数字信号处理

第二章 离散信号和抽样定理

- 第一节 离散时间信号
- 第二节 持续信号的离散化
- 第三节 抽样定理
- 第四节 假频现象

第二章 持续信号的离散化与抽样定理

第一节 离散时间信号

一、离散时间信号

在物理上，定义为在离散时间上的信号样品的集合。在数学上可用时间序列{x(n)}来表达。

$x(n)$代表序列的第n个样点的数字，n代表时间的序号。

样品集合可以是本来就存在的，也可以是由模拟信号通过采样得来的或者是用计算机产生的。

第一节 离散时间信号

离散时间信号的时域表达

1） 表达离散时间信号可采用枚举的方式。例如

$\{x(n)\}=\{\ldots，-1.5，-8.7，2.53，0.0，6，7.2，\ldots\}$

箭头表示时间的零点位置 ↑

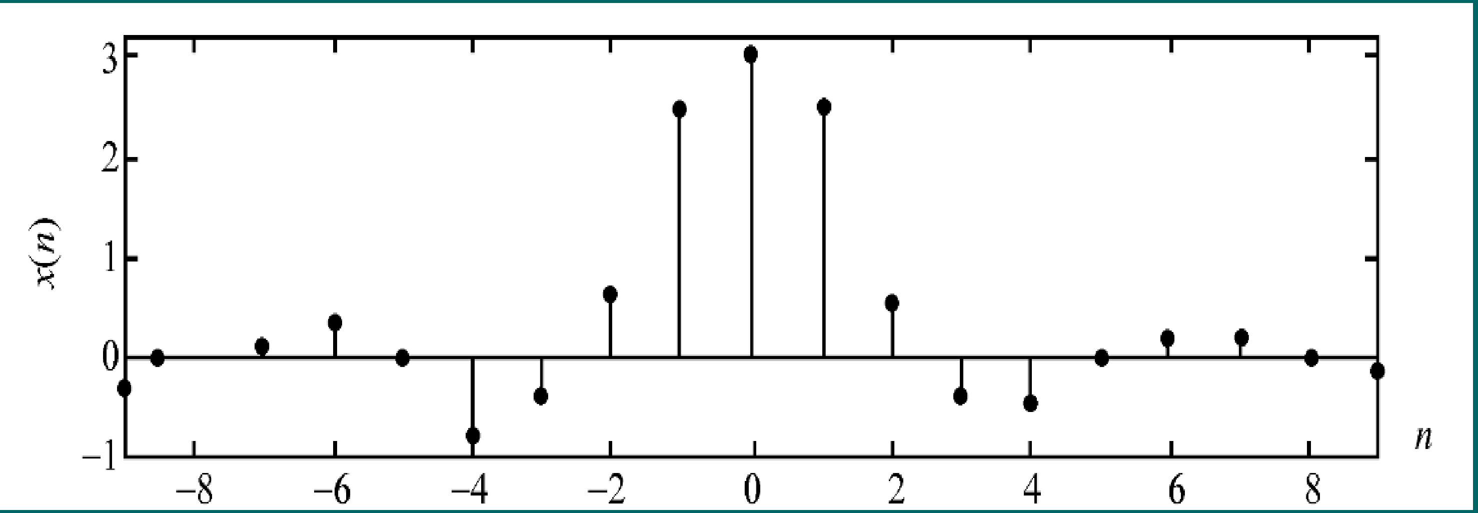
2）离散信号也可用公式表示

如 $x(n)=\sin 2\pi fn \qquad -\infty<n<\infty$

$$x(n)=\begin{cases} a^{-n} & n\geq 0,|a|\geq 1 \\ b^{n} & n<0,|b|\geq 1 \end{cases}$$

第一节 离散时间信号

3）离散信号可用图形的方式表达



图中横坐标n表达离散的时间坐标，且仅在n为整数时才故意义；纵坐标代表信号样点的值。

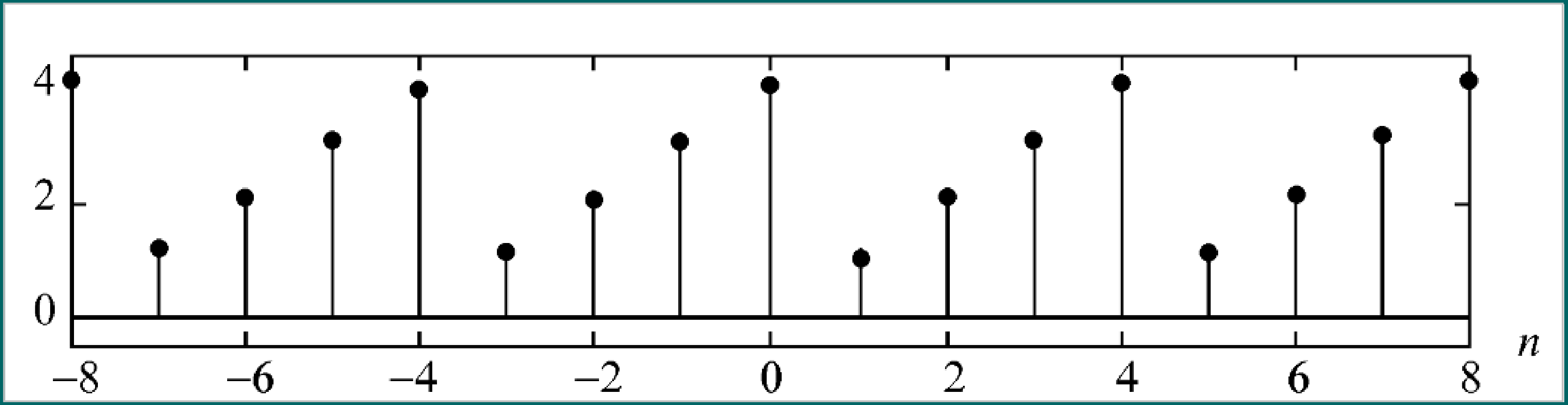
为了以便，一般直接用x(n)来代表序列全体{x(n)}。

第一节 离散时间信号

离散序列的周期性

若序列$x(n)$ 满足 $x(n)=x(n+N)$ $(-\infty<n<+\infty)$，且N是使其成立的最小正整数，则称序列$x(n)$为以N为周期的周期序列。

