

### 3.5 幂函数与一元二次函数（精练）（提升版）

#### 题组一 幂函数及总值

1. (2022·全国·高三专题练习) 已知幂函数  $y=f(x)$  经过点  $(3, \sqrt{3})$ , 则  $f(x)$  ( )
- A. 是偶函数, 且在  $(0, +\infty)$  上是增函数  
B. 是偶函数, 且在  $(0, +\infty)$  上是减函数  
C. 是奇函数, 且在  $(0, +\infty)$  上是减函数  
D. 是非奇非偶函数, 且在  $(0, +\infty)$  上是增函数
2. (2022·全国·高三专题练习) 设  $\alpha \in \left\{-1, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$  则“ $f(x)=x^\alpha$  的图象经过  $(-1, -1)$ ”是“ $f(x)=x^\alpha$  为奇函数”的 ( )
- A. 充分不必要条件  
B. 必要不充分条件  
C. 充要条件  
D. 既不充分也不必要条件
3. (2022·全国·高三专题练习) 下列命题中, 不正确的是 ( )
- A. 幂函数  $y=x^{-1}$  是奇函数  
B. 幂函数  $y=x^2$  是偶函数  
C. 幂函数  $y=x$  既是奇函数又是偶函数  
D.  $y=x^2$  既不是奇函数, 又不是偶函数
4. (2022·上海市实验学校高三阶段练习) 若函数  $f(x)=(m+3)x^a$  ( $m, a \in \mathbf{R}$ ) 是幂函数, 且其图象过点  $(2, \sqrt{2})$ , 则函数  $g(x)=\log_a(x^2+mx-3)$  的单调递增区间为\_\_\_\_\_.
5. (2022·全国·高三专题练习) 设  $k \in \{-2, -1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2\}$ , 若  $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ , 且  $x^k > |x|$ , 则  $k$  取值的集合是\_\_\_\_\_.
6. (2022·全国·高三专题练习) 幂函数  $f(x)=(m^2-m-1)x^{m^2-2m-1}$  在区间  $(0, +\infty)$  上是增函数, 求实数  $m$  的取值集合\_\_\_\_\_.

#### 题组二 一元二次函数

1. (2022·全国·高三专题练习) 已知函数  $f(x)=\begin{cases} x^2-(3a+1)x+2, & x < 1 \\ a^x, & x \geq 1 \end{cases}$ , 若函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上为减函数, 则

实数  $a$  的取值范围为 ( )

- A.  $\left[\frac{1}{3}, 1\right)$       B.  $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$       C.  $\left(0, \frac{1}{3}\right]$       D.  $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$

2. (2022·江西上饶·高三阶段练习(理)) 函数  $f(x) = ax|a-x| (a \in \mathbf{R})$  在区间  $(-\infty, 2)$  上单调递增, 则实数  $a$  的取值范围 ( )

- A.  $[2, 4)$       B.  $[4, +\infty)$       C.  $(2, +\infty)$       D.  $(4, +\infty)$

3. (2022·浙江·高三学业考试) 已知函数  $f(x) = x^2 - 2ax + b$  在区间  $(-\infty, 1]$  是减函数, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $[1, +\infty)$       B.  $(-\infty, 1]$       C.  $[-1, +\infty)$       D.  $(-\infty, -1]$

4. (2022·全国·高三专题练习) 二次函数  $f(x) = x^2 + 2ax - 1$  在区间  $(-\infty, 1)$  上单调递减的一个充分不必要条件为 ( )

- A.  $a \leq 0$       B.  $a \leq -\frac{1}{2}$       C.  $a \leq -1$       D.  $a \leq -2$

5. (2022·河北·石家庄二中模拟预测) 设  $a \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 9, & x \leq 1 \\ x^2 + \frac{16}{x} - 3a, & x > 1 \end{cases}$ , 若  $f(x)$  的最小值为  $f(1)$ ,

则实数  $a$  的取值范围为 ( )

- A.  $[1, 2]$       B.  $[1, 3]$       C.  $[0, 2]$       D.  $[2, 3]$

6 (2022·北京·二模) 若函数  $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ (x-2)^2, & 0 < x \leq a \end{cases}$  的定义域和值域的交集为空集, 则正数  $a$  的取值范围

是 ( )

- A.  $(0, 1]$       B.  $(0, 1)$   
C.  $(1, 4)$       D.  $(2, 4)$

7. (2021江西·临川一中高三阶段练习(文)) 已知函数  $f(x) = x^2 - 2mx - m + 2$  的值域为  $[0, +\infty)$ , 则实数  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $\{-2, 1\}$       B.  $[-2, 1]$       C.  $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$       D.  $\{2, 1\}$

8. (2022·天津·高三专题练习) 已知函数  $f(x) = x^2 - 2x$  在定义域  $[-1, n]$  上的值域为  $[-1, 3]$ , 则实数  $n$  的取值

范围为\_\_\_\_\_.

9. (2022·浙江·高三专题练习) 已知函数  $f(x) = x^2 + 2x + 3 + m$ , 若  $f(x) \geq 0$  对任意的  $x \in [1, 2]$  恒成立, 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

10. (2022·江苏·高三专题练习) 设函数  $f(x) = mx^2 - mx - 1$ , 若对于  $x \in [1, 3]$ ,  $f(x) > -m + 2$  恒成立, 则实数  $m$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

11. (2022·北京房山·二模) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq a, \\ x^3, & x > a. \end{cases}$  若函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上不是增函数, 则  $a$  的一个取值为\_\_\_\_\_.

