

宜宾市重点中学 2024 届高三上数学期末质量检测试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 抛掷一枚质地均匀的硬币，每次正反面出现的概率相同，连续抛掷 5 次，至少连续出现 3 次正面朝上的概率是（ ）

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{5}{32}$ D. $\frac{3}{16}$

2. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ ，其导函数为 $f'(x)$ ，当 $x \geq 0$ 时，恒有 $\frac{x}{3}f'(x) + f(x) > 0$ 。则不等式

$x^3 f(x) - (1+2x)^3 f(1+2x) < 0$ 的解集为（ ）。

A. $\{x | -3 < x < -1\}$ B. $\{x | -1 < x < -\frac{1}{3}\}$
C. $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > -1\}$ D. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > -\frac{1}{3}\}$

3. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，且满足 $f(x) = f(2-x)$ ，当 $x \in [0, 1]$ 时， $f(x) = x$ ，则函数

$F(x) = f(x) + \frac{x+4}{1-2x}$ 在区间 $[-9, 10]$ 上零点的个数为（ ）

A. 9 B. 10 C. 18 D. 20

4. $x < 1$ 是 $x + \frac{1}{x} < -2$ 的（ ）条件

A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要

5. 定义在 $\mathbf{R}$ 上函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = f(x)$ ，且对任意的不相等的实数 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ 有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立，

若关于 x 的不等式 $f(2mx - \ln x - 3) \geq 2f(3) - f(-2mx + \ln x + 3)$ 在 $x \in [1, 3]$ 上恒成立，则实数 m 的取值范围是（ ）

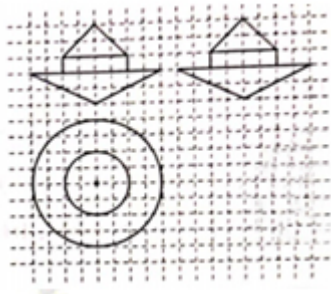
A. $\left[\frac{1}{2e}, 1 + \frac{\ln 6}{6}\right]$ B. $\left[\frac{1}{2e}, 1 + \frac{\ln 3}{6}\right]$ C. $\left[\frac{1}{e}, 2 + \frac{\ln 3}{3}\right]$ D. $\left[\frac{1}{e}, 2 + \frac{\ln 6}{3}\right]$

6. 复数 z 满足 $(1+i)z = |1-i|$ ，则 $z =$ （ ）

A. $1-i$ B. $1+i$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

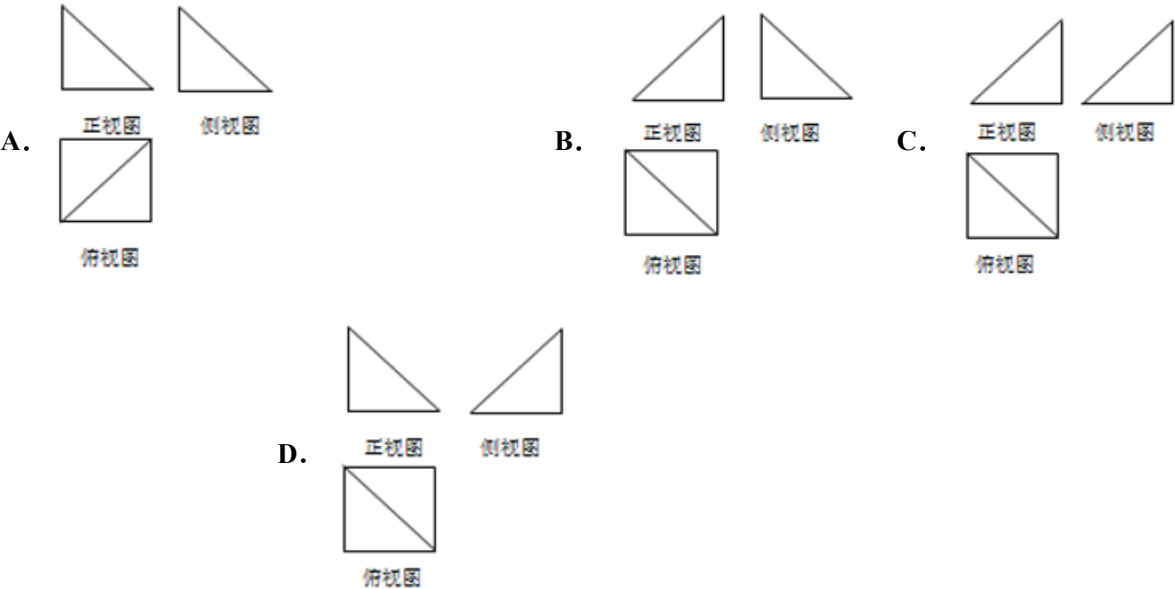
7.