下图为周期序列示意图



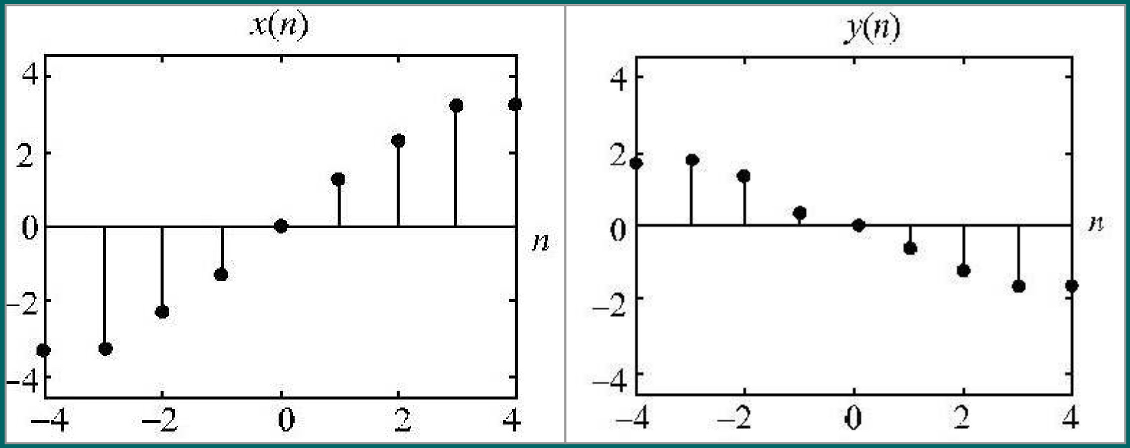
第一节 离散时间信号

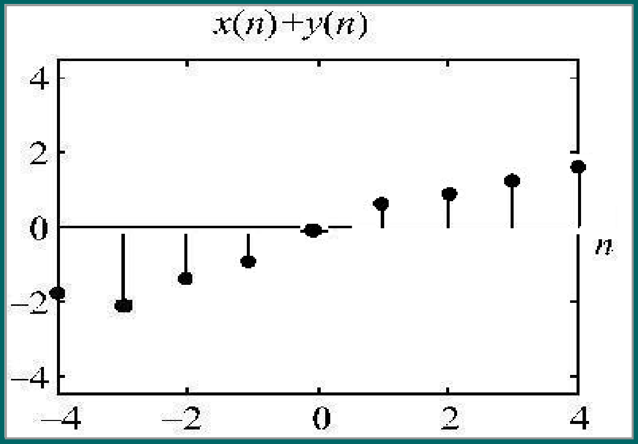
二、　离散信号的基本运算

1、　序列的加减

序列的加减指将两序列序号相似的数值相加减，即

$$z(n) = x(n) \pm y(n)$$





第一节 离散时间信号

2、 序列的乘积

序列的乘积是指同序号的序列值对应相乘。即

$$z(n) = x(n) \cdot y(n)$$

3、序列乘常数

序列乘以常数指将序列的每一种值都乘以常数，即

$$y(n)=ax(n)$$

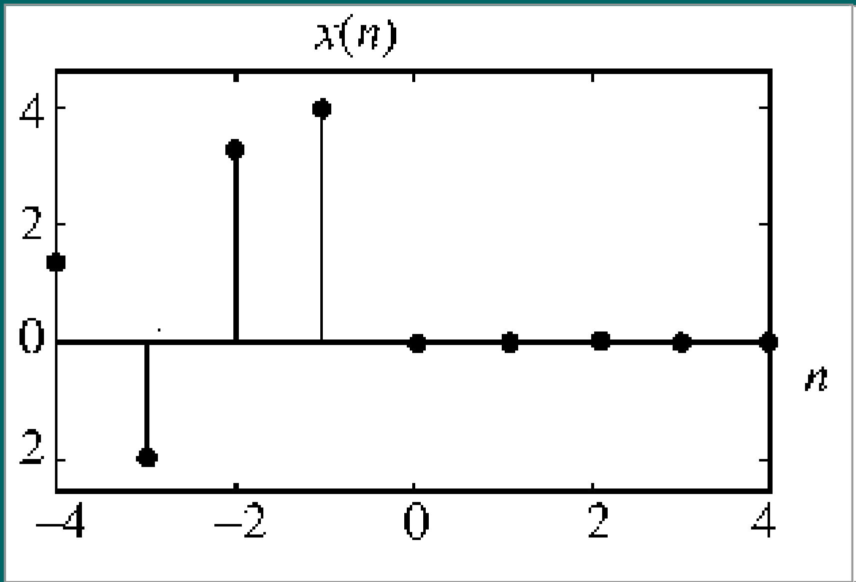
4、 序列的延时

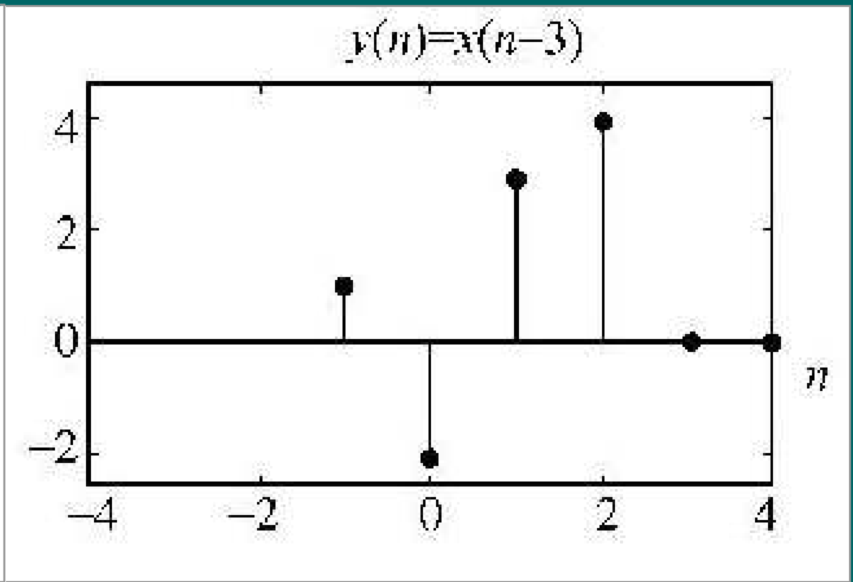
序列的延时是将序列全体在时间轴上移动。

$$y(n)=x(n-n_0)$$

$n_0<0$左移，$n_0>0$右移

如图：当 $n_0=3$时





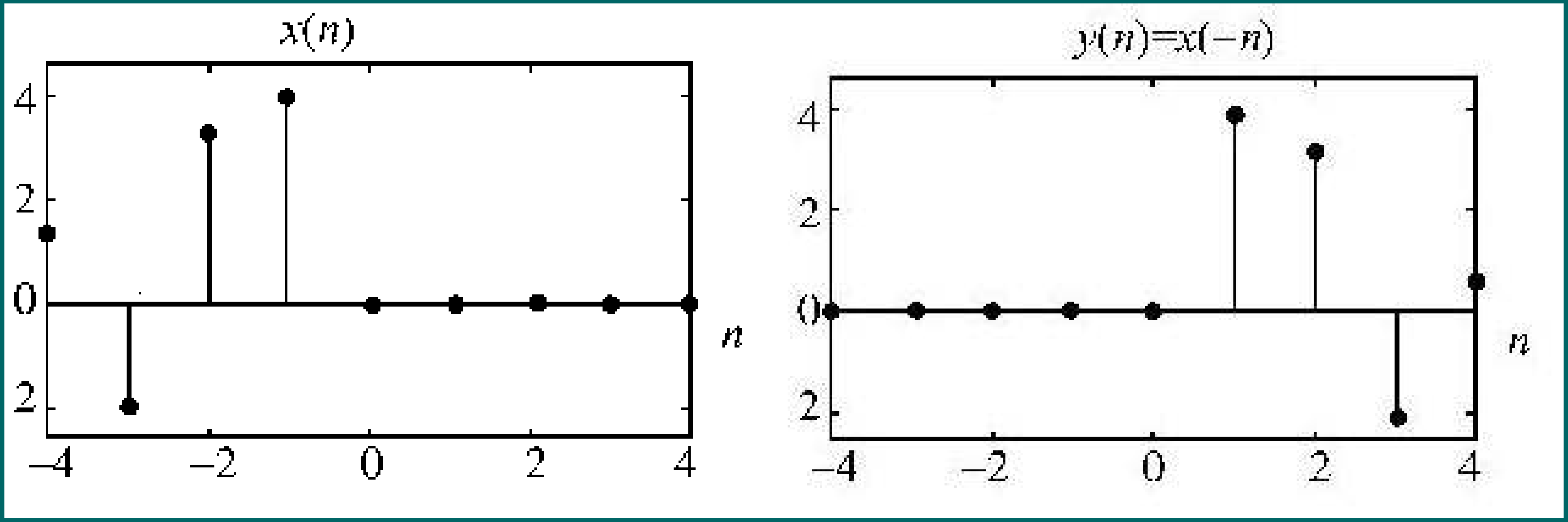
第一节 离散时间信号

5、序列的反转

序列的反转指将序列以n=0为对称轴进行对褶。

$$y(n)=x(-n)$$

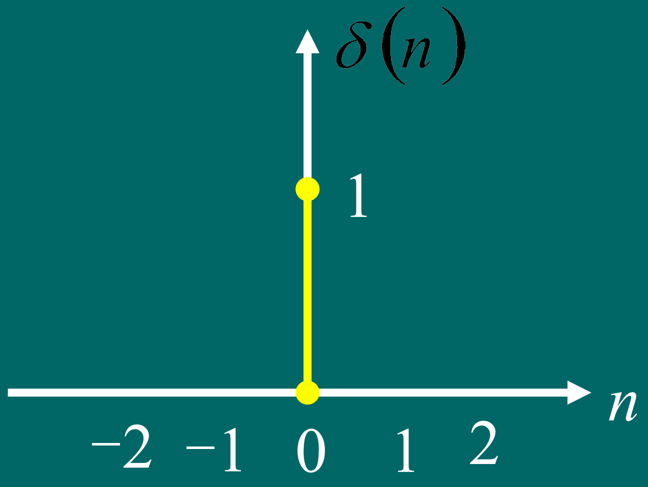