12. (2021·全国·高三专题练习) (多选) 关于  $x$  的一元二次不等式  $x^2 - 6x + a \leq 0 (a \in \mathbf{Z})$  的解集中有且仅有 3 个整数, 则  $a$  的取值可以是 ( )

- A. 6                      B. 7                      C. 8                      D. 9

题组三 一元二次函数与其他知识综合

1. (2022·北京·人大附中高三开学考试) 已知二次函数  $f(x) = ax^2 + 2x + c (x \in \mathbf{R})$  的值域为  $[0, +\infty)$ , 则  $\frac{1}{c} + \frac{4}{a}$  的最小值为 ( )

- A. 4                      B. 6                      C. 8                      D. 10

2. (2022·全国·高三专题练习) 已知函数  $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 9mx + 1$  在  $(1, +\infty)$  上为单调递增函数, 则实数  $m$  的取值范围为 ( )

- A.  $(-\infty, -1)$               B.  $[-1, 1]$               C.  $[1, 3]$               D.  $[-1, 3]$

3. (2022·北京昌平·二模) 已知函数  $f(x) = ax^2 - 4ax + 2 (a < 0)$ , 则关于  $x$  的不等式  $f(x) > \log_2 x$  的解集是 ( )

- A.  $(-\infty, 4)$               B.                      C.  $(0, 4)$               D.  $(4, +\infty)$

4. (2022·全国·高三专题练习) 已知  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x}, & x \geq 0 \\ 3x - x^3, & x < 0 \end{cases}$ , 若关于  $x$  的方程  $2f^2(x) - k \cdot f(x) - 1 = 0$  有 5 个不同的实根, 则实数  $k$  的取值范围为 ( )

- A.  $(-\frac{7}{2}, \frac{2}{e} - e)$               B.  $(-\frac{7}{2}, \frac{2}{e} - e]$               C.  $(-\infty, -\frac{7}{2}) \cup (\frac{2}{e} - e, +\infty)$               D.  $(-\infty, -\frac{7}{2}] \cup (\frac{2}{e} - e, +\infty)$

5. (2022·全国·高三专题练习) 已知正实数  $x, y, z$  满足  $x^2 - xy + 4y^2 - z = 0$ , 则当  $\frac{xy}{z}$  与  $6x + 12y - 5xy - z$  同时取得最大值时,  $z =$  ( )

- A. 6                      B.  $\frac{27}{8}$                       C. 3                      D.  $\frac{9}{8}$

6. (2022·重庆·三模) 已知  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , “函数  $f(x) = a^x$  为增函数”是“函数  $g(x) = x^{a-1}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增”的 ( )

- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件                      C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件

6. (2022·安徽·寿县第一中学高三阶段练习(理)) 若  $f(x)$  为定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 且在  $(-\infty, 0)$  上单调递减, 则 ( )

- A.  $f(\ln \frac{1}{2}) > f(2_2^+) > f(3_3^+)$                       B.  $f(3_3^+) > f(\ln \frac{1}{2}) > f(2_2^+)$   
 C.  $f(2_2^+) > f(3_3^+) > f(\ln \frac{1}{2})$                       D.  $f(3_3^+) > f(2_2^+) > f(\ln \frac{1}{2})$

7. (2022·河北石家庄·高三期末) 已知实数  $a, b$  满足  $a^3 + e^a = e^{-a} + 1$ ,  $b^3 + e^b = e^{-b} - 1$ , 则  $a + b =$  ( )

- A. -2                      B. 0                      C. 1                      D. 2

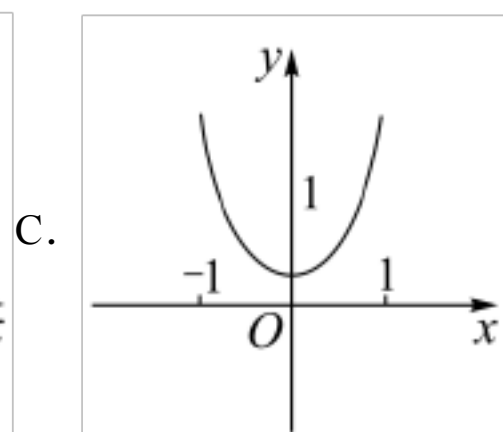
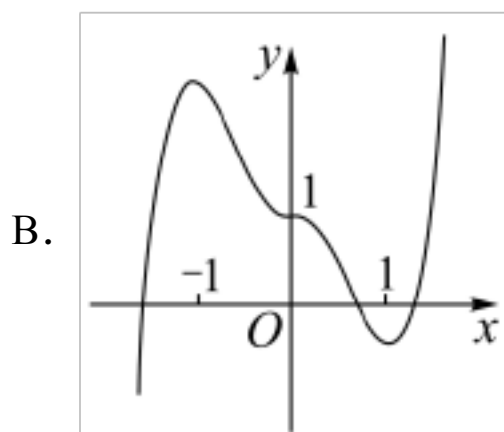
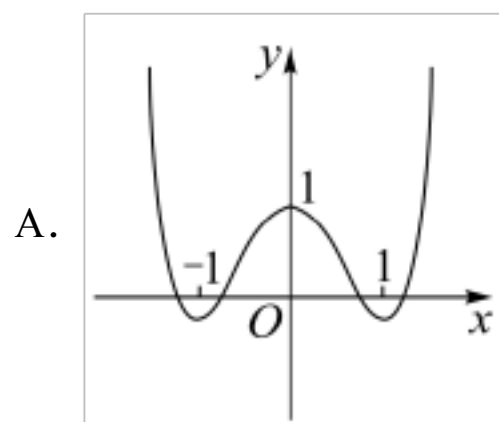
8. (2022·全国·高三专题练习(理)) 关于  $x$  的不等式  $(x-1)^{999} - 2^{999} \cdot x^{999} \leq x+1$ , 解集为\_\_\_\_\_.

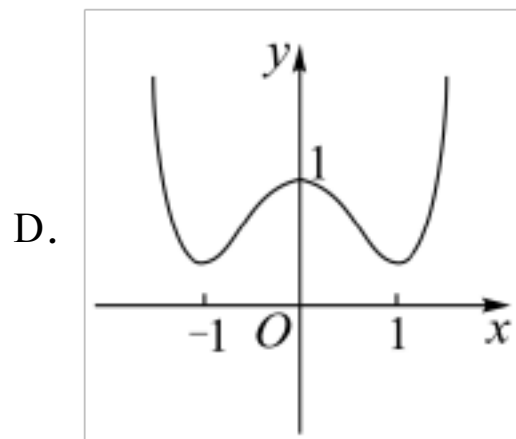
9. (2022·全国·高三专题练习) 不等式  $(x^2 - 1)^{011} + x^{2022} + 2x^2 - 1 \leq 0$  的解集为: \_\_\_\_\_.

