河北省名校联合体2023-2024学年高三下学期2月开学测试

数学试题

学校:_____姓名：_____班级：_____考号：_____

一、单选题

1．已知一组数据3，7，4，11，15，6，8，13，去掉一个最大值和一个最小值后所得数据的上四分位数为（　）

A．4　　B．6　　C．11　　D．13

2．已知向量$|\vec{a}|=10,|\vec{b}|=12,$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=-60$，则向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　　）

A．60°　　B．120°

C．135°　　D．150°

3．若$\alpha\in[0,\pi]$，则“$\alpha=\dfrac{\pi}{9}$”是“$\sin 2\alpha=\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$”的（　）

A．充要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

4．某单位春节共有四天假期，但每天都需要留一名员工值班，现从甲、乙、丙、丁、戊、己六人中选出四人值班，每名员工最多值班一天.已知甲在第一天不值班，乙在第四天不值班，则值班安排共有（　）

A．184种　　B．196种　　C．252种　　D．268种

5．已知$\sin x+\cos x=\dfrac{1}{3}$，则$\sin^3 x+\cos^3 x$的值为（　）

A．$\dfrac{7}{27}$　　B．$\dfrac{9}{27}$　　C．$\dfrac{11}{27}$　　D．$\dfrac{13}{27}$

6．已知集合$A=\{z\mid z=\mathrm{i}^n+\dfrac{1}{\mathrm{i}^n},n\in\mathbf{N}^*\}$，则A的元素个数为（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

7．在四面体$ABCD$中，$AB=\sqrt{3}$，$AD=BC=1$，$CD=\sqrt{6}$，且$\angle BAD=\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$，则该四面体的外接球表面积为（　）

A．$\dfrac{7}{2}\pi$　　B．7π　　C．8π　　D．10π

8．已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，设$F_1$是$C$的左焦点，$P\left(0,-\sqrt{3\left(a^2+b^2\right)}\right)$，连接$PF_1$交双曲线$C$于$Q$.若$QO\perp PF_1$，则$C$的离心率的值为（　）

A．$\frac{\sqrt{15}+1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{13}+1}{6}$　　C．$\frac{\sqrt{13}-1}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{13}+1}{3}$

二、多选题

9．下列式子中最小值为 4 的是（　）

A．$\sin^2 x+\frac{4}{\sin^2 x}$　　B．2^x+2^{2-x}

C．$8+\log_2(2x)\cdot\log_2\frac{x}{8}$　　D．$\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}$

10．在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，若 $a\cos B+b\sin A=c$，$a=2\sqrt{10},a^2+b^2-c^2=ab\sin C$，则（　）

A．$\tan C=2$　　B．$A=\frac{\pi}{3}$

C．$b=6\sqrt{2}$　　D．$\triangle ABC$ 的面积为 $12\sqrt{2}$

11．欧拉函数 $\varphi(n)\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$ 是数论中的一个基本概念，$\varphi(n)$ 的函数值等于所有不超过正整数 n，且与 n 互质的正整数的个数（只有公因数 1 的两个正整数互质，且 1 与所有正整数（包括 1 本身）互质），例如 $\varphi(8)=4$，因为 1，3，5，7 均与 8 互质，则（　）

A．$\varphi(4)\cdot\varphi(6)=\varphi(10)$　　B．数列 $\varphi(2n)$ 单调递增

C．$\varphi(100)=40$　　D．数列 $\left\{\frac{\varphi(2^n)}{\varphi(3^n)}\right\}$ 的前 n 项和小于 $\frac{3}{2}$

三、填空题

12．已知二项式 $(x+0.01)^n$ 的二项式系数的和为 1024，则 $n=$_____.试估算 $x=1$ 时，$(x+0.01)^n$ 的值为_____.（精确到 0.001）

13．蒙日是法国著名的数学家，他首先发现椭圆的两条相互垂直的切线的交点的轨迹是圆，所以这个圆又被叫做“蒙日圆”，已知点 A、B 为椭圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$0<b<\sqrt{3}$）上任意两个动点，动点 P 在直线 $4x+3y-10=0$ 上，若 $\angle APB$ 恒为锐角，则根据蒙日圆的相关知识，可知椭圆 C 的离心率的取值范围为_____

14．在数列 $\{a_n\}$ 中，满足 $a_n+a_{n+1}=2023n^2+2024n$，则 $\frac{a_{2023}}{a_{2022}}$ 的值为_____.