如下图所示：



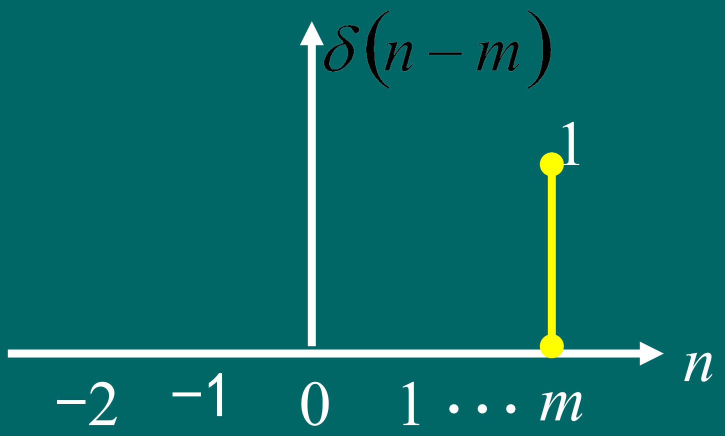
第一节 离散时间信号

三、常用序列

1 单位脉冲序列 $\delta(n)$



$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

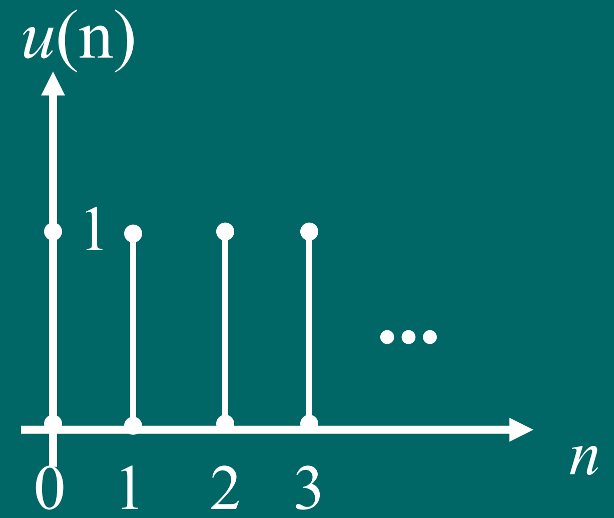


$$\delta(n-m)=\begin{cases}1, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}$$

第一节 离散时间信号

2、单位阶跃序列 $u(n)$

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$



$\delta(n)$与 $u(n)$ 的关系：

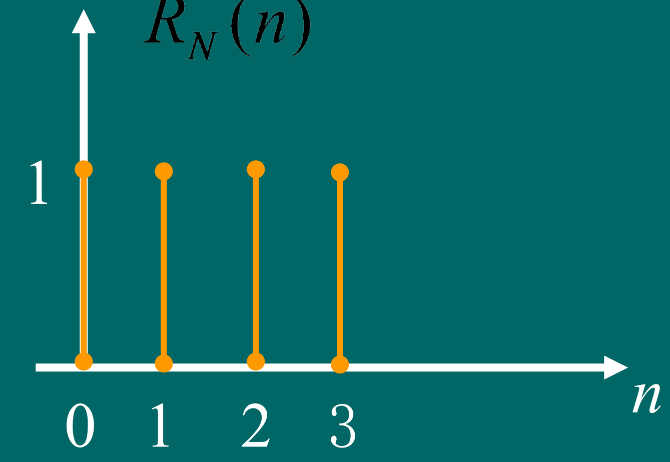
$$\delta(n)=\nabla u(n)=u(n)-u(n-1)$$

$$u(n)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-m)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+.....$$