题组四 图像问题

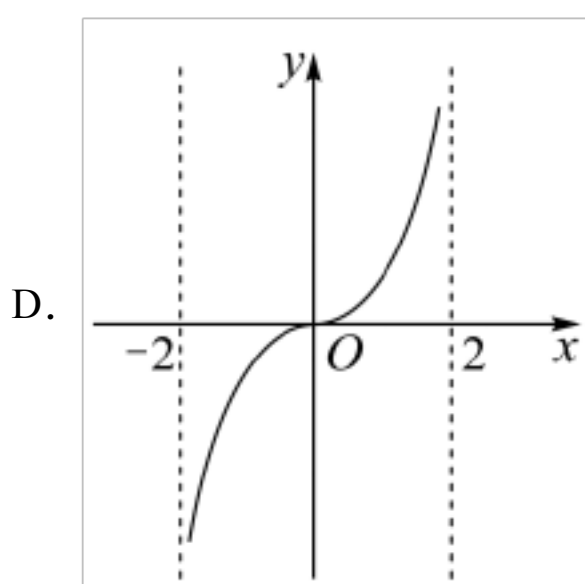
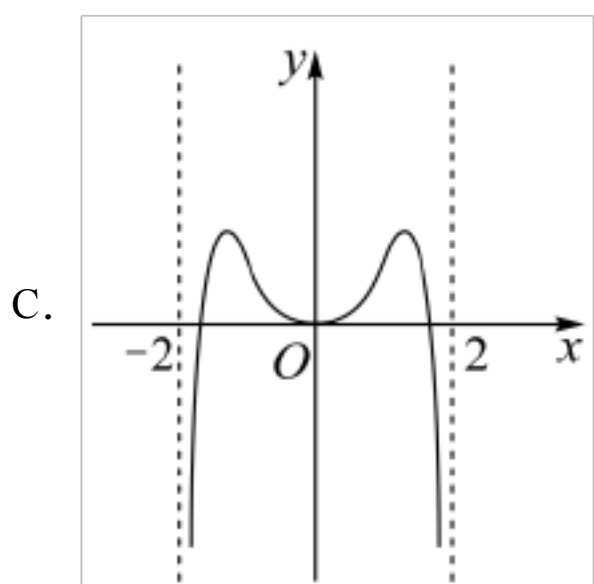
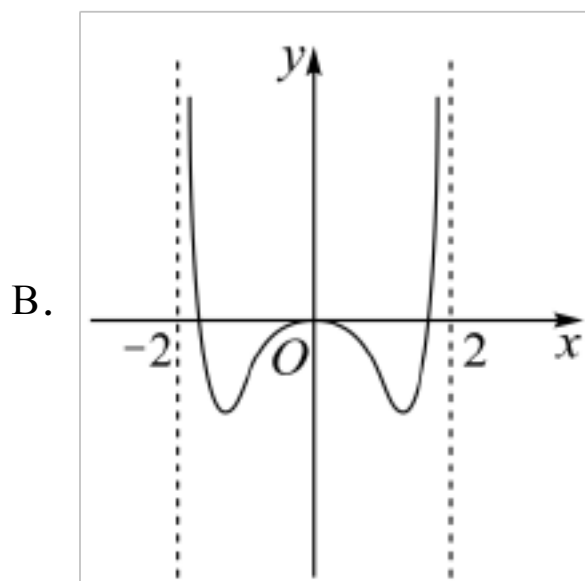
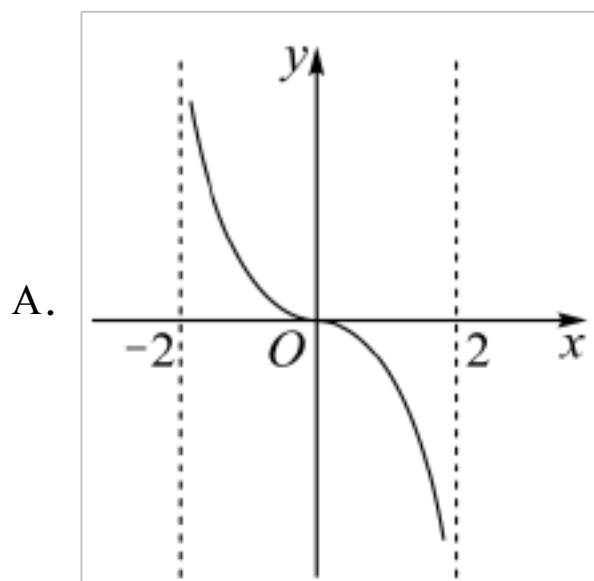
1. (2022 届高三普通高等学校招生全国统一考试数学押题卷(一)) 函数  $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2e^{2x}} - 4x^2$  的图象大致为 ( )

致为 ( )

