

福建师大附中 2023~2024 学年上学期期末考试

高二数学试卷

时间：120 分钟 满分：150 分

第 I 卷 选择题（共 60 分）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ ，且过点 $(1, 3)$ ，则它在 y 轴上的截距为 ()

- A. 2 B. -2 C. 4 D. -4

【答案】A

【解析】

【分析】由倾斜角求出斜率，再用点斜式写出直线方程，最后求出截距即可.

【详解】由题意可知直线的斜率 $k = \tan \frac{\pi}{4} = 1$,

所以直线方程为 $y - 3 = x - 1$ ，即 $y = x + 2$ ，

所以它在 y 轴上的截距为 2，

故选：A.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$ ， $a_1 = -1$ ，则 $a_{2024} =$ ()

- A. -1 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】根据递推式得到数列的周期，应用周期性求对应项.

【详解】由 $a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$ ， $a_1 = -1$ ，

得 $a_2 = \frac{1}{1-a_1} = \frac{1}{2}$ ， $a_3 = \frac{1}{1-a_2} = 2$ ， $a_4 = \frac{1}{1-a_3} = -1$ ， $a_5 = \frac{1}{1-a_4} = \frac{1}{2}$ ，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的周期数列，

$$\text{则 } a_{2024} = a_{3 \times 674 + 2} = a_2 = \frac{1}{2}.$$

故选：B.

3. 中国古代数学名著《算法统宗》记载有这样一个问题：“今有俸粮三百零五石，令五等官（正一品、从一品、正二品、从二品、正三品）依品递差十三石分之，问，各若干？”其大意是，现有俸粮 305 石，分给正一品、从一品、正二品、从二品、正三品这 5 位官员，依照品级递减 13 石分这些俸粮，问，每个人各分得多少俸粮？在这个问题中，正二品分得的俸粮是（ ）

- A. 35 石 B. 48 石 C. 61 石 D. 74 石

【答案】C

【解析】

【分析】由等差数列的定义结合求和公式得出正一品的俸粮数，进而得出正二品分得的俸粮数.

【详解】正一品、从一品、正二品、从二品、正三品这 5 位官员所分得的俸粮数记为数列 $\{a_n\}$ ，

由题意， $\{a_n\}$ 是以 -13 为公差的等差数列，且 $S_5 = 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2} \times (-13) = 305$ ，解得 $a_1 = 87$.

故正二品分得俸粮的数量为 $a_3 = a_1 + 2 \times (-13) = 61$ （石）.

故选：C

4. 若圆 $(x-a)^2 + y^2 = 1 (a \geq 0)$ 与圆 $x^2 + (y-2)^2 = 25$ 有公共点，则实数 a 的取值范围是（ ）

- A. $[0, 2\sqrt{3}]$ B. $[1, 5]$ C. $[2\sqrt{3}, 4\sqrt{2}]$ D. $[5, 4\sqrt{2}]$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意得到两圆位置关系，从而得到不等式，解出即可.

【详解】圆 $(x-a)^2 + y^2 = 1$ 的圆心为 $C_1(a, 0)$ ，半径为 $r_1 = 1$ ，

圆 $x^2 + (y-2)^2 = 25$ 的圆心为 $C_2(0, 2)$ ，半径为 $r_2 = 5$.

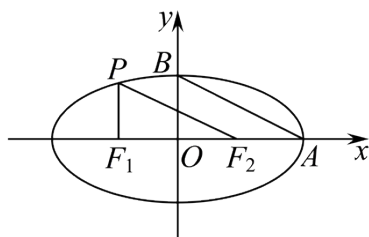
因为两圆有公共点，所以两圆相切或相交，则有 $r_2 - r_1 \leq |C_1C_2| \leq r_2 + r_1$ ，

即 $4 \leq \sqrt{a^2 + 4} \leq 6$ ，解得 $12 \leq a^2 \leq 32$ ，又 $a \geq 0$ ，所以 $2\sqrt{3} \leq a \leq 4\sqrt{2}$.

故选：C.

5. 如图所示，椭圆的中心在原点，焦点 F_1, F_2 在 x 轴上， A, B 是椭圆的顶点， P 是椭圆上一点，且

$PF_1 \perp x$ 轴, $PF_2 \parallel AB$, 则此椭圆的离心率是 ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】确定各点坐标, 根据 $PF_2 \parallel AB$ 得到 $k_{AB} = k_{PF_2}$, 确定 $b = 2c$, 得到离心率.

【详解】椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,

则点 P 的坐标为 $\left(-c, \frac{b^2}{a}\right)$, $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $F_2(c, 0)$,

于是 $k_{AB} = -\frac{b}{a}$, $k_{PF_2} = -\frac{b^2}{2ac}$, 由 $k_{AB} = k_{PF_2}$ 得 $-\frac{b}{a} = -\frac{b^2}{2ac}$, 即 $b = 2c$,

故 $a = \sqrt{5}c$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

故选: B

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 前 n 项和分别为 S_n , T_n , 若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{n+1}{n+3}$, 则 $\frac{a_2}{b_1+b_5} + \frac{a_4}{b_2+b_4}$ 等于 ()

- A. 2 B. $\frac{5}{4}$ C. 1 D. $\frac{3}{4}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据等差数列性质运算求解.