第一节 离散时间信号

3 矩形序列 $R_N(n)$

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & 其他n\end{cases}$$



$R_N(n)$ 与 $u(n)$ 的关系：

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

第一节 离散时间信号

4、复指数序列

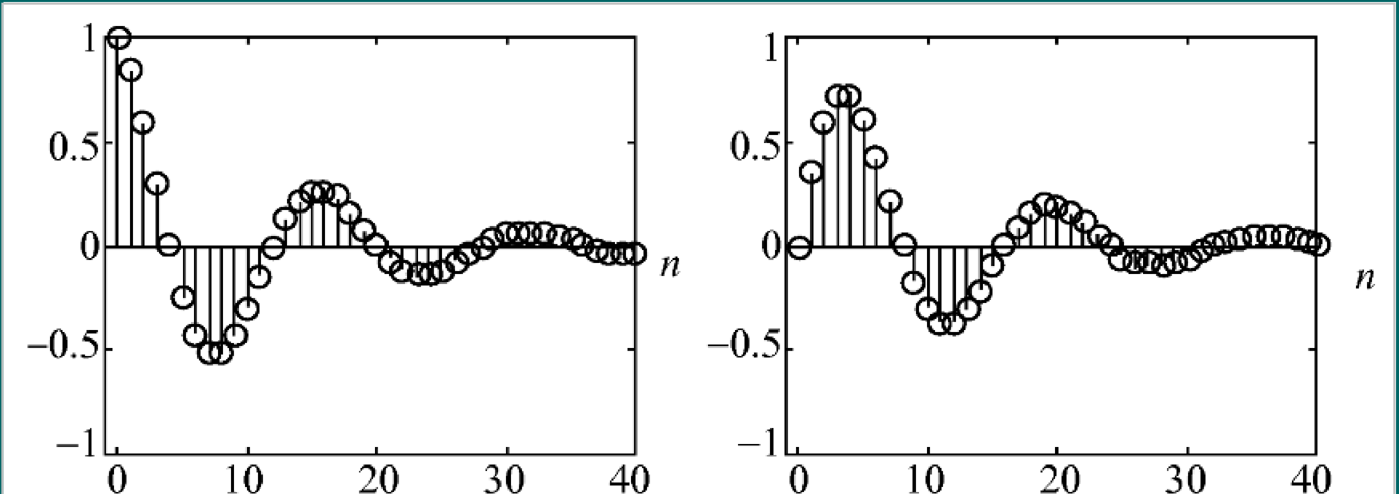
$$x(n)=e^{(\alpha+j\omega_0)n}$$

式中ω_0为角频率

将复指数表示成实部与虚部

$$x(n)=e^{\alpha\cdot n}\cos\omega_0 n+je^{\alpha\cdot n}\sin\omega_0 n$$

其示意图如下：



(a) 复指数序列的实部　　(b) 复指数序列的虚部

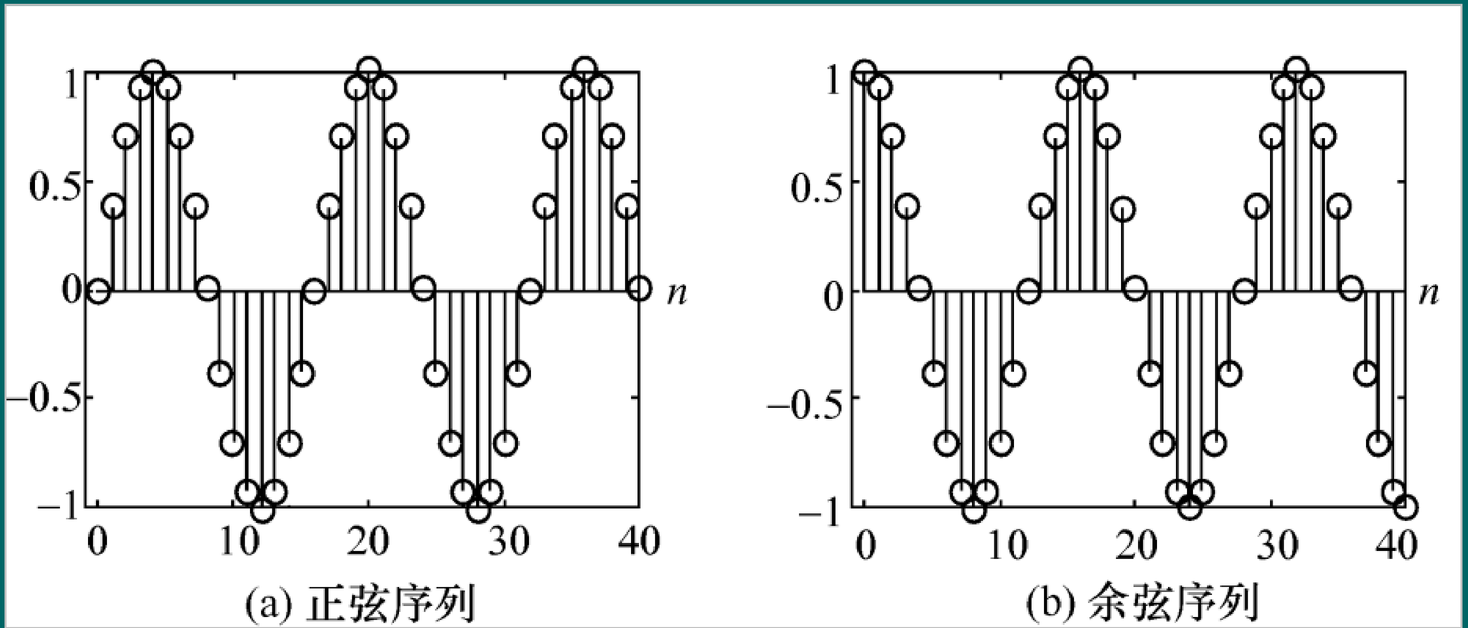
第一节 离散时间信号

当$\alpha = 0$，则有

$$x(n) = \cos\omega_0 n + j\sin\omega_0 n$$

其实部与虚部分别为**余弦与正弦序列**。

余弦与正弦序列示意图如下：



第一节 离散时间信号

5、 用单位脉冲序列表达任意序列

任意序列x(n)都可用单位脉冲序列δ(n)表到达加权和的形式，即

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

如: $x(n)=\begin{cases}a^n & -10\le n\le 10\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

可表示为

$$x(n)=\sum_{m=-10}^{10}a^m\delta(n-m)$$

6、序列的能量与功率

有界信号 $x(n)$（$\left|x(n)\right| \le b < \infty$）的能量$E$定义为：

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|^2$$

当$0<E<\infty$ 时，称信号为能量有限信号。若序列的长度为有限长，且值为有限值，则信号的能量就是有限的。

但当信号的长度为无限长时，即使信号有界，其能量也不一定是有限的。

第一节 离散时间信号

对非周期序列$x(n)$，若序列为无限长，其平均功率定义为

$$P=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2K+1}\sum_{n=-K}^{K}\left|x(n)\right|^2=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2K+1}E$$