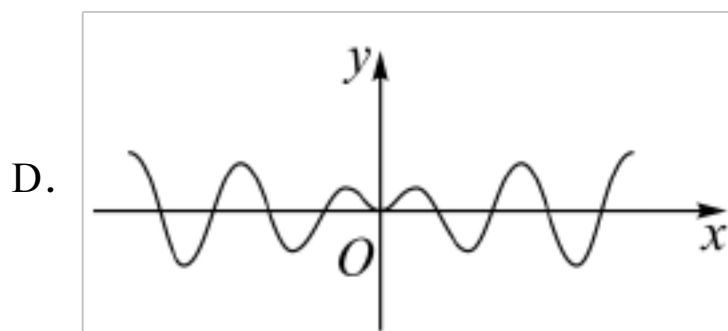
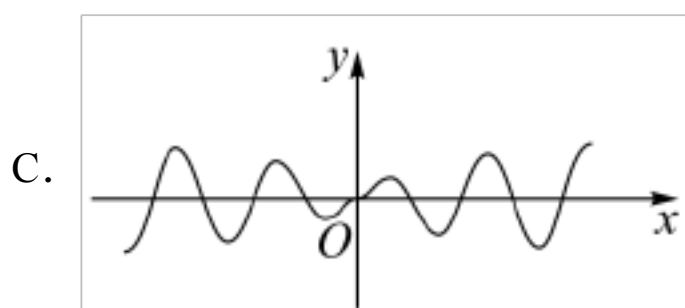
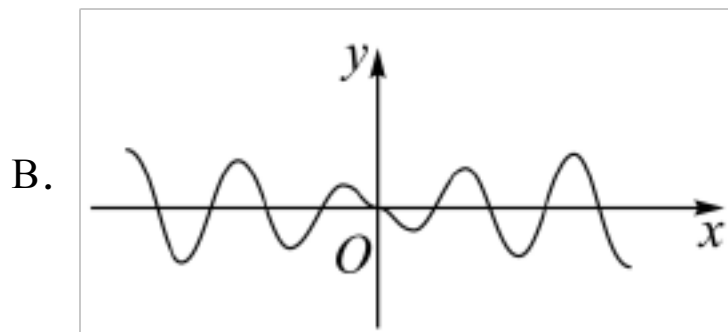
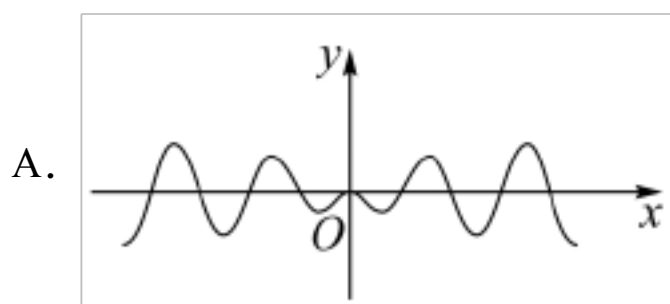




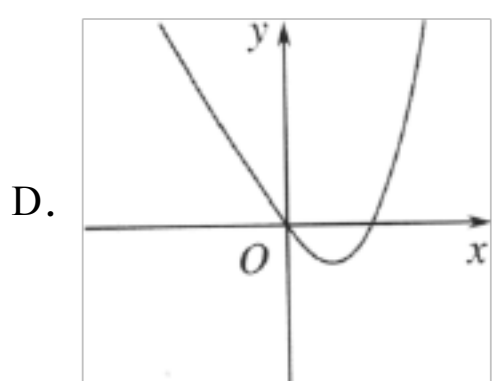
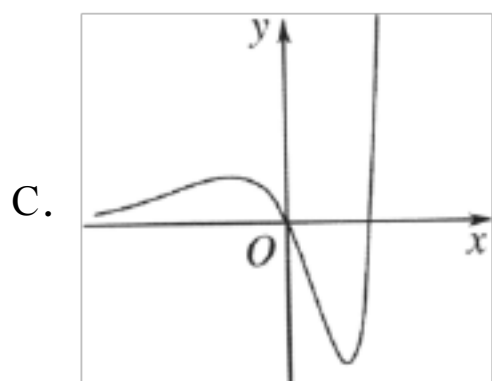
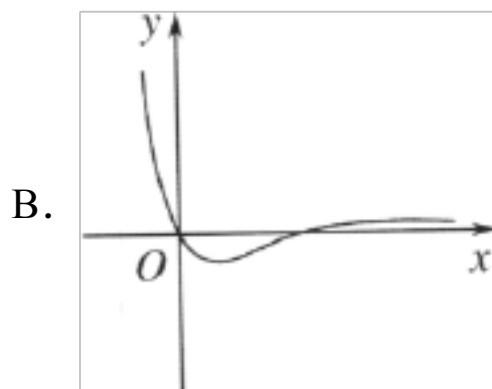
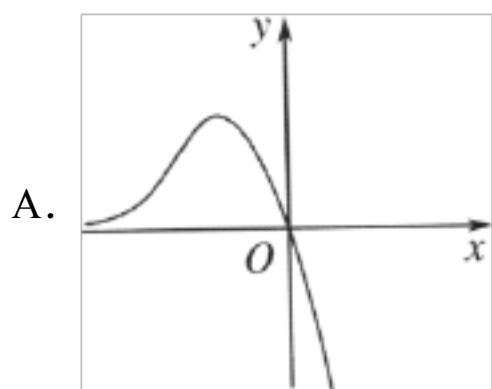
2. (2022 年高考最后一卷 (押题卷八) 数学试题) 函数  $f(x) = x^2 \ln \frac{2-x}{2+x}$  的大致图象是 ( )