陀螺是中国民间较早的娱乐工具之一，但陀螺这个名词，直到明朝刘侗、于奕正合撰的《帝京景物略》一书中才正式出现.如图所示的网格纸中小正方形的边长均为 1，粗线画出的是一个陀螺模型的三视图，则该陀螺模型的表面积为（ ）

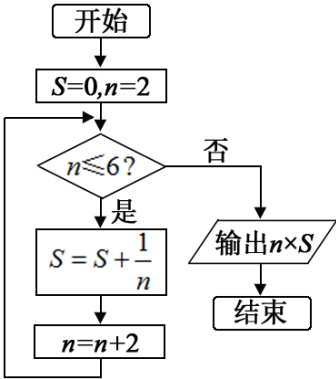


- A. $(8\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + 4)\pi$
- B. $(8\sqrt{5} + 8\sqrt{2} + 4)\pi$
- C. $(8\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + 16)\pi$
- D. $(8\sqrt{5} + 8\sqrt{2} + 16)\pi$

8. 已知底面为正方形的四棱锥，其一条侧棱垂直于底面，那么该四棱锥的三视图可能是下列各图中的（ ）



9. 阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序，则输出的结果为（ ）



- A. $\frac{11}{12}$
- B. 6
- C. $\frac{11}{2}$
- D. $\frac{22}{3}$

10. 下列函数中，图象关于 y 轴对称的为（ ）

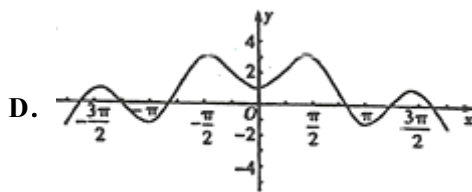
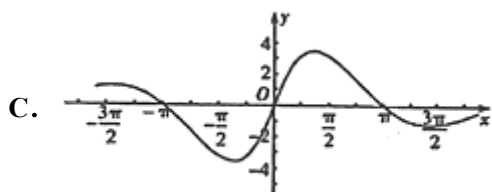
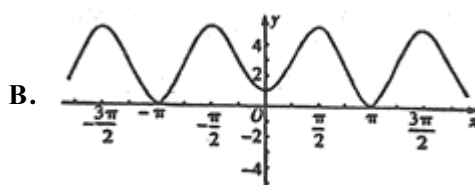
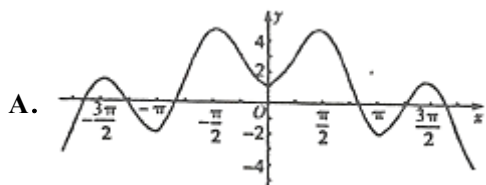
A. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

B. $f(x) = \sqrt{7+2x} + \sqrt{7-2x}$, $x \in [-1, 2]$

C. $f(x) = \sin 8x$

D. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x^2}$

11. 函数 $f(x) = 6^{|\sin x|} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ 的图象大致为 ()



12. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $\frac{a^4 + b^4 + c^4 + a^2 b^2}{a^2 + b^2} = 2c^2$, 若 c 为最大边, 则 $\frac{a+b}{c}$ 的取值范围是 ()

A. $\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

B. $(1, \sqrt{3})$

C. $\left[1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

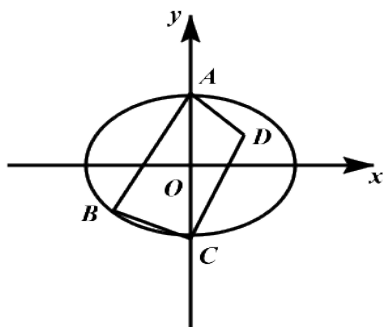
D. $(1, \sqrt{3}]$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 2$, 若 $b_n = 2^{\sqrt{2}a_n}$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n =$ _____.

14. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, 点 A, C 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 短轴的两个端点, 点 B 在椭圆上,

$\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$, 记 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 则 $\frac{S_1}{S_2} =$ _____.

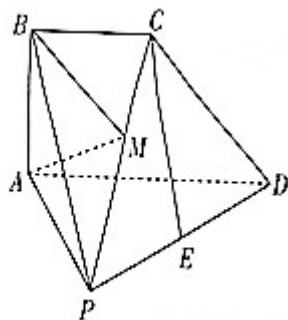


15. 设 $P(x, y)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 在第一象限上的点, 则 $\frac{x}{4-x} + \frac{3y}{6-y}$ 的最小值为 _____.

16. 设向量 $\vec{a} = (m, 1)$, $\vec{b} = (2, 1)$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2)$, 则 $m =$ _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $ABCD \perp$ 平面 PAD , $AD \parallel BC$, $AB = BC = AP = \frac{1}{2}AD$, $\angle ADP = 30^\circ$, $\angle BAD = 90^\circ$, E 是 PD 的中点.



(1) 证明: $PD \perp PB$;

(2) 设 $AD = 2$, 点 M 在线段 PC 上且异面直线 BM 与 CE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$, 求二面角 $M-AB-P$ 的余弦值.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$.

(1) 若 $a = 1$, 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1$;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点, 求 a 的值.

19. (12 分) 已知 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = ae^x - x - 1$, $g(x) = x - \ln(x+1)$ ($e = 2.71828\ldots$ 是自然对数的底数).

(I) 讨论函数 $f(x)$ 极值点的个数;

(II) 若 $a = 1$, 且命题“ $\forall x \in [0, +\infty)$, $f(x) \geq kg(x)$ ”是假命题, 求实数 k 的取值范围.

20. (12 分) 已知点 A 为圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 上的动点, O 为坐标原点, 过 $P(0, 4)$ 作直线 OA 的垂线 (当 A 、 O 重合时, 直线 OA 约定为 y 轴), 垂足为 M , 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求点 M 的轨迹的极坐标方程;

(2) 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 4$, 连接 OA 并延长交 l 于 B , 求 $\frac{|OA|}{|OB|}$ 的最大值.

21. (12 分) 在极坐标系 Ox 中, 曲线 C 的极坐标方程为 $\frac{\rho^2}{\sqrt{2} - \rho \sin \theta} = \sqrt{2} + \rho \sin \theta$, 直线 l 的极坐标方程为

$\rho(\cos \theta - \sin \theta) = 1$, 设 l 与 C 交于 A 、 B 两点, AB 中点为 M , AB 的垂直平分线交 C 于 E 、 F . 以 O 为坐标原点, 极轴为 x 轴的正半轴建立直角坐标系 xOy .

(1) 求 C 的直角坐标方程与点 M 的直角坐标;

(2) 求证: $|MA| \cdot |MB| = |ME| \cdot |MF|$.

22. (10 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + 3^2a_3 + \dots + 3^{n-1}a_n = \frac{n}{3}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{a_n}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

首先求出样本空间样本点为 $2^5 = 32$ 个, 再利用分类计数原理求出三个正面向上为连续的 3 个“1”的样本点个数, 再求出重复数量, 可得事件的样本点数, 根据古典概型的概率计算公式即可求解。

【详解】

样本空间样本点为 $2^5 = 32$ 个,

具体分析如下:

记正面向上为 1, 反面向上为 0, 三个正面向上为连续的 3 个“1”,

有以下 3 种位置 1__ __, __1__, __ __1.

剩下 2 个空位可是 0 或 1, 这三种排列的所有可能分别都是 $2 \times 2 = 4$,

但合并计算时会有重复, 重复数量为 $2 + 2 = 4$,

事件的样本点数为: $4 + 4 + 4 - 2 - 2 = 8$ 个.