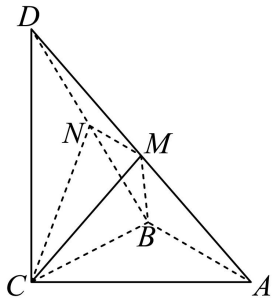
四、解答题

15．已知圆 C 经过两点 $A(-2,-2)$，$B(6,2)$，且圆心在直线 $x-2y+3=0$ 上.

(1)求圆 C 的方程；

(2)过点 $P(-2,-4)$ 作直线 l 与圆 C 交于 M，N 两点，若 $|MN|=8$，求直线 l 的方程.

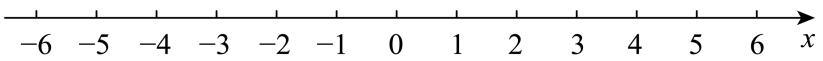
16. 在如图所示的三棱锥 $D-ABC$ 中，$AB\perp BD$，$BC\perp CD$，M,N 分别是线段 AD,BD 的中点，且 $MC=1, AB=BD=\sqrt{2}$.



(1)证明：直线 $MN\perp$ 平面 DBC；

(2)若二面角 $D-BA-C$ 的大小为 60°，求直线 BM 和平面 MNC 所成角的余弦值.

17．如图，一个质点在随机外力的作用下，从原点 O 出发，随机移动 n 次，每次等可能地向左或向右移动一个单位长度，n 次移动结束后，质点到达的位置的数字记为 X.



(1)若 $n=2$，求 $P(X=0)$；

(2)若 $n=6$，求 X 的分布列和 $E(X)$ 的值.

18．已知函数 $f(x)=(x+a)(\mathrm{e}^x-a)$，$g(x)=4\mathrm{e}^x-ax$，$h(x)=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{2ax}-ax$

(1)若 $f(x)$、$g(x)$ 在 $(2,f(2))$ 处切线的斜率相等，求 a 的值；

(2)若方 $\frac{f'(x)-g'(x)}{g'(2x)-h'(x)}=a$ 有两个实数根 x_1，x_2，试证明：$\frac{\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}}{2}>\mathrm{e}^3$；

(3)若方程 $f(x)=b$ 有两个实数根 x_1，x_2，试证明：$|x_1-x_2|\le 1+\frac{b+\mathrm{e}+1}{3\mathrm{e}-1}+\frac{\mathrm{e}b}{\mathrm{e}-1}$.

19．菲波纳契数列 $\{F_n\}$ 又称“兔子数列”“黄金分割数列”，是由 13 世纪的意大利数学家菲波纳契提出的，其定义是从数列的第三项开始，每一项都等于前两项的和，即满足 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.规定 $F_1=1$，$F_2=1$.

(1)试证明：$F_1^2+F_2^2+F_3^2+\cdots+F_n^2=F_n\cdot F_{n+1}$；

(2)求数列 $\{F_n\}$ 的通项公式；

(3)试证明：$n\to+\infty$ 时，$\frac{F_n}{F_{n+1}}\approx\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

参考答案：

1．C

【分析】把新数据按由小到大排列，利用上四分位数的定义求解即得.

【详解】依题意，所得新数据按由小到大排列为：4，6，7，8，11，13，

由$6\times75\%=4.5$，得所得数据的上四分位数为 11.

故选：C

2．B

【分析】根据两向量的夹角公式，结合夹角的范围计算即得.

【详解】设向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，则$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-60}{120}=-\dfrac{1}{2}$，

又$0^\circ\le\theta\le180^\circ$，故$\theta=120^\circ$.

故选：B.

3．B

【分析】结合三角函数的诱导公式，判断“$\alpha=\dfrac{\pi}{9}$”和“$\sin2\alpha=\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$”之间的逻辑推理关系，即可得答案.

【详解】当$\alpha=\dfrac{\pi}{9}$时，$\sin2\alpha=\sin\dfrac{2\pi}{9}$，$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{5\pi}{18}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{5\pi}{18}\right)=\sin\dfrac{2\pi}{9}$，

即$\sin2\alpha=\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$成立；

又因为$\sin2\alpha=\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$，

所以$2\alpha=\dfrac{\pi}{3}-\alpha+2k\pi,k\in Z$或$2\alpha+\dfrac{\pi}{3}-\alpha=\pi+2k\pi,k\in Z$，

结合$\alpha\in[0,\pi]$，解得$\alpha=\dfrac{\pi}{9}$或$\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$或$\alpha=\dfrac{7\pi}{9}$，

即$\sin2\alpha=\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$成立，推不出$\alpha=\dfrac{\pi}{9}$，

故“$\alpha=\dfrac{\pi}{9}$”是“$\sin2\alpha=\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$”的充分不必要条件.