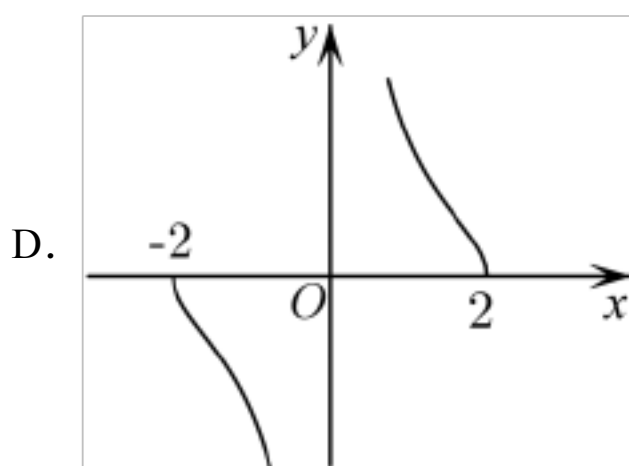
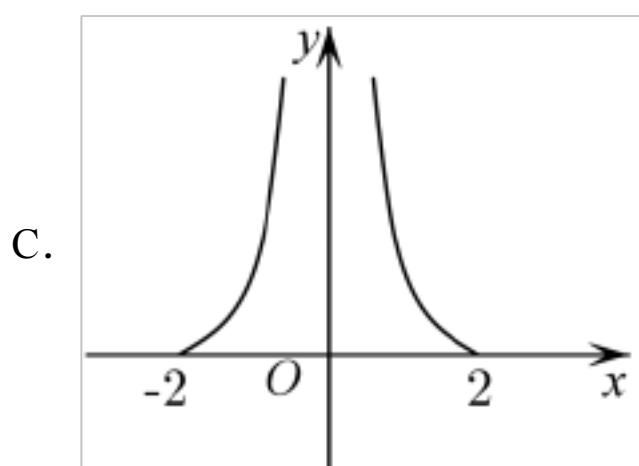
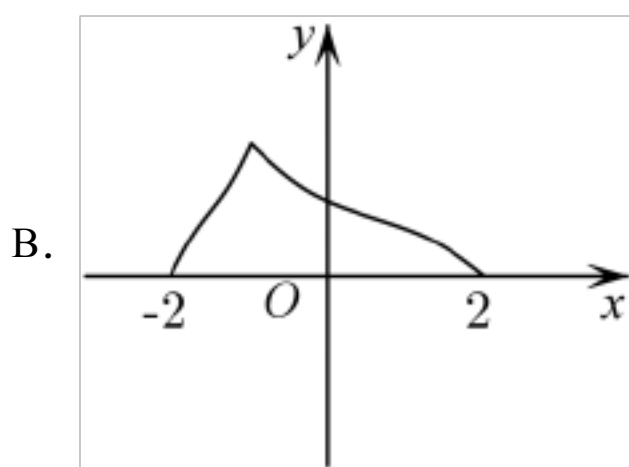
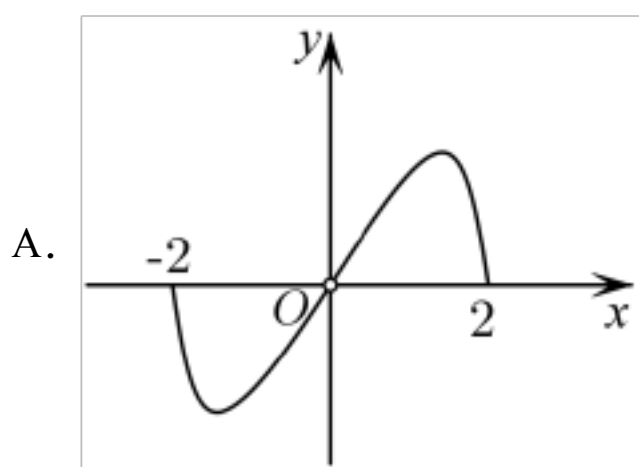
3. (2022 届高三下学期临考冲刺原创卷 (二) 数学试题) 已知函数  $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) \cdot \sin x$  则函数  $f(x)$  的大致图象为 ( )



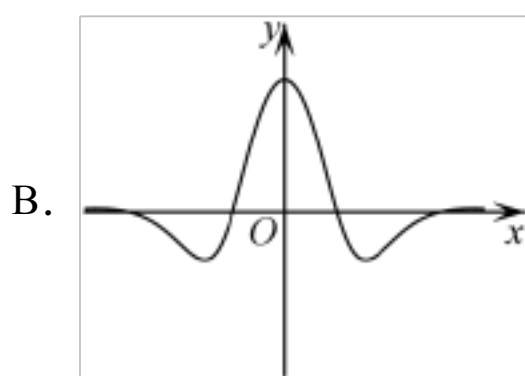
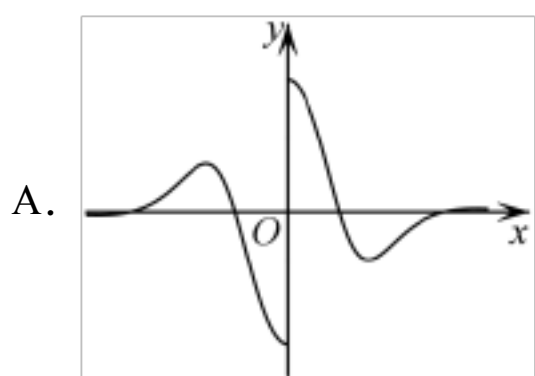
4. (2022 届高三下学期临考冲刺原创卷 (六) 数学试题) 函数  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{e^x}$  的图象大致是( )

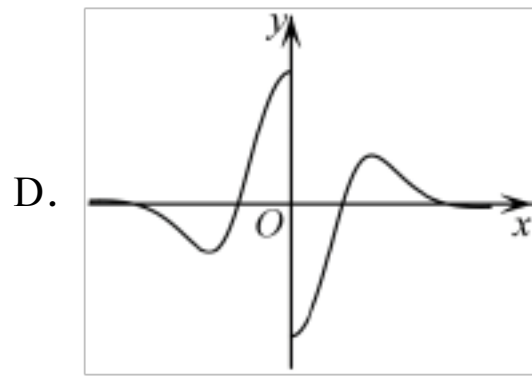
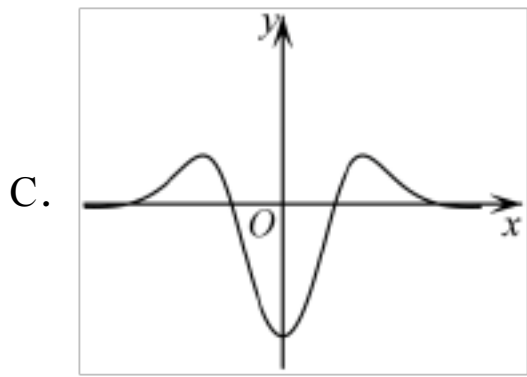


5. (天津市南开区 2022 届高三下学期二模数学试题) 函数  $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{|x+3|-3}$  的图象大致为 ( )

