专题 16 圆锥曲线焦点弦

微点 3 圆锥曲线焦点弦长公式及其应用

【微点综述】

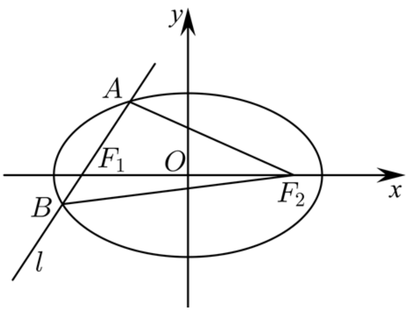
过圆锥曲线焦点的直线与该圆锥曲线相交于两点，则称这两个交点间的线段为圆锥曲线的焦点弦．关于直线与圆锥曲线相交求弦长，通用方法是将直线方程（如 $y=kx+b$，$x=my+n$）代入圆锥曲线方程，化为关于 x（或 y）的一元二次方程，设出交点坐标，利用韦达定理及弦长公式 $\sqrt{\left(1+k^2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2\right]}$（或 $\sqrt{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\left[\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2\right]}$）求出弦长．这种整体代换，设而不求的思想方法对于求直线与曲线相交弦长是十分有效的，然而对于过焦点的圆锥曲线弦长求解利用这种方法相比较而言有点繁琐．利用圆锥曲线定义及余弦定理等导出圆锥曲线的焦点弦长公式较为简捷．

一、圆锥曲线倾斜角式焦点弦长公式

1．椭圆的倾斜角式焦点弦长公式

例 1

1．如图，F_1,F_2 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，过 F_1 倾斜角为 θ 的直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点，求弦长 $|AB|$．



【结论 1】椭圆的倾斜角式焦点弦长公式：

（1）F_1,F_2 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，过 F_1 倾斜角为 θ 的直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点，则 $|AB|=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}=\frac{2p}{1-e^2\cos^2\theta}\left(p=\frac{b^2}{a}\right)$；

（2）F_1,F_2 为椭圆 $C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上、下焦点，过 F_1 倾斜角为 θ 的直线 l 与椭圆 C

交于 A,B 两点，则 $|AB|=\dfrac{2ab^2}{a^2-c^2\sin^2\theta}=\dfrac{2p}{1-e^2\sin^2\theta}\left(p=\dfrac{b^2}{a}\right)$.

说明：特殊情形，当倾斜角为 $\theta=90^\circ$ 时，即为椭圆的通径，通径长 $|AB|=\dfrac{2b^2}{a}$.

2．双曲线的倾斜角式焦点弦长公式

例 2

2．设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，其中两焦点坐标为 $F_1(-c,0)$ $F_2(c,0)$，过 F_1 的直线 l 的倾斜角为 θ，交双曲线于 A，B 两点，求弦长 $|AB|$.

可得如下结论 2：

【结论 2】双曲线的倾斜角式焦点弦长公式：

（1）F_1,F_2 为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，过 F_1 倾斜角为 θ 的直线 l 与双曲线 C 交于 A,B 两点，则 $|AB|=\dfrac{2ab^2}{|a^2-c^2\cos^2\theta|}=\dfrac{2p}{|1-e^2\cos^2\theta|}\left(p=\dfrac{b^2}{a}\right)$.

（2）F_1,F_2 为双曲线 $C:\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的上、下焦点，过 F_1 倾斜角为 θ 的直线 l 与双曲线 C 交于 A,B 两点，则 $|AB|=\dfrac{2ab^2}{|a^2-c^2\sin^2\theta|}=\dfrac{2p}{|1-e^2\sin^2\theta|}\left(p=\dfrac{b^2}{a}\right)$.

说明：特殊情形，当倾斜角为 $\theta=90^\circ$ 时，即为双曲线的通径，通径长 $2p=\dfrac{2b^2}{a}$.