故不同的样本点数为 8 个, $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

故选：A

【点睛】

本题考查了分类计数原理与分步计数原理，古典概型的概率计算公式，属于基础题

2、D

【解析】

先通过 $\frac{x}{3}f'(x) + f(x) > 0$ 得到原函数 $g(x) = \frac{x^3 f(x)}{3}$ 为增函数且为偶函数，再利用到 y 轴距离求解不等式即可.

【详解】

构造函数 $g(x) = \frac{x^3 f(x)}{3}$,

$$\text{则 } g'(x) = x^2 f(x) + \frac{x^3}{3} f'(x) = x^2 \left(\frac{x}{3} f'(x) + f(x) \right)$$

由题可知 $\frac{x}{3}f'(x) + f(x) > 0$ ，所以 $g(x) = \frac{x^3 f(x)}{3}$ 在 $x \geq 0$ 时为增函数；

由 x^3 为奇函数， $f(x)$ 为奇函数，所以 $g(x) = \frac{x^3 f(x)}{3}$ 为偶函数；

$$\text{又 } x^3 f(x) - (1+2x)^3 f(1+2x) < 0, \text{ 即 } x^3 f(x) < (1+2x)^3 f(1+2x)$$

$$\text{即 } g(x) < g(1+2x)$$

又 $g(x)$ 为开口向上的偶函数

$$\text{所以 } |x| < |1+2x|, \text{ 解得 } x < -1 \text{ 或 } x > -\frac{1}{3}$$

故选：D

【点睛】

此题考查根据导函数构造原函数，偶函数解不等式等知识点，属于较难题目.

3、B

【解析】

由已知可得函数 $f(x)$ 的周期与对称轴，函数 $F(x) = f(x) + \frac{x+4}{1-2x}$ 在区间 $[-9, 10]$ 上零点的个数等价于函数 $f(x)$

与 $g(x) = -\frac{x+4}{1-2x}$ 图象在 $[-9, 10]$ 上交点的个数，作出函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象如图，数形结合即可得到答案.

【详解】

函数 $F(x) = f(x) + \frac{x+4}{1-2x}$ 在区间 $[-9, 10]$ 上零点的个数等价于函数 $f(x)$ 与 $g(x) = -\frac{x+4}{1-2x}$ 图象在 $[-9, 10]$ 上交点的个数，

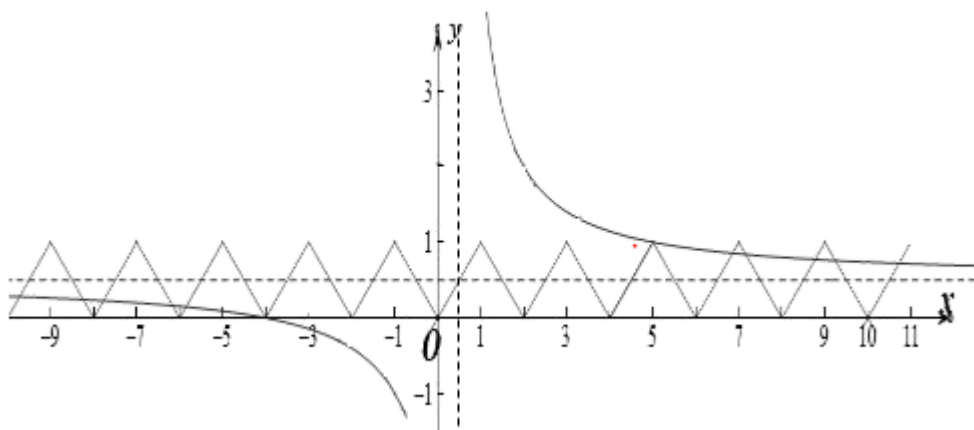
由 $f(x) = f(2-x)$ ，得函数 $f(x)$ 图象关于 $x=1$ 对称，

$\because f(x)$ 为偶函数，取 $x=x+2$ ，可得 $f(x+2) = f(-x) = f(x)$ ，得函数周期为 2.