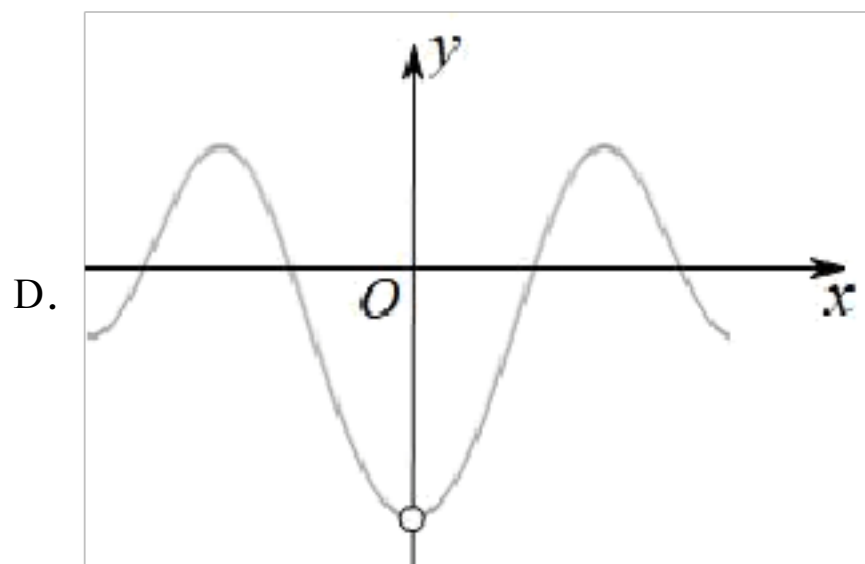
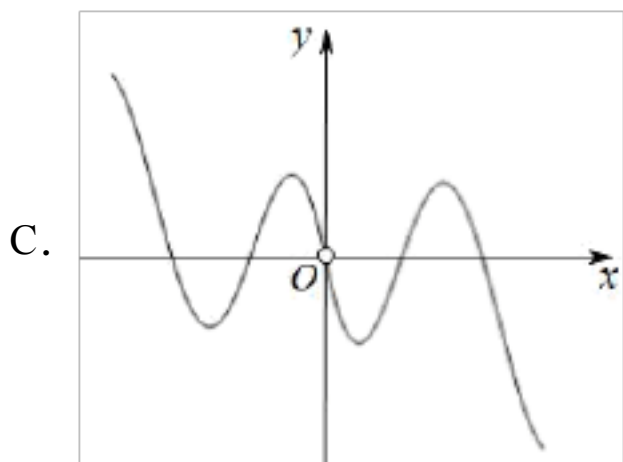
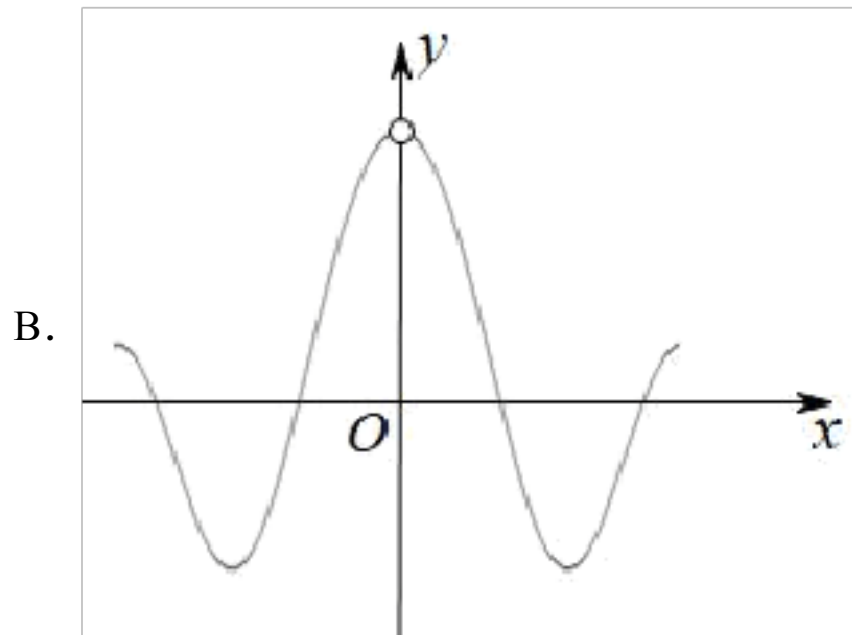
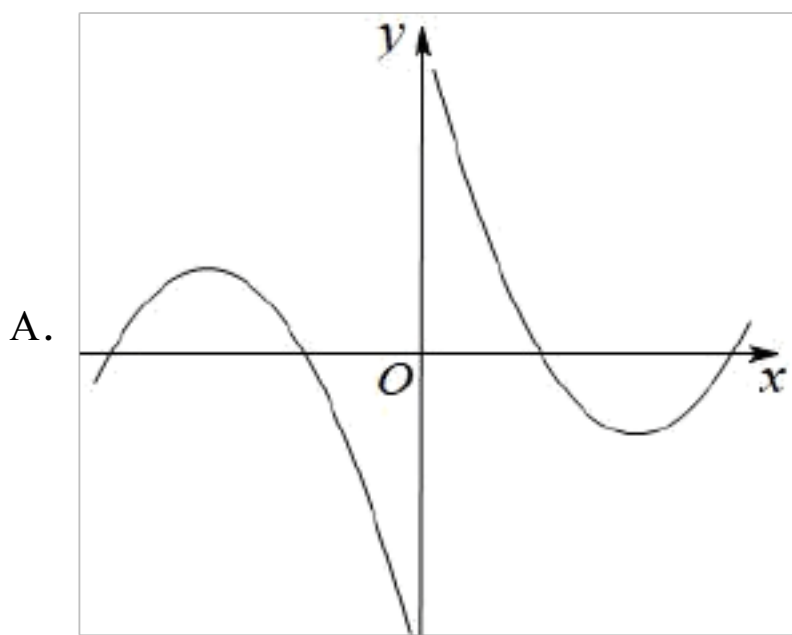


6. (安徽省合肥市第八中学 2022 届高三下学期高考最后一卷理科数学试题) 函数  $y = \frac{4\cos 2x}{x^4 + 2}$  的部分图象大致为 ( )

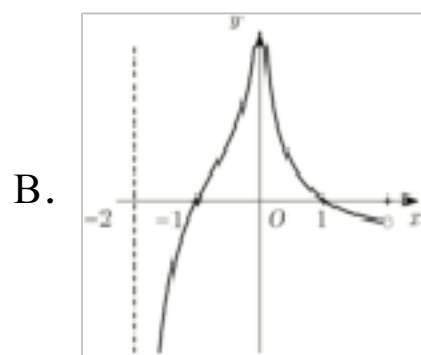
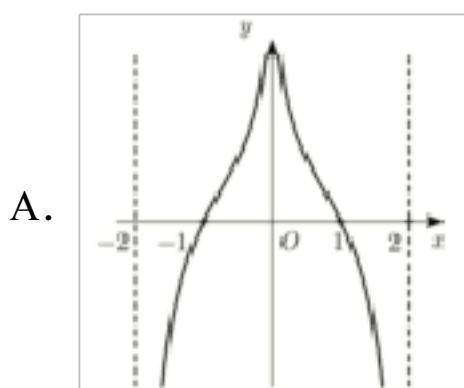