故选：B

4．C

【分析】采用间接法可直接得到答案.

【详解】从甲、乙、丙、丁、戊、己六人中选出四人安排到假期的四天值班，一共有$A_6^4=360$种方法；

甲在第一天值班有 $A_5^3=60$ 种方法；乙在第四天值班有 $A_5^3=60$ 种方法；

甲在第一天值班且乙在第四天值班有 $A_4^2=12$ 种方法；

因此从甲、乙、丙、丁、戊、己六人中选出四人值班，甲在第一天不值班，乙在第四天不值班共有 $360-60-60+12=252$ 种方法，

故选：C.

5．D

【分析】由 $\sin x+\cos x=\frac{1}{3}$，求得 $\sin x\cos x=-\frac{4}{9}$，利用立方和公式因式分解得 $\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)$，代入数据计算即可.

【详解】由 $\sin x+\cos x=\frac{1}{3}$，有 $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x=\frac{1}{9}$，得 $\sin x\cos x=-\frac{4}{9}$，

$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)=\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{4}{9}\right)=\frac{13}{27}$.

故选：D

6．C

【分析】根据复数的四则运算求出复数 z，得出复数的周期性，即可判断集合中的元素个数.

【详解】当 $n=1$ 时，$z=\mathrm{i}+\frac{1}{\mathrm{i}}=\mathrm{i}-\mathrm{i}=0$，当 $n=2$ 时，$z=\mathrm{i}^2+\frac{1}{\mathrm{i}^2}=-1-1=-2$，

当 $n=3$ 时，$z=\mathrm{i}^3+\frac{1}{\mathrm{i}^3}=-\mathrm{i}-\frac{1}{\mathrm{i}}=0$，当 $n=4$ 时，$z=\mathrm{i}^4+\frac{1}{\mathrm{i}^4}=1+1=2$，

当 $n=5$ 时，$z=\mathrm{i}^5+\frac{1}{\mathrm{i}^5}=\mathrm{i}+\frac{1}{\mathrm{i}}=\mathrm{i}-\mathrm{i}=0$，当 $n=6$ 时，$z=\mathrm{i}^6+\frac{1}{\mathrm{i}^6}=\mathrm{i}^2+\frac{1}{\mathrm{i}^2}=-1-1=-2$，

当 $n=7$ 时，$z=\mathrm{i}^7+\frac{1}{\mathrm{i}^7}=\mathrm{i}^3+\frac{1}{\mathrm{i}^3}=-\mathrm{i}-\frac{1}{\mathrm{i}}=0$，当 $n=8$ 时，$z=\mathrm{i}^8+\frac{1}{\mathrm{i}^8}=\mathrm{i}^4+\frac{1}{\mathrm{i}^4}=1+1=2$，

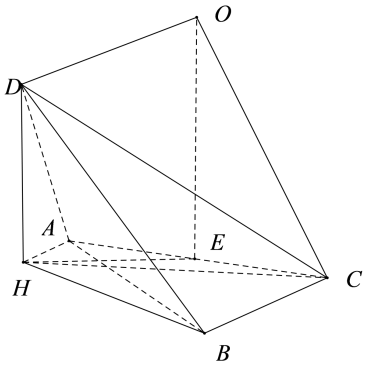
L ，可知以上四种情况循环，故集合 $A=\{0,-2,2\}$，A 的元素个数为 3.

故选：C

7．B

【分析】根据题设条件作出四面体的高 DH，通过相关条件推理计算分别求出 AH,DH，最后在直角梯形 $HEOD$，利用勾股定理列出方程即可求得外接球半径.

【详解】



如图，作 $DH\perp$ 平面 ABC，连接 AH,HB,HC，易得 $DH\perp AB$,因 $AB\perp AD$，

$AD\cap DH=D,AD,DH\subset$ 平面 DAH，

所以 $AB\perp$ 平面 DAH，$AH\subset$ 平面 DAH，故 $AB\perp AH$，

由题可得 $\angle BAC=30^\circ$，$AC=2$，则 $\angle HAC=120^\circ$.