又 $\because$ 当 $x \in [0, 1]$ 时， $f(x) = x$ ，且 $f(x)$ 为偶函数， $\therefore$ 当 $x \in [-1, 0]$ 时， $f(x) = -x$ ，

$$g(x) = -\frac{x+4}{1-2x} = \frac{x+4}{2x-1} = \frac{1}{2} + \frac{9}{4x-2},$$

作出函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象如图：



由图可知，两函数图象共 10 个交点，

即函数 $F(x) = f(x) + \frac{x+4}{1-2x}$ 在区间 $[-9, 10]$ 上零点的个数为 10.

故选：B.

【点睛】

本题考查函数的零点与方程根的关系，考查数学转化思想方法与数形结合的解题思想方法，属于中档题.

4、B

【解析】

利用充分条件、必要条件与集合包含关系之间的等价关系，即可得出。

【详解】

设 $p: x < 1$ 对应的集合是 $A = (-\infty, 1)$ ，由 $x + \frac{1}{x} < -2$ 解得 $x < 0$ 且 $x \neq -1$

$q: x + \frac{1}{x} < -2$ 对应的集合是 $B = (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ ，所以 $B \subsetneq A$ ，

故 $x < 1$ 是 $x + \frac{1}{x} < -2$ 的必要不充分条件，故选 B。

【点睛】

本题主要考查充分条件、必要条件的判断方法——集合关系法。

设 $A = \{x | x \in p\}$, $B = \{x | x \in q\}$,

如果 $A \subseteq B$, 则 p 是 q 的充分条件; 如果 $A \cap B$ 则 p 是 q 的充分不必要条件;

如果 $B \subseteq A$, 则 p 是 q 的必要条件; 如果 $B \cap A$, 则 p 是 q 的必要不充分条件。

5、B

【解析】

结合题意可知 $f(x)$ 是偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 单调递减, 化简题目所给式子, 建立不等式, 结合导函数与原函数的单调性关系, 构造新函数 $h(x), g(x)$, 计算最值, 即可。

【详解】

结合题意可知 $f(x)$ 为偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 单调递减, 故

$f(2mx - \ln x - 3) \geq 2f(3) - f(-2mx + \ln x + 3)$ 可以转换为

$f(2mx - \ln x - 3) \geq f(3)$ 对应于 $x \in [1, 3]$ 恒成立, 即 $|2mx - \ln x - 3| \leq 3$

即 $0 \leq 2mx - \ln x \leq 6$ 对 $x \in [1, 3]$ 恒成立

即 $2m \geq \frac{\ln x}{x}$ 且 $2m \leq \frac{6 + \ln x}{x}$ 对 $x \in [1, 3]$ 恒成立

令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ 在 $[1, e]$ 上递增, 在 $(e, 3]$ 上递减,

所以 $g(x)_{\max} = \frac{1}{e}$

令 $h(x) = \frac{6 + \ln x}{x}$, $h'(x) = \frac{-5 - \ln x}{x^2} < 0$, 在 $[1, 3]$ 上递减

所以 $h(x)_{\min} = \frac{6 + \ln 3}{3}$. 故 $m \in \left[\frac{1}{2e}, 1 + \frac{\ln 3}{6} \right]$, 故选 B.

【点睛】

本道题考查了函数的基本性质和导函数与原函数单调性关系, 计算范围, 可以转化为函数, 结合导函数, 计算最值, 即可得出答案。

6、C

【解析】

利用复数模与除法运算即可得到结果。

【详解】

解: $z = \frac{|1-i|}{1+i} = \frac{\sqrt{2}}{1+i} = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$,

故选：C

【点睛】

本题考查复数除法运算，考查复数的模，考查计算能力，属于基础题.

7、C

【解析】

根据三视图可知，该几何体是由两个圆锥和一个圆柱构成，由此计算出陀螺的表面积.