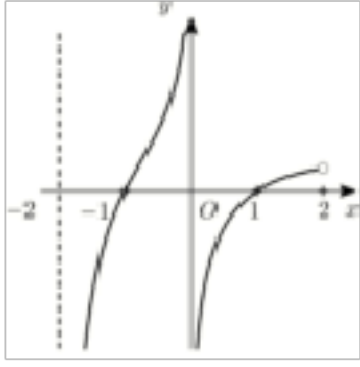
7. (浙江省绍兴一中 2022 届高三下学期 5 月高考适应性考试数学试题) 函数  $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \cos x$  的部分图象大致为 ( )



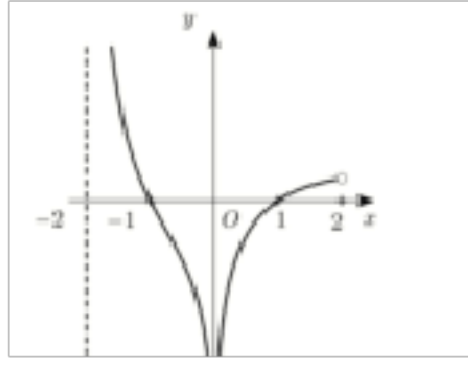
8. (天津市南开区 2022 届高三下学期三模数学试题) 函数  $y = \frac{\ln x^2}{x+2}$ ,  $x \in (-2, 2)$  的图象大致为 ( ).



C.



D.



### 3.5 幂函数与一元二次函数（精练）（提升版）

#### 题组一 幂函数及总值

1. (2022·全国·高三专题练习) 已知幂函数  $y=f(x)$  经过点  $(3, \sqrt{3})$ , 则  $f(x)$  ( )

- A. 是偶函数, 且在  $(0, +\infty)$  上是增函数
- B. 是偶函数, 且在  $(0, +\infty)$  上是减函数
- C. 是奇函数, 且在  $(0, +\infty)$  上是减函数
- D. 是非奇非偶函数, 且在  $(0, +\infty)$  上是增函数

**【答案】D**

**【解析】** 设幂函数的解析式为  $y = x^\alpha$ ,

将点  $(3, \sqrt{3})$  的坐标代入解析式得  $3^\alpha = \sqrt{3}$ , 解得  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,

$y = x^{\frac{1}{2}}$ , 函数的定义域为  $[0, +\infty)$ , 是非奇非偶函数, 且在  $(0, +\infty)$  上是增函数,

故选: D.

2. (2022·全国·高三专题练习) 设  $\alpha \in \left\{-1, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$  则“ $f(x) = x^\alpha$  的图象经过  $(-1, -1)$ ”是“ $f(x) = x^\alpha$  为奇函数”的 ( )

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

**【答案】C**

**【解析】** 由  $\alpha \in \left\{-1, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$ ,

由  $f(x) = x^\alpha$  的图像经过  $(-1, -1)$ , 则  $\alpha$  的值为  $-1, 1, 3$ , 此时  $f(x) = x^\alpha$  为奇函数.

又当  $f(x) = x^\alpha$  为奇函数时, 则  $\alpha$  的值为  $-1, 1, 3$ , 此时  $f(x) = x^\alpha$  的图象经过  $(-1, -1)$ .

所以“ $f(x) = x^\alpha$  的图象经过  $(-1, -1)$ ”是“ $f(x) = x^\alpha$  为奇函数”的充要条件

故选: C

3. (2022·全国·高三专题练习) 下列命题中, 不正确的是 ( )

- A. 幂函数  $y=x^{-1}$  是奇函数
- B. 幂函数  $y=x^2$  是偶函数
- C. 幂函数  $y=x$  既是奇函数又是偶函数

D.  $y = x_2^+$  既不是奇函数，又不是偶函数

**【答案】 C**

**【解析】** 因为  $x^{-1} = \frac{1}{x}$ ， $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$ ，所以 A 正确；

因为  $(-x)^2 = x^2$ ，所以 B 正确；

因为  $-x = x$  不恒成立，所以 C 不正确；

因为  $y = x_2^+$  定义域为  $[0, +\infty)$ ，不关于原点对称，所以 D 正确。

故选：C。

4. (2022·上海市实验学校高三阶段练习) 若函数  $f(x) = (m+3)x^a$  ( $m, a \in \mathbf{R}$ ) 是幂函数，且其图象过点  $(2, \sqrt{2})$ ，则函数  $g(x) = \log_a(x^2 + mx - 3)$  的单调递增区间为\_\_\_\_\_。

**【答案】**  $(-\infty, -1)$

**【解析】** 因为函数  $f(x) = (m+3)x^a$  ( $m, a \in \mathbf{R}$ ) 是幂函数，所以  $m+3=1$ ，解得  $m=-2$ ，

又其图象过点  $(2, \sqrt{2})$ ，所以  $2^a = \sqrt{2}$ ，所以  $a = \frac{1}{2}$ ，

则  $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 3)$ ，则  $x^2 - 2x - 3 > 0$ ，解得  $x > 3$  或  $x < -1$ ，

令  $\mu = x^2 - 2x - 3$ ，则函数  $\mu = x^2 - 2x - 3$  在  $(3, +\infty)$  上递增，在  $(-\infty, -1)$  上递减，

又因函数  $y = \log_{\frac{1}{2}} \mu$  为减函数，所以函数  $g(x)$  的单调递增区间为  $(-\infty, -1)$ 。故答案为：  $(-\infty, -1)$ 。