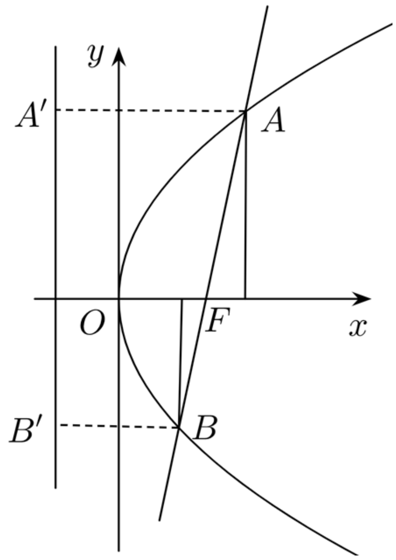
例 3

3. 过双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{8}=1$ 的右焦点 F 作倾斜角为 45° 的直线，交双曲线于 A,B 两点，求弦长 $|AB|$.

3．抛物线的的倾斜角式焦点弦长公式

例 4

4．如图，抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 与过焦点 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$ 的直线 l 相交于 A,B 两点，若 l 的倾斜角为 θ，求弦长 $|AB|$.



【结论 3】抛物线的焦点弦长：$|AB|=\begin{cases}\dfrac{2|p|}{\sin^2\theta}(\text{焦点在}x\text{轴上})\\ \dfrac{2|p|}{\cos^2\theta}(\text{焦点在}y\text{轴上})\end{cases}$.

例 5

5．斜率为$\sqrt{3}$的直线过抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点，且与 C 交于 A，B 两点，则$|AB|$

=_______.

由以上三种情况可知利用直线倾斜角求过焦点的弦长，非常简单明确，应予以掌握.

由以上讨论可以得到圆锥曲线统一的倾斜角式焦点弦长公式

【结论 4】圆锥曲线统一的倾斜角式焦点弦长公式：

设直线l过圆锥曲线焦点F且交圆锥曲线于A,B两点，若已知直线l倾斜角为θ，设圆锥曲线通径为$2p=\dfrac{2b^2}{a}$，则圆锥曲线统一的焦点弦长公式：

$$|AB|=\begin{cases}\dfrac{2p}{1-e^2\cos^2\theta}(\text{焦点在}x\text{轴上})\\ \dfrac{2p}{1-e^2\sin^2\theta}(\text{焦点在}y\text{轴上})\end{cases}.$$

例 6

6．过双曲线$x^2-y^2=4$的右焦点F作倾斜角为$150°$直线，交双曲线于A,B两点，求弦长

$|AB|$.

二、圆锥曲线夹角式焦点弦长公式

下面先利用双曲线的第二定义推导出双曲线的焦点弦长公式，在相关计算中就更为简捷.

先看例题：

例 7

7．已知点 F 和直线 l 是离心率为 e 的双曲线 C 的焦点和对应准线，焦准距（焦点到对应准线的距离）为 p．过点 F 的弦 AB 与曲线 C 的焦点所在的轴的夹角为 $\theta\left(0^\circ<\theta\leq 90^\circ\right)$，则有

$$|AB|=\frac{2ep}{\left|1-e^2\cos^2\theta\right|}.$$

【结论 5】双曲线的夹角式弦长公式：

已知点 F 和直线 l 是离心率为 e 的双曲线 C 的焦点和对应准线，焦准距（焦点到对应准线的距离）为 p．过点 F 的弦 AB 与曲线 C 的焦点所在的轴的夹角为 $\theta\in\left(0^\circ,90^\circ\right]$，则有

$$|AB|=\frac{2ep}{\left|1-e^2\cos^2\theta\right|}.$$

注意：夹角不是直线的倾斜角，而是直线与焦点所在轴的夹角，这样就不需要区分焦点在 x 轴上还是 y 轴上．

例 8

8. 过双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$ 的右焦点 F 作倾斜角为 45° 的直线，交双曲线于 A,B 两点，求弦长 $|AB|$.

三、圆锥曲线坐标式焦点弦长公式

1．椭圆的坐标式焦点弦长公式

例 9

9．已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，若过左焦点的直线交椭圆于 A,B 两点，求 $|AB|$.

【结论 6】椭圆的坐标式焦点弦长公式：

（1）椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点弦长公式：

$|AB|=2a+e\left(x_A+x_B\right)$（过左焦点）； $|AB|=2a-e\left(x_A+x_B\right)$（过右焦点），即

$|AB|=2a-e\left|x_A+x_B\right|$；

（2）椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点弦长公式：

$|AB|=2a-e\left(y_A+y_B\right)$（过上焦点）；$|AB|=2a+e\left(y_A+y_B\right)$（过下焦点），即

$|AB|=2a-e\left|y_A+y_B\right|$.