【详解】

最上面圆锥的母线长为 $2\sqrt{2}$ ，底面周长为 $2\pi \times 2 = 4\pi$ ，侧面积为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 4\pi = 4\sqrt{2}\pi$ ，下面圆锥的母线长为 $2\sqrt{5}$ ，底面周长为 $2\pi \times 4 = 8\pi$ ，侧面积为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 8\pi = 8\sqrt{5}\pi$ ，没被挡住的部分面积为 $\pi \times 4^2 - \pi \times 2^2 = 12\pi$ ，中间圆柱的侧面积为 $2\pi \times 2 \times 1 = 4\pi$. 故表面积为 $(8\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + 16)\pi$ ，故选 C.

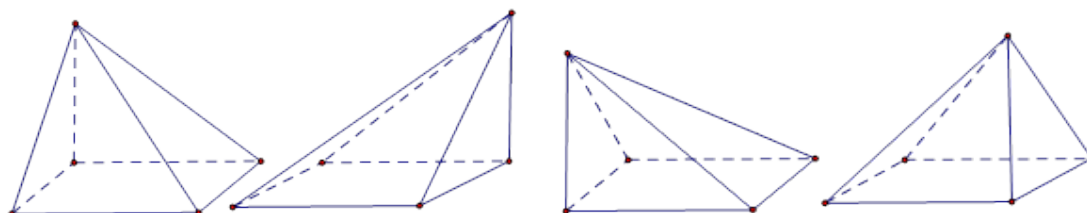
【点睛】

本小题主要考查中国古代数学文化，考查三视图还原为原图，考查几何体表面积的计算，属于基础题.

8、C

【解析】

试题分析：通过对以下四个四棱锥的三视图对照可知，只有选项 C 是符合要求的.



考点：三视图

9、D

【解析】

用列举法，通过循环过程直接得出 S 与 n 的值，得到 $n=8$ 时退出循环,即可求得.

【详解】

执行程序框图，可得 $S=0$ ， $n=2$ ，满足条件， $S=\frac{1}{2}$ ， $n=4$ ，满足条件， $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ ， $n=6$ ，满足条件， $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$ ， $n=8$ ，由题意，此时应该不满足条件，退出循环，输出 S 的值为 $\frac{11}{12} \times 8 = \frac{22}{3}$.

故选 D.

【点睛】

本题主要考查了循环结构的程序框图的应用,正确依次写出每次循环得到的 S 与 n 的值是解题的关键,难度较易.

10、D

【解析】

图象关于 y 轴对称的函数为偶函数,用偶函数的定义及性质对选项进行判断可解.

【详解】

图象关于 y 轴对称的函数为偶函数;

A 中, $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}} = -f(x)$, 故 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ 为奇函数;

B 中, $f(x) = \sqrt{7+2x} + \sqrt{7-2x}$ 的定义域为 $[-1, 2]$,

不关于原点对称, 故为非奇非偶函数;

C 中, 由正弦函数性质可知, $f(x) = \sin 8x$ 为奇函数;

D 中, $x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 0$, $f(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{(-x)^2} = f(x)$, 故 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x^2}$ 为偶函数.

故选: D.

【点睛】

本题考查判断函数奇偶性. 判断函数奇偶性的两种方法:

(1)定义法: 对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x 都有 $f(x) = -f(-x)$, 则函数 $f(x)$ 是奇函数; 都有 $f(x) = f(-x)$,

则函数 $f(x)$ 是偶函数

(2)图象法: 函数是奇(偶)函数 $\Leftrightarrow$ 函数图象关于原点(y 轴)对称.

11、A

【解析】

用偶函数的图象关于 y 轴对称排除 C , 用 $f(\pi) < 0$ 排除 B , 用 $f(\frac{\pi}{2}) > 4$ 排除 D . 故只能选 A .

【详解】

因为 $f(-x) = 6^{|\sin(-x)|} - \frac{(-x)^2}{\sqrt{1+(-x)^2}} = 6^{|\sin x|} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$,

所以函数 $f(x)$ 为偶函数, 图象关于 y 轴对称, 故可以排除 C ;

因为 $f(\pi) = 6^{|\sin \pi|} - \frac{\pi^2}{\sqrt{1+\pi^2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi^4} + \frac{1}{\pi^2}}} < 1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}} = 1 - 1 = 0$, 故排除 B ,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/837114033010006056>