【详解】因为 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 为等差数列,

则 $\frac{a_2}{b_1+b_5} + \frac{a_4}{b_2+b_4} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_2}{b_3} + \frac{a_4}{b_3} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{2a_3}{b_3} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{5a_3}{5b_3} = \frac{S_5}{T_5} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$,

$$\text{即 } \frac{a_2}{b_1+b_5} + \frac{a_4}{b_2+b_4} = \frac{3}{4}.$$

故选：D.

7. 已知圆 $C: x^2 + (y-4)^2 = 1$ 上有一动点 P ，双曲线 $M: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 的左焦点为 F ，且双曲线的右支上

有一动点 Q ，则 $|PQ| + |QF|$ 的最小值为 ()

A. $4\sqrt{2} - 1$

B. $4\sqrt{2} - 5$

C. $4\sqrt{2} + 7$

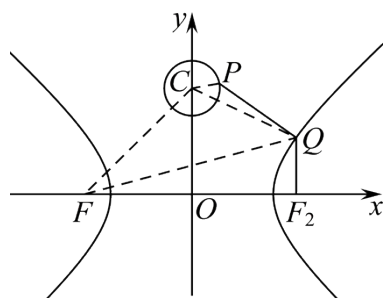
D. $4\sqrt{2} + 5$

【答案】D

【解析】

【分析】根据双曲线的定义，结合圆的几何性质进行求解即可.

【详解】



Q 在双曲线 $M: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 中， $a^2 = 9$ ， $b^2 = 7$ ，

$$\therefore c^2 = 16, \therefore F(-4, 0),$$

设双曲线的右焦点为 F_2 ，则 $F_2(4, 0)$ ，

Q 在双曲线的右支上，

$$\therefore |QF| - |QF_2| = 2a = 6, \text{ 即 } |QF| = |QF_2| + 6,$$

由题知，圆心 $C(0, 4)$ ，半径 $r = 1$ ， P 在圆 C 上，

$$\therefore |PQ| \geq |QC| - 1,$$

$$\text{则 } |PQ| + |QF| = |PQ| + |QF_2| + 6 \geq |QC| + |QF_2| + 5,$$

当 C ， Q ， F_2 三点共线且 Q 位于另两点之间时， $|QC| + |QF_2|$ 取得最小值为 $|CF_2| = 4\sqrt{2}$ ，

$$\text{此时 } |PQ| + |QF| \geq |QC| + |QF_2| + 5 = 4\sqrt{2} + 5,$$

$\therefore |PQ| + |QF|$ 的最小值为 $4\sqrt{2} + 5$.

故选: D.

8. 已知直线 $tx - y - t = 0$ ($0 < t < 1$) 恒过抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 F , 且与 C 交于点 A, B , 过线段 AB 的中点 D 作直线 $x = -1$ 的垂线, 垂足为 E , 记直线 EA, EB, EF 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 则 $k_1 k_2 k_3$ 的取值范围是 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-1, 0)$ D. $(-\infty, -1)$

【答案】B

【解析】

【分析】将直线与方程联立后得到与横坐标有关韦达定理后结合题意计算或者设出直线与抛物线相交两点坐标, 借助三点共线计算得到 $k_1 k_2$ 为定值, 即只需计算 k_3 的范围即可, 结合题意由中点公式计算即可得.

【详解】解法一:

因为直线 $tx - y - t = 0$ 恒过 C 的焦点 F , 所以 $F(1, 0)$,

则 $p = 2$, 抛物线 $C: y^2 = 4x$, 把 $y = tx - t$ 代入 C 的方程,

得 $t^2 x^2 - (2t^2 + 4)x + t^2 = 0$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

则 $x_1 + x_2 = 2 + \frac{4}{t^2}$, $x_1 x_2 = 1$, 所以 $y_1 + y_2 = t(x_1 + x_2) - 2t = \frac{4}{t}$,

所以 $D\left(1 + \frac{2}{t^2}, \frac{2}{t}\right), E\left(-1, \frac{2}{t}\right)$,

$$\text{则 } k_1 k_2 = \frac{y_1 - \frac{2}{t}}{x_1 + 1} \cdot \frac{y_2 - \frac{2}{t}}{x_2 + 1} = \frac{tx_1 - t - \frac{2}{t}}{x_1 + 1} \cdot \frac{tx_2 - t - \frac{2}{t}}{x_2 + 1} = \frac{t^2 x_1 x_2 - (t^2 + 2)(x_1 + x_2) + \left(t + \frac{2}{t}\right)^2}{x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1} = \frac{-4 - \frac{4}{t^2}}{4 + \frac{4}{t^2}} = -1,$$

$$k_3 = \frac{0 - \frac{2}{t}}{1 - (-1)} = -\frac{1}{t}, \text{ 所以 } k_1 k_2 k_3 = \frac{1}{t}, \text{ 由 } 0 < t < 1,$$