例 10

10．已知椭圆$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$的左右焦点分别为$F_1$，$F_2$，若过点$P(0,-2)$及$F_1$的直线交椭圆于$A$，$B$两点，求$|AB|$.

2．双曲线的坐标式焦点弦长公式

例 11

11．设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，其中两焦点坐标为$F_1(-c,0),F_2(c,0)$，经过右焦点的直线交双曲线于$A$、$B$两点，求弦长$|AB|$.

我们有如下结论：

【结论 6】双曲线的坐标式焦点弦长公式：

（1）双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦点弦长公式：

同支弦$|AB|=e|x_A+x_B|-2a=\frac{2ab^2(1+k^2)}{a^2k^2-b^2}$；异支弦$|AB|=2a-e|x_A+x_B|=\frac{2ab^2(1+k^2)}{b^2-a^2k^2}$，统一为：$|AB|=\left|e|x_A+x_B|-2a\right|=\frac{2ab^2(1+k^2)}{|a^2k^2-b^2|}$；

（2）双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦点弦长公式：

同支弦$|AB|=e|y_A+y_B|-2a$；异支弦$|AB|=2a-e|y_A+y_B|$，统一为：

$|AB|=\left|e|y_A+y_B|-2a\right|$.

3．抛物线的坐标式焦点弦长公式

由抛物线的定义易得

【结论 7】抛物线的坐标式焦点弦长公式：

（1）抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点弦长公式：$|AB|=p+(x_A+x_B)$；

（2）抛物线$y^2=-2px(p>0)$的焦点弦长公式：$|AB|=p-(x_A+x_B)$；

（3）抛物线$x^2=2py(p>0)$的焦点弦长公式：$|AB|=p+(y_A+y_B)$；

（4）抛物线$x^2=-2py(p>0)$的焦点弦长公式：$|AB|=p-(y_A+y_B)$.

【强化训练】

12．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为 F 且斜率为$\sqrt{3}$的直线交 C 于 A、B 两点，若$\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{FB}$，则 C 的离心率为

A．$\frac{6}{5}$　　B．$\frac{7}{5}$　　C．$\frac{8}{5}$　　D．$\frac{9}{5}$

13．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，过右焦点$F$且斜率为$k(k>0)$的直线与$C$相交于$A,B$两点．若$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，则$k=$

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

14．过抛物线$y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点F作倾斜角为$45°$的直线交抛物线于A,B两点，若线段AB的长为8，则P=____.

15．过双曲线$x^2-y^2=4$的右焦点F作倾斜角为105°的直线，交双曲线于P、Q两点，则$|FP|\cdot|FQ|$的值为________.

16．过双曲线$x^2-y^2=4$的右焦点F作倾斜角为$150°$的直线，交双曲线于P,Q两点，则$|FP|\cdot|FQ|$的值为______.

17．过抛物线$x^2=2py(p>0)$的焦点F作倾角为$30°$的直线，与抛物线分别交于A、B两点（A在y轴左侧），则$\frac{|AF|}{|FB|}=$__________________.

18．已知F是椭圆C的一个焦点，B是短轴的一个端点，线段BF的延长线交C于点D，且$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FD}$，则$C$的离心率为____________

19．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$，过左焦点$F$且斜率为$k>0$的直线交$C$的两支于$A,B$两点．若$|FA|=3|FB|$，则$k=$_____________.

20．过抛物线$y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点F作倾斜角为$45°$的直线交抛物线于A,B两点，若线段AB的长为8，则P=____.

21．过双曲线$x^2-y^2=4$的右焦点F作倾斜角为105°的直线，交双曲线于P、Q两点，则$|FP|\cdot|FQ|$的值为________.

22．已知F为抛物线$C:y^2=4x$的焦点，过F作两条互相垂直的直线l_1,l_2，直线l_1与C交A，B两点，直线l_2与C交于D，E两点，则$|AB|+|DE|$的最小值为___.

23．过抛物线C：$y^2=4x$的焦点F，且斜率为$\sqrt{3}$的直线交C于点M(在x轴上方)，l为C的准线，点N在l上且$MN\perp l$，则点M到直线NF的距离为________.