对周期为N的周期序列$x_N(n)$，其平均功率定义为

$$P=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|x_N(n)\right|^2$$

能量为有限值，平均功率等于0的信号称为能量信号。

能量为无限值，平均功率为有限值的信号称为功率信号。

第二节 持续信号的离散化

对信号进行时间上的离散化，这是对信号作数字化处理的第一种环节。

研究内容：

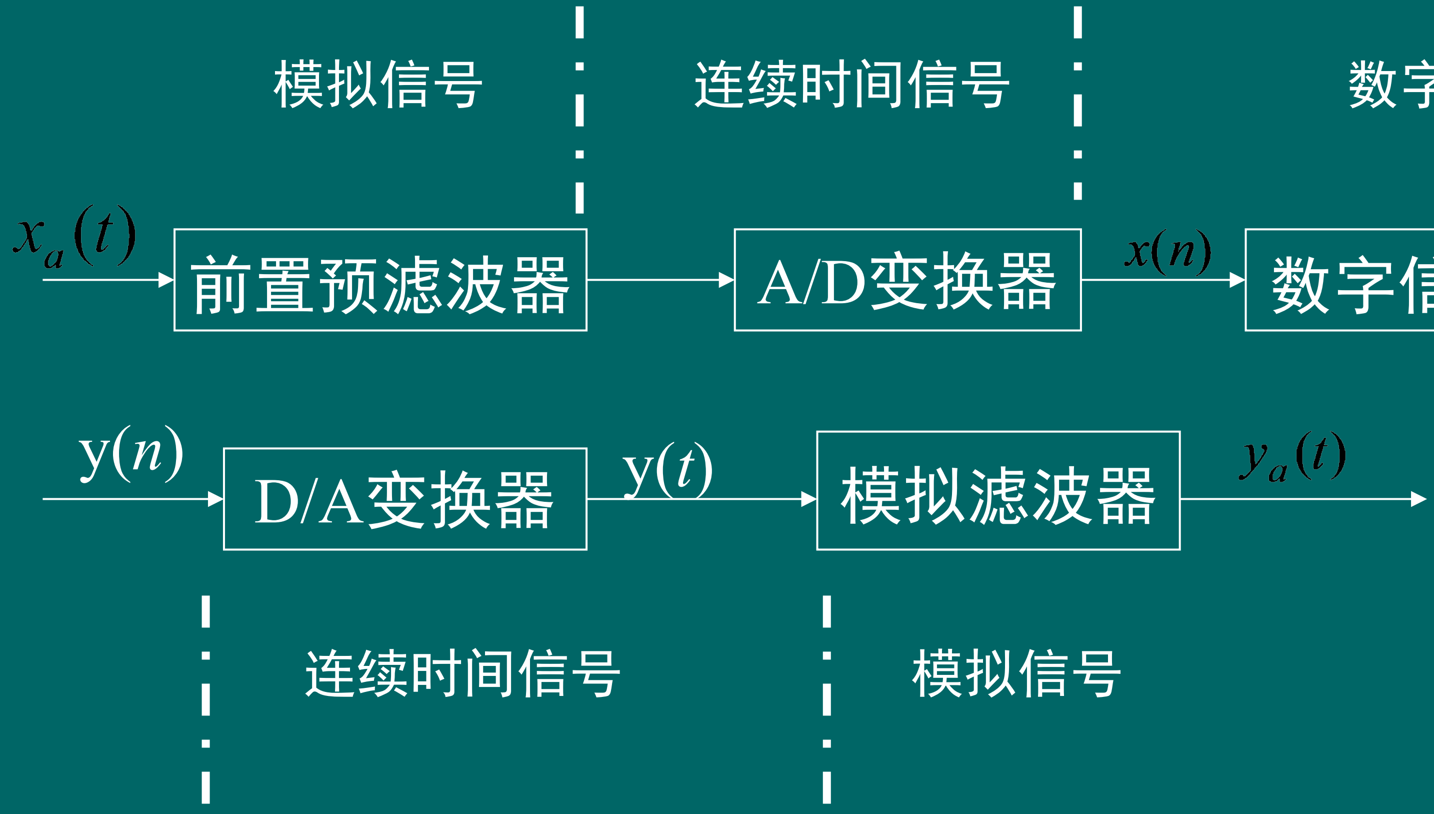
信号经采样后发生的变化（如频谱的变化）；

在什么条件下，一种持续信号可以用它的离散序列替代，而不丢失原有信号的内容；

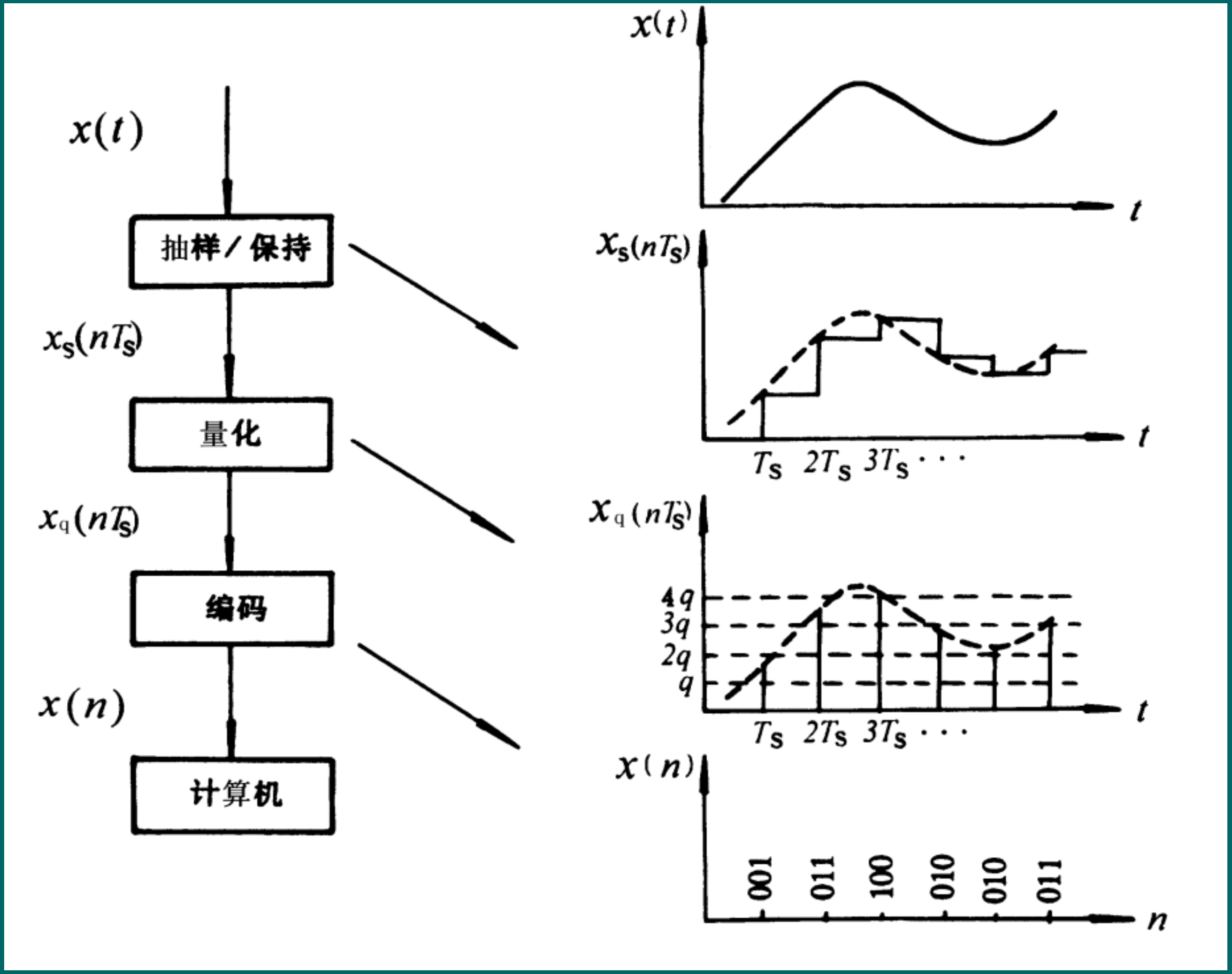
怎样从持续信号的离散样本中不失真地 抽样定理 的持续信号。

信号恢复

第二节 持续信号的离散化



第二节 持续信号的离散化



第二节 持续信号的离散化

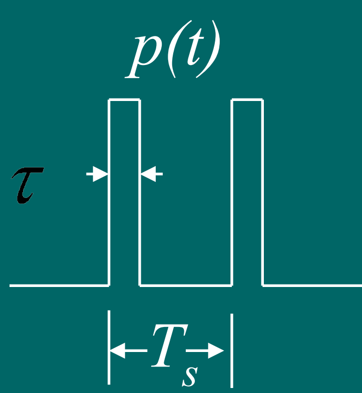
抽样过程：均匀抽样可以看作为一种脉冲调制过程，数学表达为 $\hat{x}_s(t)=x_a(t)p(t)$ 。

其中，xa(t)为调制信号即输入的模拟信号；p(t)为一种周期为Ts，脉宽为τ的脉冲方波；调制后输出的信号就是抽样信号 $\hat{x}_s(t)$。

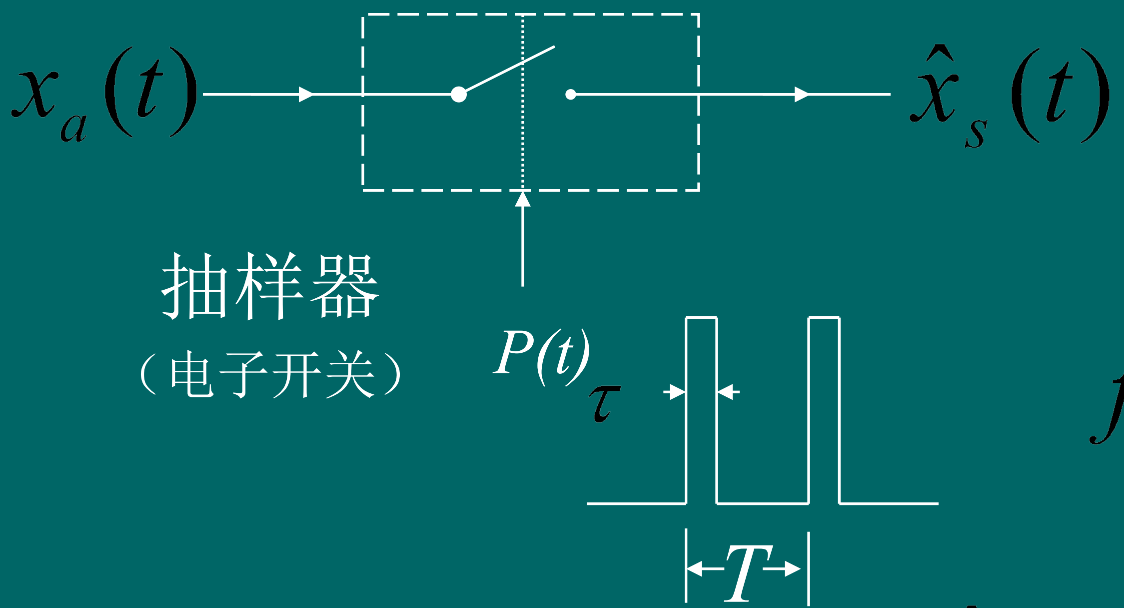
p(t)实际上就是周期矩形方波函数，可表达为：

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_\tau(t-nT_s)$$

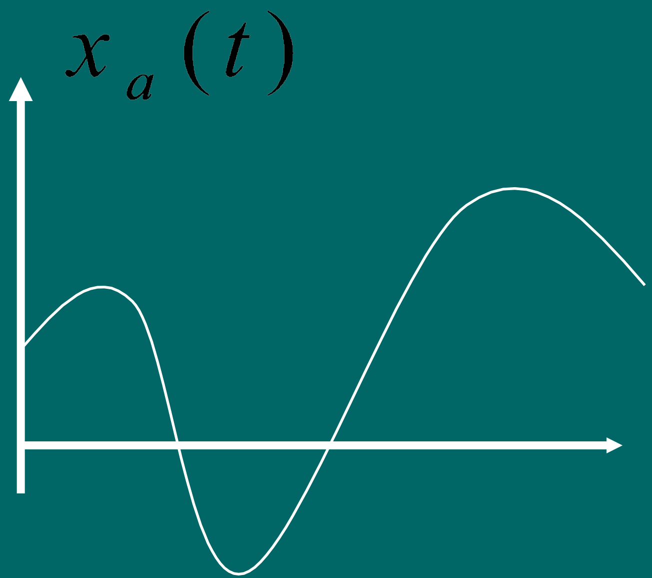
其中 $g_\tau(t)=\begin{cases}1 & |t|<\dfrac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$

