解
不规则几何体的体积问题	常用分割或补形的思想，若几何体的底不规则，也需采用同样的方法，将不规则的几何体或平面图形转化为规则的几何体或平面图形，易于求解

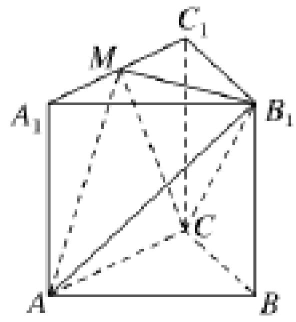
[即时应用]

1．现有一个底面半径为 3，母线长为 5 的圆锥状实心铁器，将其高温熔化后铸成一个实心铁球(不计损耗)，则该铁球的半径是________.

解析：因为圆锥底面半径为 3，母线长为 5，所以圆锥的高为$\sqrt{5^2-3^2}=4$，其体积为 $\frac{1}{3}\pi\times3^2\times4=12\pi$．设铁球

的半径为 r，则$\frac{4}{3}\pi r^3=12\pi$，解得 $r=\sqrt[3]{9}$，所以该铁球的半径是 $\sqrt[3]{9}$.

答案：$\sqrt[3]{9}$



2．(2018·南通调研)如图，在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，若各棱长均为 2，且 M 为 A_1C_1 的中点，则三棱锥 $M\text{-}AB_1C$ 的体积是________.

解析：在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$平面 $A_1B_1C_1$，则 $AA_1\perp B_1M$.因为 B_1M 是正三角形的中线，所以 $B_1M\perp A_1C_1$.因为 $A_1C_1\cap AA_1=A_1$，所以 $B_1M\perp$平面 ACC_1A_1，则 $V_{M\text{-}AB_1C}=V_{B_1\text{-}ACM}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times AC\times AA_1\times B_1M=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

答案：$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

考点三　与球有关的切、接问题

题点多变型考点——多角探明

[锁定考向]

与球有关的切、接问题是每年高考的热点，也是难点，题型多为填空题.

常见的命题角度有：

(1)球与柱体的切、接问题；

(2)球与锥体的切、接问题.

[题点全练]

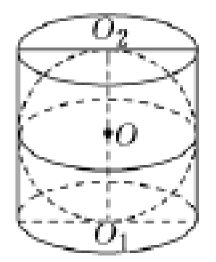
角度一：球与柱体的切、接问题

1．已知底面边长为 1，侧棱长为$\sqrt{2}$的正四棱柱的各顶点均在同一个球面上，则该球的体积为________.

解析：设该球的半径为 R，根据正四棱柱的外接球的直径长为正四棱柱的体对角线长，可得$(2R)^2=(\sqrt{2})^2+1^2+1^2$，解得 R＝1，所以该球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\pi}{3}$.

答案：$\frac{4\pi}{3}$

2．(2017·江苏高考)如图，在圆柱 O_1O_2 内有一个球 O，该球与圆柱的上、下底面及母线均相切．记圆柱 O_1O_2 的体积为 V_1，球 O 的体积为 V_2，则$\frac{V_1}{V_2}$的值是________.

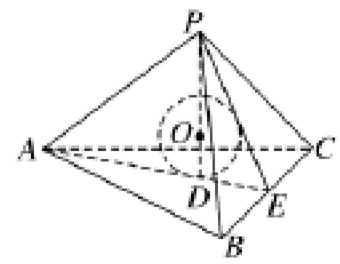


解析：设球 O 的半径为 R，因为球 O 与圆柱 O_1O_2 的上、下底面及母线均相切，所以圆柱的底面半径为 R、高为 2R，所以$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi R^2\cdot 2R}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3}{2}$.

答案：$\frac{3}{2}$

角度二：球与锥体的切、接问题

3．已知正三棱锥的高为 1，底面边长为 $2\sqrt{3}$，内有一个球与四个面都相切，则棱锥的内切球的半径为________.



解析：如图，过点 P 作 PD⊥平面 ABC 于点 D，连接 AD 并延长交 BC 于点 E，连接 PE，

因为△ABC 是正三角形，

所以 AE 是 BC 边上的高和中线，D 为△ABC 的中心.

因为 $AB=2\sqrt{3}$，所以 $S_{\triangle ABC}=3\sqrt{3}$，DE＝1，$PE=\sqrt{2}$.

所以 $S_{表}=3\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+3\sqrt{3}=3\sqrt{6}+3\sqrt{3}$.

因为 PD＝1，所以三棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}\times3\sqrt{3}\times1=\sqrt{3}$.

设球的半径为 r，以球心 O 为顶点，三棱锥的四个面为底面把正三棱锥分割为四个小棱锥，

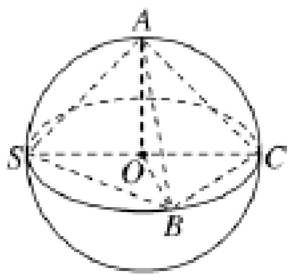
则 $r=\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{6}+3\sqrt{3}}=\sqrt{2}-1$.

答案：$\sqrt{2}-1$

4．(2017·全国卷Ⅰ)已知三棱锥 S-ABC 的所有顶点都在球 O 的球面上，SC 是球 O 的直径．若平面 SCA⊥平面 SCB，

$SA=AC$，$SB=BC$，三棱锥 $S-ABC$ 的体积为 9，则球 O 的表面积为________.

解析：如图，连接 AO，OB，



因为 SC 为球 O 的直径，

所以点 O 为 SC 的中点，

因为 $SA=AC$，$SB=BC$，

所以 $AO\perp SC$，$BO\perp SC$，

因为平面 $SCA\perp$ 平面 SCB，平面 $SCA\cap$ 平面 $SCB=SC$，

所以 $AO\perp$ 平面 SCB，

设球 O 的半径为 R，

则 $OA=OB=R$，$SC=2R$.

所以 $V_{S-ABC}=V_{A-SBC}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle SBC}\times AO$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times SC\times OB\right)\times AO$，

即 $9=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 2R\times R\right)\times R$，解得 $R=3$，

所以球 O 的表面积为 $S=4\pi R^2=4\pi\times 3^2=36\pi$.

答案：36π

[通法在握]

“切”“接”问题处理的注意事项

(1)“切”的处理

解决与球的内切问题主要是指球内切多面体与旋转体，解答时首先要找准切点，通过作截面来解决．如果内切的是多面体，则作截面时主要抓住多面体过球心的对角面来作．

(2)“接”的处理

把一个多面体的几个顶点放在球面上即为球的外接问题．解决这类问题的关键是抓住外接的特点，即球心到多面体的顶点的距离等于球的半径．

[演练冲关]

1．(2018·太湖高级中学检测)一个六棱柱的底面是正六边形，侧棱垂直于底面，所有棱的长都为 1，顶点都在同一个球面上，则该球的体积为________．

解析：由题意知六棱柱的底面正六边形的外接圆半径 $r=1$，其高 $h=1$，所以球半径为 $R=\sqrt{r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以该球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\times\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3\pi=\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}$.

答案：$\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}$

2．三棱锥 P-ABC 中，$AB=BC=\sqrt{15}$，$AC=6$，$PC\perp$平面 ABC，$PC=2$，则该三棱锥的外接球表面积为________．

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/836243051003010104