24．已知椭圆$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{13}=1$，若过左焦点的直线交椭圆于A，$B$两点，且A，$B$两点的横坐标之和是$-7$，求$|AB|$.

25．过椭圆$3x^2+4y^2=48$椭圆的左焦点引直线交椭圆于A，B两点，$|AB|=7$，求直线方程.

26．过双曲线$x^2-y^2=4$的右焦点F作倾斜角为$30°$的直线，交双曲线于A、B两点，求弦长$|AB|$.

27．已知双曲线$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$的左右焦点分别为$F_1$，$F_2$，若过点$P$（0，-2）及$F_1$的直线交双曲线于$A$，$B$两点，求$\triangle ABF_2$的面积

28．过双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$的右焦点$F$作倾斜角为$135°$的直线，交双曲线于$A$、$B$两点，求弦长$|AB|$.

29．已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$的左右焦点分别为$F_1$，$F_2$，若过点$P(0,-2)$及$F_1$的直线交椭圆于$A$，$B$两点，求$\triangle ABF_2$的面积.

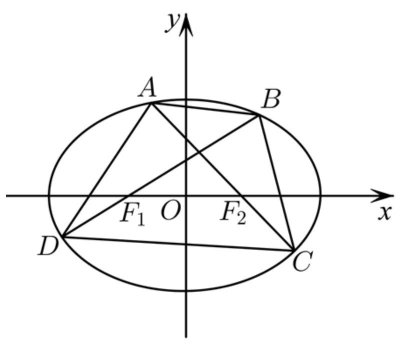
30．过双曲线$3x^2-4y^2=48$的左焦点引直线交双曲线于A，B两点，$|AB|=48$，求直线方程.

31．已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F$，经过$F$且倾斜角为$60°$的直线$l$与椭圆相交于不同两点$A,B$，已知$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$.

(1)求椭圆的离心率；

(2)若$|AB|=\frac{15}{4}$，求椭圆方程.

32．如图，已知椭圆$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，过$F_1$的直线交椭圆于$B,D$两点，过$F_2$的直线交椭圆于$A,C$两点，且$AC\perp BD$.求四边形面积的最小值.



参考答案：

1．$\dfrac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}$

【分析】由椭圆定义，结合余弦定理即可得出.

【详解】连结F_2A,F_2B，$|F_1F_2|=2c$，设$|F_1A|=x$，$|F_1B|=y$，

由椭圆定义得$|F_2A|=2a-x$，$|F_2B|=2a-y$，

在$\triangle AF_1F_2$中，由余弦定理得$|F_1A|^2+|F_1F_2|^2-2|F_1A|\cdot|F_1F_2|\cdot\cos\theta=|F_2A|^2$，即

$x^2+4c^2-2x\cdot 2c\cdot\cos\theta=(2a-x)^2$，

则$(a-c\cos\theta)x=a^2-c^2=b^2$，解得$x=\dfrac{b^2}{a-c\cos\theta}$.

同理在$\triangle BF_1F_2$中，由余弦定理可求得$y=\dfrac{b^2}{a+c\cos\theta}$，

则弦长$|AB|=\dfrac{b^2}{a-c\cos\theta}+\dfrac{b^2}{a+c\cos\theta}=\dfrac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}$.

2．答案见解析

【分析】分别讨论当直线与双曲线的交点在同一支上或在两支上时的焦半径长度，结合焦点三角形的性质可得解.

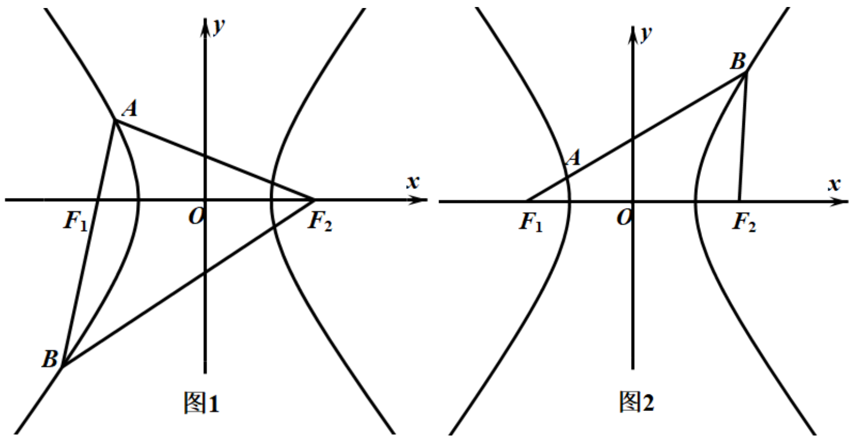
【详解】当$\arctan\dfrac{b}{a}<\theta<\pi-\arctan\dfrac{b}{a}$时，如图1，直线$l$与双曲线的两个交点A，$B$在同一支上，