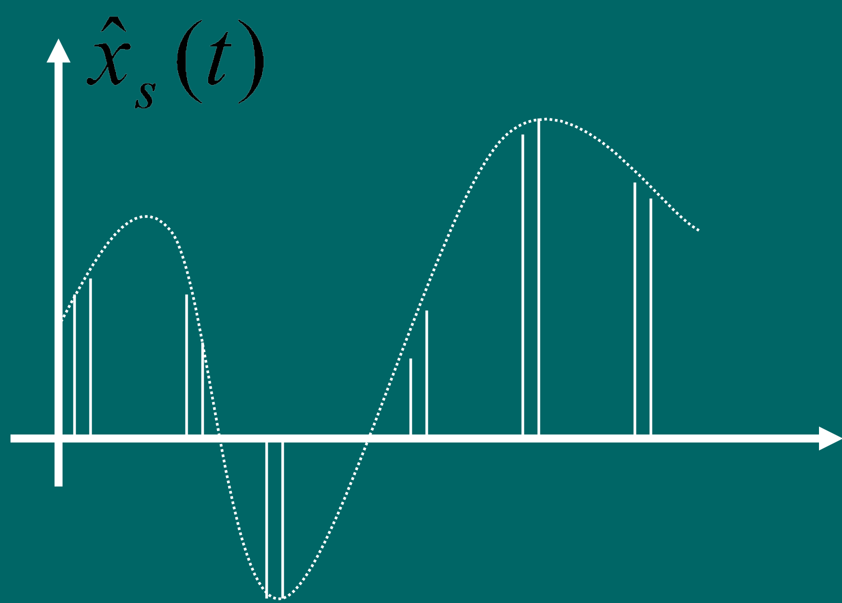


第二节 持续信号的离散化



$$f_s = \frac{1}{T}$$



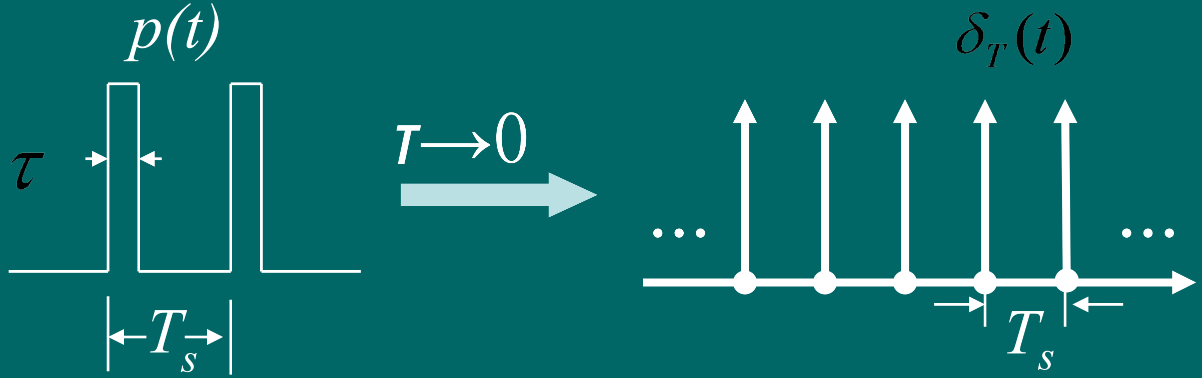


第二节 持续信号的离散化

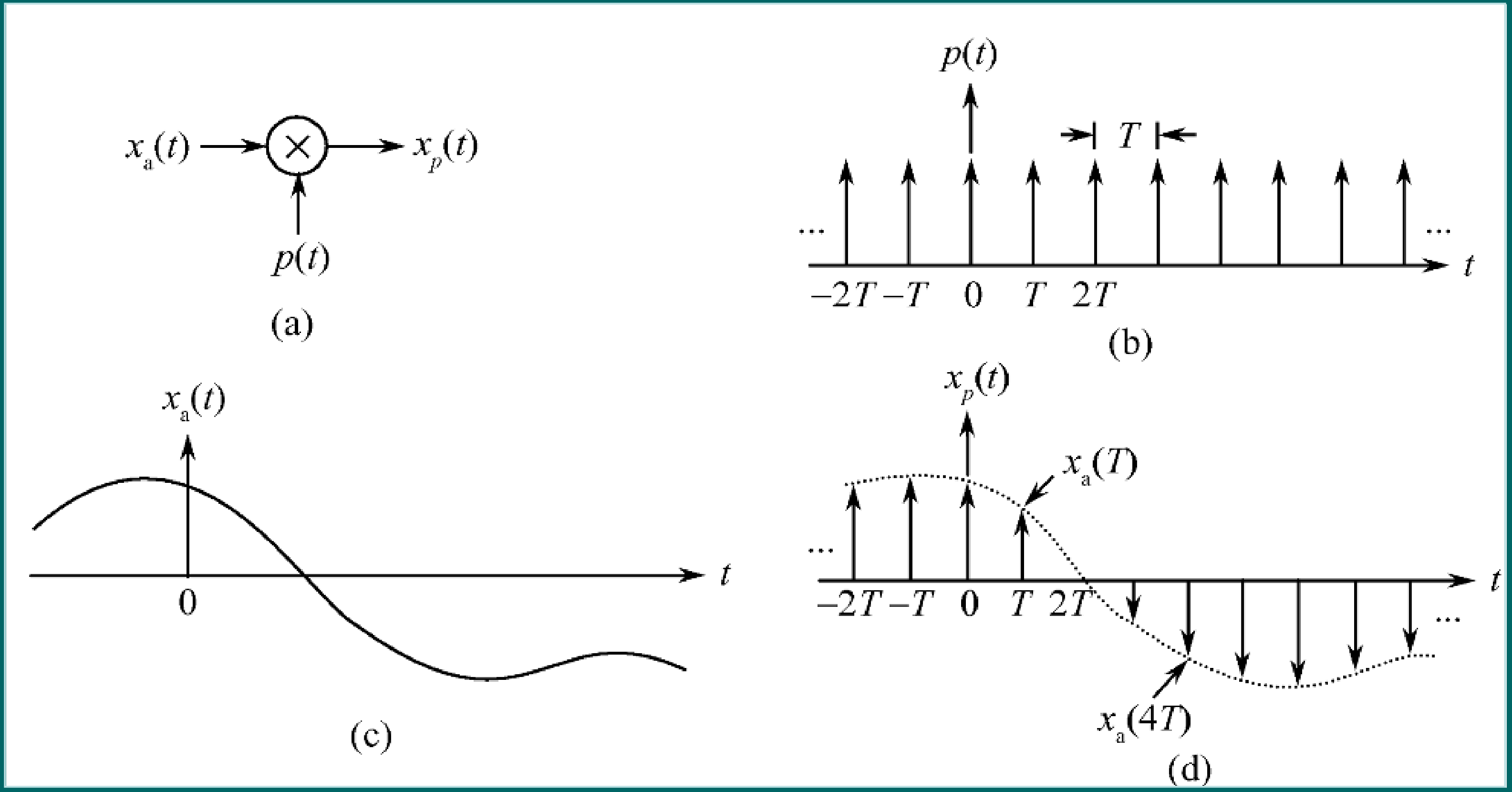
理想抽样：当τ 趋于零的极限状况时，抽样脉冲方波p(t)变成了冲激函数序列δT(t)，这些冲击函数的强度精确地为采样瞬间的xa(t)幅值，这样的抽样称为理想抽样。

$$p(t)=\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)$$

$$\hat{x}_s(t)=x_a(t)p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_a(t)\delta(t-nT_s)$$



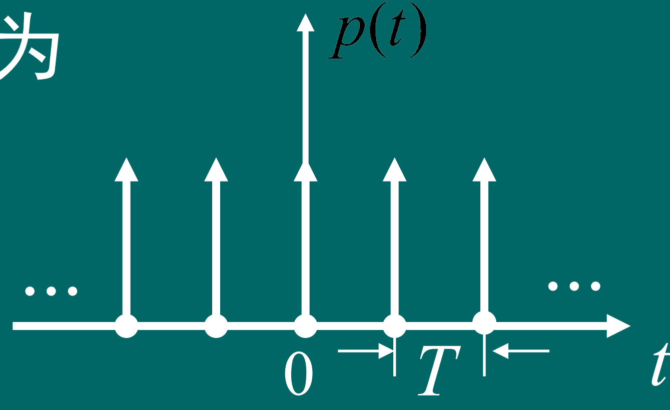
第二节 持续信号的离散化



第二节 持续信号的离散化

一、$p(t)=\delta_T(t)$周期冲激信号的频谱

设$\boldsymbol{p(t)}$是周期为T的单位冲激函数串为



$$p(t)=\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$

可以表到达傅立叶级数，即

$$p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}P_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kf_0t}\qquad f_0=\frac{1}{T}$$