不妨设 $AH=x,DH=h$，则有 $x^2+h^2=1$①，

在 $\triangle HAC$ 中，由余弦定理，$HC^2=x^2+4-2\times 2x\cos 120^\circ=x^2+2x+4$，在 $\triangle HDC$ 中，

$h^2+x^2+2x+4=6$②，

将两式相减化简即得：$x=\dfrac{1}{2}$，$h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

取线段 AC 中点 E，过点 E 作 $OE\perp$ 平面 ABC，其中点 O 为外接球的球心，设外接球半径为 R，

由余弦定理求得 $HE^2=\dfrac{1}{4}+1-2\times\dfrac{1}{2}\cos 120^\circ=\dfrac{7}{4}$，

在直角梯形 $HEOD$ 中，$OE^2=R^2-1$，由 $R^2=(\sqrt{R^2-1}-\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2+\dfrac{7}{4}$ 计算可得：$R^2=\dfrac{7}{4}$，则该四面体的外接球表面积为 7π.

故选：B.

【点睛】方法点睛：本题主要考查四面体的外接球的表面积，属于中档题.

求解多面体的外接球的主要方法有：

（1）构造模型法:即寻找适合题意的长方体，正方体，圆柱等几何体，借助于这些几何体迅速求得外接球半径；

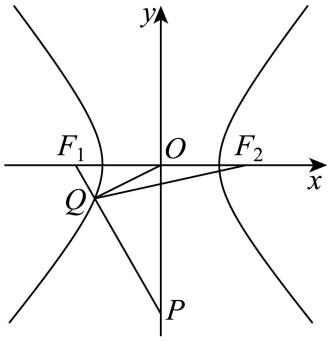
（2）建立直角梯形或直角三角形法：即先找到底面多边形的外心，作出外接球球心，借助于题设中的条件得到多面体的高，构成直角梯形或直角三角形来求解.

8．D

【分析】作出图形，计算出 $\angle OF_1P$ 的大小，可得出 $|QF_1|$，利用余弦定理求出 $|QF_2|$，然后利

用双曲线的定义可得出关于a、c的等式，即可解得该双曲线离心率的值.

【详解】如下图所示：



设$c=\sqrt{a^2+b^2}$，由题意可得$|OF_1|=c$，$|OP|=\sqrt{3}c$，

则$\tan\angle OF_1P=\dfrac{|OP|}{|OF_1|}=\dfrac{\sqrt{3}c}{c}=\sqrt{3}$，且$0<\angle OF_1P<\dfrac{\pi}{2}$，所以，$\angle OF_1P=\dfrac{\pi}{3}$，

因为$QO\perp PF_1$，则$|QF_1|=|OF_1|\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}c$，

由余弦定理可得$|QF_2|^2=|F_1F_2|^2+|QF_1|^2-2|F_1F_2|\cdot|QF_1|\cos\dfrac{\pi}{3}=4c^2+\dfrac{1}{4}c^2-2\times2c\times\dfrac{1}{2}c\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{13}{4}c^2$，

所以，$|QF_2|=\dfrac{\sqrt{13}}{2}c$，由双曲线的定义可得$|QF_2|-|QF_1|=2a$，

即$\dfrac{\sqrt{13}}{2}c-\dfrac{1}{2}c=2a$，故该双曲线的离心率为$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\frac{\sqrt{13}-1}{2}}=\dfrac{\sqrt{13}+1}{3}$.

故选：D.

【点睛】方法点睛：求解椭圆或双曲线的离心率的方法如下：

（1）定义法：通过已知条件列出方程组，求得a、c的值，根据离心率的定义求解离心率e的值；

（2）齐次式法：由已知条件得出关于a、c的齐次方程，然后转化为关于e的方程求解；

（3）特殊值法：通过取特殊位置或特殊值，求得离心率.

9．BCD

【分析】对于 ABD，利用基本不等式运算求解；对于 C，运用对数运算及二次函数的最值可判断.