连接F_2A，F_2B，设$|F_1A|=m$，$|F_1B|=n$，

由双曲线定义可得$|F_2A|=2a+m$，$|F_2B|=2a+n$，

由余弦定理可得$m^2+(2c)^2-2m\cdot 2c\cdot\cos\theta=(2a+m)^2$整理可得$m=\dfrac{b^2}{a+c\cos\theta}$，同理$n=\dfrac{b^2}{a-c\cos\theta}$，

则可求得弦长$|AB|=m+n=\dfrac{b^2}{a+c\cos\theta}+\dfrac{b^2}{a-c\cos\theta}=\dfrac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}$.



当$0\le\theta<\arctan\dfrac{b}{a}$或$\pi-\arctan\dfrac{b}{a}<\theta<\pi$时，如图 2，直线$l$与双曲线的两个交点A，$B$不在同一支上，

连接F_2A，F_2B，设$|F_1A|=m$，$|F_1B|=n$，

由双曲线定义可得$|F_2A|=2a+m$，$|F_2B|=n-2a$，

由余弦定理可得$m^2+(2c)^2-2m\cdot 2c\cdot\cos\theta=(2a+m)^2$整理可得$m=\dfrac{b^2}{a+c\cos\theta}$，

同理$n^2+(2c)^2-2n\cdot 2c\cdot\cos(\pi-\theta)=(n-2a)^2$，$n=\dfrac{b^2}{c\cos\theta-a}$，

则可求得弦长$|AB|=n-m=\dfrac{b^2}{c\cos\theta-a}-\dfrac{b^2}{a+c\cos\theta}=\dfrac{2ab^2}{c^2\cos^2\theta-a^2}$，

因此焦点在x轴的焦点弦长公式：

$$|AB|=\begin{cases}\dfrac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta},\arctan\dfrac{b}{a}<\theta<\pi-\arctan\dfrac{b}{a}\\ \dfrac{2ab^2}{c^2\cos^2\theta-a^2},\arctan\dfrac{a}{b}<\theta<\pi-\arctan\dfrac{a}{b}\end{cases}.$$

3．$|AB|$=16

【分析】利用公式$|AB|=\dfrac{2ab^2}{|a^2-c^2\cos^2\theta|}$计算可得；

【详解】解：双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{8}=1$中，$a=2$，$b=2\sqrt{2}$，所以$c=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{3}$，

利用公式$|AB|=\dfrac{2ab^2}{|a^2-c^2\cos^2\theta|}$，代入得$|AB|=\dfrac{2ab^2}{|a^2-c^2\cos^2\theta|}=\dfrac{2\times2\times8}{\left|4-12\times\dfrac{1}{2}\right|}$=16．

4．$|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\theta}$

【分析】设$|FA|=m$，$|FB|=n$，可得$x_A=\dfrac{p}{2}+m\cos\theta$，$x_B=\dfrac{p}{2}-n\cos\theta$，利用焦半径公式可构造方程求得$m,n$，由$|AB|=m+n$可得结果.

【详解】设$|FA|=m$，$|FB|=n$，则$x_A=\frac{p}{2}+m\cos\theta$，$x_B=\frac{p}{2}-n\cos\theta$，

由抛物线定义知：$|FA|=x_A+\frac{p}{2}=p+m\cos\theta=m$，$|FB|=x_B+\frac{p}{2}=p-n\cos\theta=n$，

$\therefore m=\frac{p}{1-\cos\theta}$，$n=\frac{p}{1+\cos\theta}$，

$\therefore |AB|=m+n=\frac{p}{1-\cos\theta}+\frac{p}{1+\cos\theta}=\frac{2p}{1-\cos^2\theta}=\frac{2p}{\sin^2\theta}$.