其频谱为：

$$P_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}p(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kf_0t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kf_0t}\mathrm{d}t$$

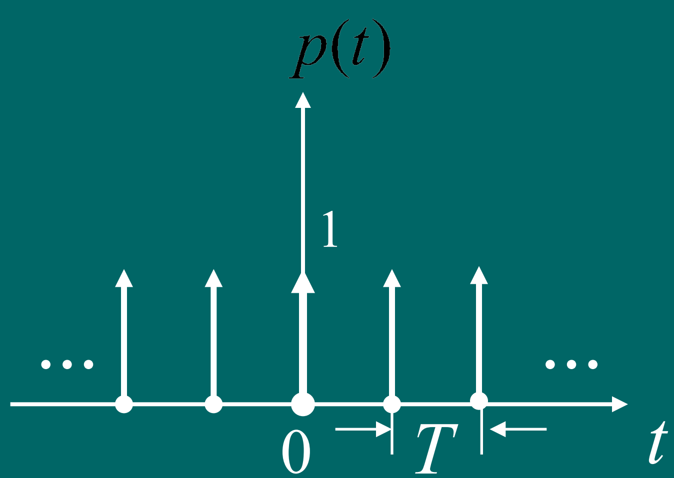
$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kf_0t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}$$

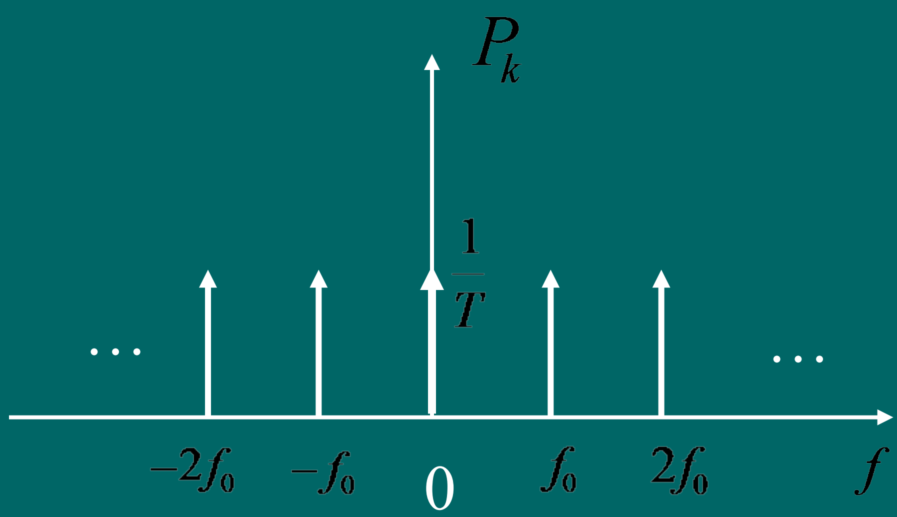
第二节 持续信号的离散化

因此，有

$$p(t)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k f_0 t}$$

上式表明，单位冲激函数串的傅里叶级数中，只包含位于 $f=0,\pm f_0,\pm 2f_0,\mathrm{L}\ ,\pm kf_0,\mathrm{L}$ 处的频率分量，每个频率分量的大小相等且都等于**1/*T***。





第二节 持续信号的离散化

为求p(t)的傅里叶变换，先考察一种傅立叶反变换：

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(f-f_0)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f-f_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}\mathrm{d}f=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 t}$$

$$e^{\mathrm{j}2\pi k f_0 t}\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}\delta(f-kf_0)$$

$p(t)=\delta_T(t)$的傅里叶变换为

$$P(f)=\mathcal{F}[p(t)]=\mathcal{F}\left[\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k f_0 t}\right]=\frac{1}{T}\mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k f_0 t}\right]$$

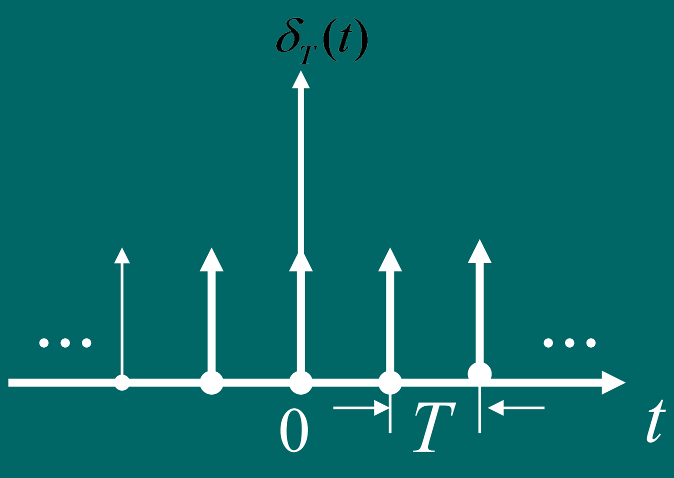
$$=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f-kf_0)=f_0\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(f-kf_0)$$