【详解】对于选项 A：$\sin^2x+\dfrac{4}{\sin^2x}\geq2|\sin x|\cdot\left|\dfrac{2}{\sin x}\right|=4$,

当且仅当$|\sin x|=\left|\dfrac{2}{\sin x}\right|$，即当且仅当$\sin x=\pm\sqrt{2}$时等号成立，

但$\sin x=\pm\sqrt{2}$不成立，所以$\sin^2 x+\dfrac{4}{\sin^2 x}$的最小值不为4，故A错误；

对于选项B：因为$2^x>0,2^{-x}>0$，则$2^x+2^{2-x}\geq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{2-x}}=4$，

当且仅当$2^x=2^{2-x}$，即$x=1$时，等号成立，

所以2^x+2^{2-x}的最小值为4，故B正确；

对于选项C：$8+\log_2(2x)\cdot\log_2\dfrac{x}{8}=8+(1+\log_2 x)(\log_2 x-3)$

$=\log_2^2 x-2\log_2 x+5=(\log_2 x-1)^2+4$，

当$x=2$时，取得最小值4，故C成立；

对于选项D：由题意$\sin^2 x>0,\cos^2 x>0$，

则$\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}=(\sin^2 x+\cos^2 x)\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)=\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+2$，

$\geq 2\sqrt{\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}+2=4$，

当且仅当$\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$，即$\tan x=\pm 1$时，等号成立，故D正确.

故选：BCD.

10．AC

【分析】根据$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C=ab\sin C$及余弦定理可判断A；根据$a\cos B+b\sin A=c$及正弦定理可判断B；由$\tan C$的值及同角三角函数的基本关系可求$\cos C$，$\sin C$，根据正弦定理求出$c$，代入$a^2+b^2-c^2=ab\sin C$求出$b$可判断C；根据三角形面积公式可判断D.

【详解】由余弦定理可得$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C=ab\sin C$，解得$\tan C=2$，故A正确；

由$a\cos B+b\sin A=c$及正弦定理，可得$\sin A\cos B+\sin B\sin A=\sin C=\sin(A+B)$，

化简可得$\sin B\sin A=\cos A\sin B$.

因为$B\in(0,\pi)$，所以$\sin B>0$，所以$\sin A=\cos A$，即$\tan A=1$.

因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\dfrac{\pi}{4}$，故B错误；

因为$\tan C=2$，所以$\cos C>0$且$\sin C=2\cos C$，代入$\sin^2 C+\cos^2 C=1$，

可得$5\cos^2 C=1$，解得$\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin C=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

因为$a=2\sqrt{10}$，$A=\dfrac{\pi}{4}$，$\sin C=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以由正弦定理可得$c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{10}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=8$，

由$a^2+b^2-c^2=ab\sin C$，可得$\left(2\sqrt{10}\right)^2+b^2-8^2=2\sqrt{10}b\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

化简可得$b^2-4\sqrt{2}b-24=0$，解得$b=6\sqrt{2}$或$b=-2\sqrt{2}$（舍），故C正确；

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times8\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=24$.

故选:AC.

11．ACD

【分析】A，由题意可得$\varphi(4)$，$\varphi(6)$，$\varphi(10)$，即可判断选项正误；B，由A选项可判断选项正误；C，注意到$100=2^2\times5^2$，则从1到100个整数中去掉能被2或5整除的数，即可得与100互质的数，即$\varphi(100)$；D，由C选项分析结合题意可得$\dfrac{\varphi\left(2^n\right)}{\varphi\left(3^n\right)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$，后由等比数列前$n$项和公式可判断选项正误.

【详解】A选项，由题可知与4互质的数为1，3，则$\varphi(4)=2$；与6互质的数为1，5，则$\varphi(6)=2$；与10互质的数为1，3，7，9，则$\varphi(10)=4$，故$\varphi(4)\cdot\varphi(6)=\varphi(10)$，即A正确；

B选项，由A选项可知，$\varphi(4)=\varphi(6)=2$，故数列$\varphi(2n)$不是单调递增数列，即B错误；

C选项，注意到$100=2^2\times5^2$，则从1到100，这100个整数中，被2整除的有50个，被5整除的有20个，同时被2和5整除的有10个，则从1到100，这100个整数中，不能被被2或5整除的数，即与100互质的数的个数为$100-50-20+10=40$个，则$\varphi(100)=40$，故C正确；

D选项，由C选项分析可知，与2^n互质的数，就是从1到2^n，这2^n个整数中去掉所有的2的倍数.

其中2的倍数有2^{n-1}个，则$\varphi\left(2^n\right)=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，同理可得$\varphi\left(3^n\right)=3^n-3^{n-1}=2\cdot3^{n-1}$.则$\dfrac{\varphi\left(2^n\right)}{\varphi\left(3^n\right)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/837043151016006046