5. (2022·全国·高三专题练习) 设  $k \in \{-2, -1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2\}$ ，若  $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ ，且  $x^k > |x|$ ，则  $k$  取值的集合是\_\_\_\_\_。

**【答案】**  $\{-2, \frac{2}{3}\}$

**【解析】** 若  $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ ，且  $x^k > |x|$ ，

则幂函数  $y = x^k$  的图象一定在  $y = |x|$  的上方，

故  $y = x^k$  不可能为奇函数，即  $k$  不能取  $-1$  和  $\frac{1}{3}$ ，

当  $k$  取  $-2, \frac{2}{3}, 2$  时， $y = x^k$  是偶函数，故只需满足  $x \in (0, 1)$  即可，

此时  $x^k > x$ ，即  $x^{k-1} > 1$ ，则  $k-1 < 0$ ，即  $k < 1$ ，则  $k$  可取  $-2, \frac{2}{3}$ ，故  $k$  取值的集合是  $\{-2, \frac{2}{3}\}$ 。

故答案为:  $\{-2, \frac{2}{3}\}$ .

6. (2022·全国·高三专题练习) 幂函数  $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{m^2 - 2m - 1}$  在区间  $(0, +\infty)$  上是增函数, 求实数  $m$  的取值集合\_\_\_\_\_.

【答案】  $\{-1\}$

【解析】 由题得  $m^2 - m - 1 = 1$ , 所以  $m = -1$  或  $m = 2$ .

当  $m = -1$  时,  $f(x) = x^2$  在  $(0, +\infty)$  上是增函数;

当  $m = 2$  时,  $f(x) = x^{-1}$  在  $(0, +\infty)$  上不是增函数, 舍去.

故所求实数  $m$  的取值集合为  $\{-1\}$ .

### 题组二 一元二次函数

1. (2022·全国·高三专题练习) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - (3a+1)x + 2, & x < 1 \\ a^x, & x \geq 1 \end{cases}$ , 若函数  $f(x)$  在  $R$  上为减函数, 则

实数  $a$  的取值范围为 ( )

A.  $[\frac{1}{3}, 1)$

B.  $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

C.  $(0, \frac{1}{3}]$

D.  $[\frac{1}{2}, 1)$

【答案】 B

【解析】 因为函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - (3a+1)x + 2, & x < 1 \\ a^x, & x \geq 1 \end{cases}$  在  $R$  上为减函数, 所以  $\begin{cases} \frac{3a+1}{2} \geq 1 \\ 0 < a < 1 \\ 1^2 - (3a+1) + 2 \geq a^1 \end{cases}$ , 解得  $\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{2}$ ,

所以实数  $a$  的取值范围为  $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ , 故选: B.

2. (2022·江西上饶·高三阶段练习(理)) 函数  $f(x) = ax|a-x| (a \in R)$  在区间  $(-\infty, 2)$  上单调递增, 则实

数  $a$  的取值范围 ( )

A.  $[2, 4)$

B.  $[4, +\infty)$

C.  $(2, +\infty)$

D.  $(4, +\infty)$

【答案】 B 【解析】 由题设,  $f(x) = \begin{cases} a^2x - ax^2, & x \leq a \\ ax^2 - a^2x, & x > a \end{cases}$ , 且各区间上对应的二次函数的对称轴均为  $x = \frac{a}{2}$ ,

又  $a = 0$  时  $f(x) = 0$  不合题设, 所以  $a \neq 0$ .

当  $a > 0$  时，在  $x \leq a$  上  $f(x)$  开口向下，即  $(-\infty, \frac{a}{2})$  上递增， $(\frac{a}{2}, a)$  上递减；当  $x > a$  上  $f(x)$  开口向上，即  $(a, +\infty)$  上递增；

当  $a < 0$  时，在  $x \leq a$  上  $f(x)$  开口向上，即  $(-\infty, a)$  上递减；当  $x > a$  上  $f(x)$  开口向下，即  $(a, \frac{a}{2})$  上递增， $(\frac{a}{2}, +\infty)$  上递减；

综上，要使  $f(x)$  在  $(-\infty, 2)$  上单调递增，有  $\begin{cases} a > 0 \\ \frac{a}{2} \geq 2 \end{cases}$ ，可得  $a \geq 4$ 。

故选：B。

3. (2022·浙江·高三学业考试) 已知函数  $f(x) = x^2 - 2ax + b$  在区间  $(-\infty, 1]$  是减函数，则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $[1, +\infty)$       B.  $(-\infty, 1]$       C.  $[-1, +\infty)$       D.  $(-\infty, -1]$

【答案】A

【解析】 $f(x) = x^2 - 2ax + b$  对称轴为  $x = a$ ，开口向上，要想在区间  $(-\infty, 1]$  是减函数，所以  $a \in [1, +\infty)$ 。

故选：A

4. (2022·全国·高三专题练习) 二次函数  $f(x) = x^2 + 2ax - 1$  在区间  $(-\infty, 1)$  上单调递减的一个充分不必要条件为 ( )

- A.  $a \leq 0$       B.  $a \leq -\frac{1}{2}$       C.  $a \leq -1$       D.  $a \leq -2$

【答案】D

【解析】因为  $f(x) = x^2 + 2ax - 1$  的对称轴为  $x = -a$ ，开口向上，所以  $-a \geq 1$ ，解得  $a \leq -1$ ，所以二次函数  $f(x) = x^2 + 2ax - 1$  在区间  $(-\infty, 1)$  上单调递减的充要条件为  $a \leq -1$ ，

所以二次函数  $f(x) = x^2 + 2ax - 1$  在区间  $(-\infty, 1)$  上单调递减的一个充分不必要条件为  $a \leq -2$ ；

故选：D

5. (2022·河北·石家庄二中模拟预测) 设  $a \in \mathbb{R}$ ，函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 9, & x \leq 1 \\ x^2 + \frac{16}{x} - 3a, & x > 1 \end{cases}$ ，若  $f(x)$  的最小值为  $f(1)$ ，

则实数  $a$  的取值范围为 ( )

- A.  $[1, 2]$       B.  $[1, 3]$       C.  $[0, 2]$       D.  $[2, 3]$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/837010132044006034>