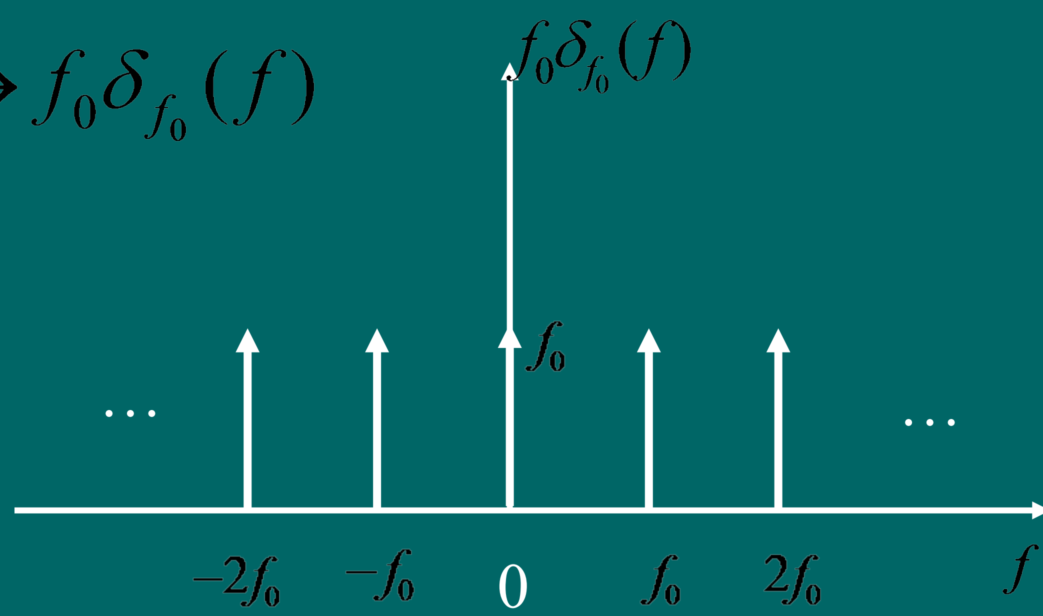
第二节 持续信号的离散化

由此可知：周期为T的周期冲激函数δT(t)的傅氏频谱为一种在频域中幅值为f0=1/T 、周期为f0的冲激脉冲序列（又称为梳状谱)。

令
$$\delta_{f_0}(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-nf_0)$$

则有
$$\delta_T(t)\overset{F}{\leftrightarrow} f_0\delta_{f_0}(f)$$





第二节 持续信号的离散化

二、抽样间隔为T_s的离散信号$x_s(t)=x(t)\cdot\delta_{TS}(t)$的频谱

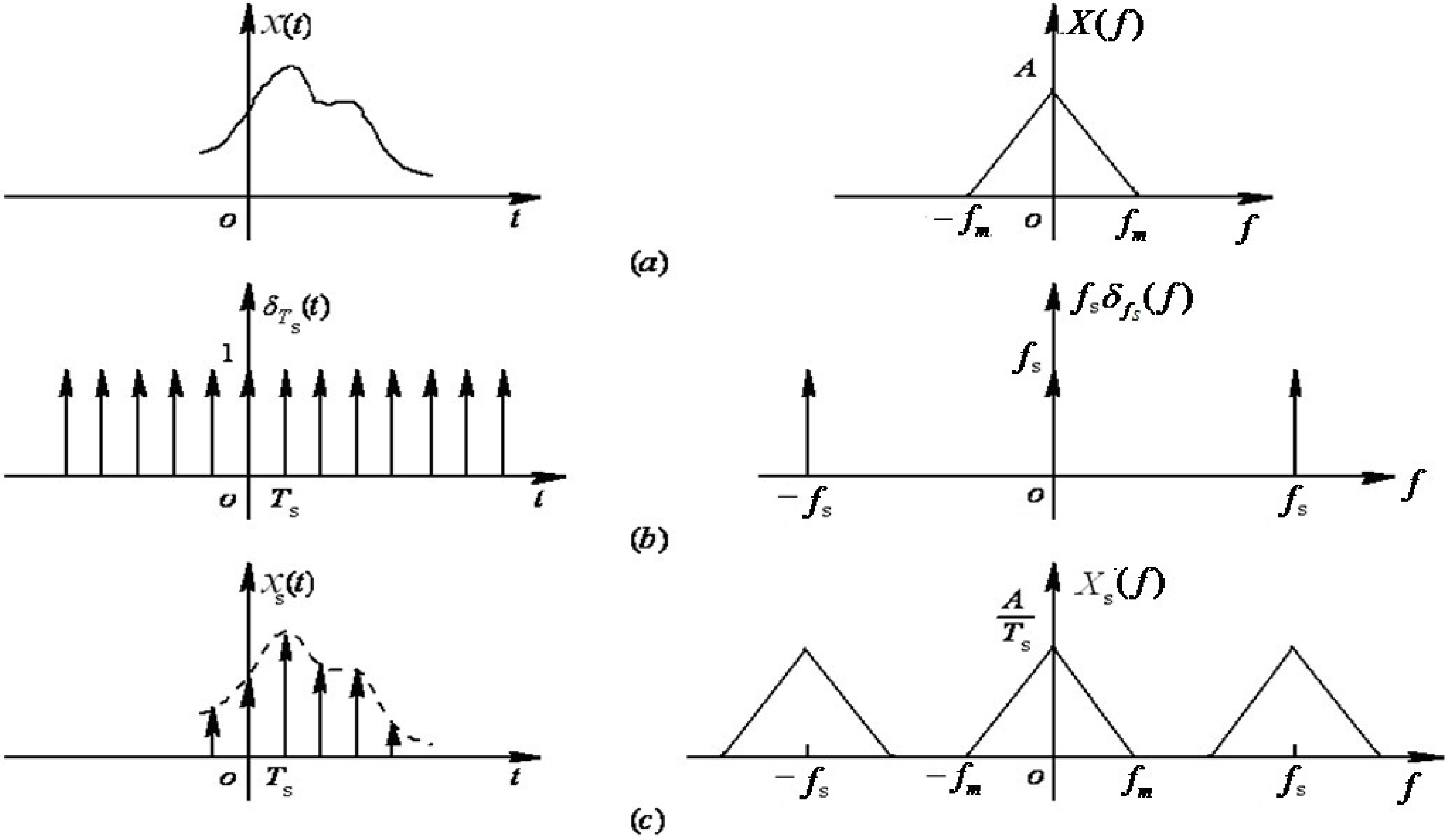
$$X_S(f)=\mathrm{F}\left[x_s(t)\right]=\mathrm{F}\left[x(t)\cdot\delta_{T_s}(t)\right]=X(f)*f_S\delta_{f_S}(f)$$

$$=f_S\left[X(f)*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-nf_S)\right]=\frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(f-nf_S)$$

其中，T_s为采样间隔，$f_s=1/T_s$为采样频率

上式表明，抽样信号xs(t)的频谱Xs(f)是原持续信号的频谱沿频率轴，以采样频率fs为周期而反复；或者说抽样信号的频谱是原持续信号的频谱以fs为周期进行周期性延拓而成的周期函数，包括原持续信号的频谱。

第二节 持续信号的离散化



第三节 抽样定理

一、时域抽样定理：

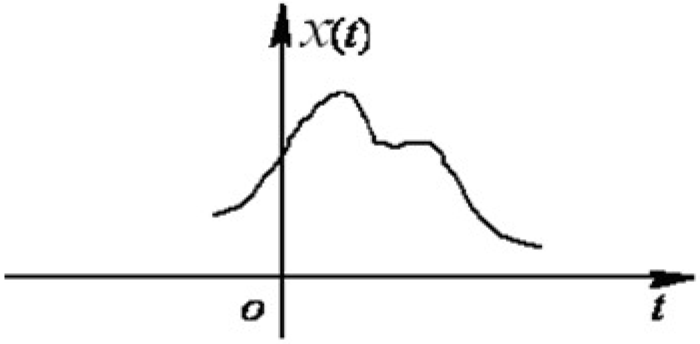
若持续信号x(t)的频谱X(f)满足下式：

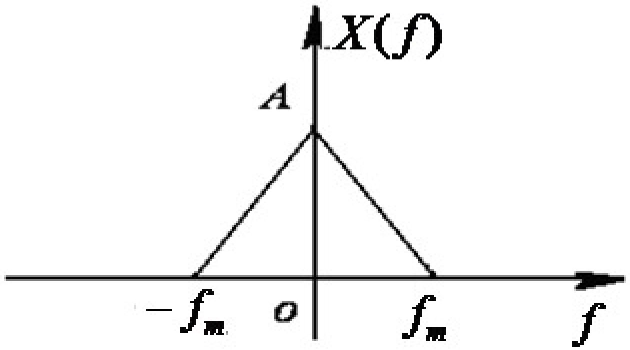
$$X(f)=\begin{cases}0, & f<-f_m\\ X(f), & -f_m\le f\le f_m\\ 0, & f_m<f\end{cases}$$

其中：fm为实数且fm>0，则称信号x(t)是频域带限的（或说是一种带限信号）。

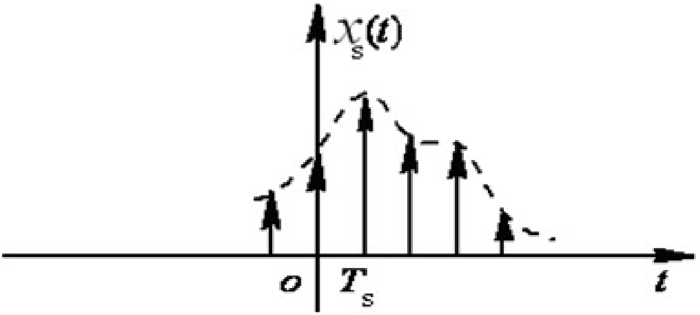
第三节 抽样定理

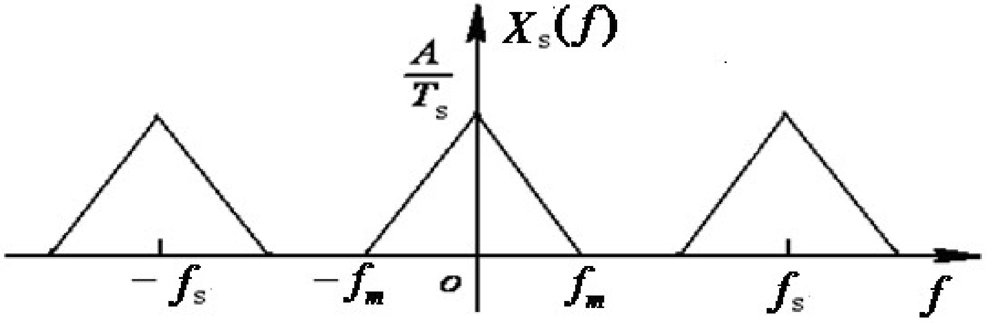
信号x(t)为带限信号，其最高频率为fm；由此，X(f)在(-fm，fm)有值，其他为零。





只要fs≥2fm，采样信号xs(t)的频谱Xs(f)就是周期性地反复着X(f)，而不会发生混叠。





第三节 抽样定理

只要fs＜2fm，采样信号xs(t)的频谱Xs(f)就会发生混叠。在这种状况下无法用滤波器无失真地恢复原信号x(t)。