5．$\frac{16}{3}$

【分析】先根据抛物线的方程求得抛物线焦点坐标，利用点斜式得直线方程，与抛物线方程联立消去y并整理得到关于x的二次方程，接下来可以利用弦长公式或者利用抛物线定义将焦点弦长转化求得结果.

【详解】∵抛物线的方程为$y^2=4x$，∴抛物线的焦点F坐标为$F(1,0)$，

又∵直线AB过焦点F且斜率为$\sqrt{3}$，∴直线AB的方程为：$y=\sqrt{3}(x-1)$

代入抛物线方程消去y并化简得$3x^2-10x+3=0$，

解法一：解得$x_1=\frac{1}{3},x_2=3$

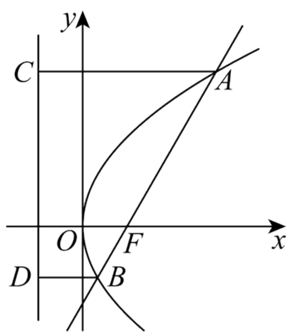
所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+3}\cdot|3-\frac{1}{3}|=\frac{16}{3}$

解法二：$\Delta=100-36=64>0$

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\frac{10}{3}$，

过A,B分别作准线$x=-1$的垂线，设垂足分别为C,D如图所示.

$|AB|=|AF|+|BF|=|AC|+|BD|=x_1+1+x_2+1=x_1+x_2+2=\frac{16}{3}$



故答案为：$\frac{16}{3}$

【点睛】本题考查抛物线焦点弦长，涉及利用抛物线的定义进行转化，弦长公式，属基础题.

6．8

【分析】利用双曲线的焦点弦长公式，根据已知条件直接得出弦长．

【详解】由双曲线$x^2-y^2=4$得$a=b=2,c=2\sqrt{2}$，又$\theta=150°$

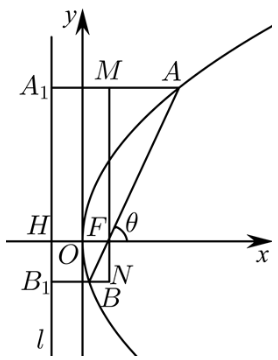
所以$|AB|=\dfrac{2ab^2}{|a^2-c^2\cos^2\theta|}=\dfrac{2\times2\times4}{\left|4-8\times\frac{3}{4}\right|}=8$．

7．答案见解析

【分析】结合双曲线的定义，通过讨论焦点F内分、外分弦AB两种情况，即可证明．

【详解】设点A，B，F在准线l上的射影分别为A_1，B_1，H，l与曲线C的焦点所在的轴交于点H．过点F作HF的垂线交直线AA_1于点M，交直线BB_1于点N．由双曲线的定义得，$|AF|=e|AA_1|$，$|BF|=e|BB_1|$．

（1）当焦点F内分弦AB时，如图，



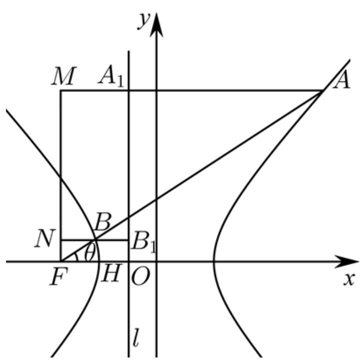
$|AA_1|=|A_1M|+|MA|=p+|AF|\cos\theta$，$|BB_1|=|B_1N|-|NB|=p-|BF|\cos\theta$，

因此$\dfrac{|AF|}{e}=p+|AF|\cos\theta$，$\dfrac{|BF|}{e}=p-|BF|\cos\theta$，

所以焦半径$|AF|=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$，焦半径$|BF|=\dfrac{ep}{1+e\cos\theta}$，

所以$|AB|=|AF|+|BF|=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}+\dfrac{ep}{1+e\cos\theta}=\dfrac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}$．

（2）当焦点F外分弦AB时，如图，



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

https://d.book118.com/837054040162010002