得 $k_1 k_2 k_3 = \frac{1}{t} \in (1, +\infty)$;

解法二:

因为直线 $tx - y - t = 0$ 恒过 C 的焦点 F , 所以 $F(1, 0)$,

则 $p=2$ ，抛物线 $C: y^2=4x$ ，

设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$ ， $B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$ ，

由 A, B, F 三点共线得 $\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4}-1} = \frac{y_2}{\frac{y_2^2}{4}-1}$ ，得 $y_1 y_2 = -4$ ，

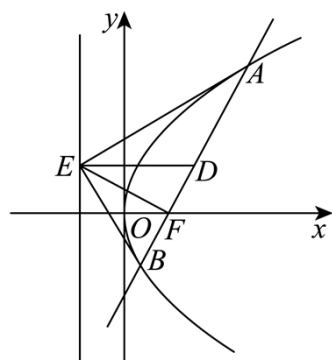
又 $E\left(-1, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ，所以 $k_1 k_2 = \frac{y_1 - \frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{y_1^2}{4}+1} \cdot \frac{y_2 - \frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{y_2^2}{4}+1}$
 $= \frac{8y_1 y_2 - 4y_1^2 - 4y_2^2}{y_1^2 y_2^2 + 4y_1^2 + 4y_2^2 + 16} = \frac{-32 - 4y_1^2 - 4y_2^2}{32 + 4y_1^2 + 4y_2^2} = -1$ ，

由直线 AB 的斜率为 t 得 $\frac{y_1 - y_2}{\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4}} = \frac{4}{y_1 + y_2} = t$ ，

得 $\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2}{t}$ ，则 $k_3 = \frac{0 - \frac{y_1 + y_2}{2}}{1 - (-1)} = -\frac{1}{t}$ ，所以 $k_1 k_2 k_3 = \frac{1}{t}$ ，

由 $0 < t < 1$ ，得 $k_1 k_2 k_3 = \frac{1}{t} \in (1, +\infty)$ 。

故选: B.



二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知曲线 $C_1: 4x^2 + 3y^2 = 48$, $C_2: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 则 ()

A. C_1 的长轴长为 4

B. C_2 的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$

C. C_1 与 C_2 的焦点坐标相同

D. C_1 与 C_2 的离心率互为倒数

【答案】BD

【解析】

【分析】根据椭圆与双曲线的标准方程，结合它们的几何性质逐项判断即可得.

【详解】由 $C_1: 4x^2 + 3y^2 = 48$ ，即为： $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$ ，故焦点在 y 轴上，

长轴长为 $2 \times \sqrt{16} = 8$ ，故 A 错误；

焦点坐标为 $(0, \pm 2)$ ，离心率为 $\frac{\sqrt{16-12}}{\sqrt{16}} = \frac{1}{2}$ ，

对 $C_2: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ ，渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$ ，故 B 正确；

焦点坐标为 $(\pm 2, 0)$ ， C_1 与 C_2 的焦点坐标不相同，故 C 错误；

离心率为 $\frac{\sqrt{1+3}}{\sqrt{1}} = 2$ ， C_1 与 C_2 的离心率互为倒数，故 D 正确.

故选：BD.

10. 直线 l 经过点 $(2, -4)$ ，且两坐标轴上的截距的绝对值相等，则直线 l 的方程可能是 ()

- A. $2x + y = 0$ B. $2x + y - 8 = 0$ C. $x - y - 6 = 0$ D. $x + y + 2 = 0$

【答案】ACD

【解析】

【分析】分截距为零与不为零讨论，不为零时设出截距式，利用点在直线上求出直线方程，逐一判断即可.

【详解】当直线 l 的截距为 0 时，直线 l 的方程为 $y = -2x$ ，即 $2x + y = 0$. 故 A 正确；

当直线 l 的截距不为 0 时，设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ，则 $\begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{-4}{b} = 1 \\ |a| = |b| \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a = 6, \\ b = -6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = -2, \\ b = -2. \end{cases}$

若 $\begin{cases} a = 6, \\ b = -6, \end{cases}$ 则直线 l 的方程为 $x - y = 6$ ，即 $x - y - 6 = 0$ ；故 C 正确；

若 $\begin{cases} a = -2, \\ b = -2, \end{cases}$ 则直线 l 的方程为 $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-2} = 1$ ，即 $x + y + 2 = 0$. 故 D 正确；

故选：ACD.

11. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_{23} > 0$ ， $S_{24} < 0$ ，则下列结论正确的是（ ）

A. 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列

B. $a_{13} > 0$

C. 当 S_n 取得最大值时， $n = 12$

D. $|a_{13}| > |a_{12}|$

【答案】CD

【解析】

【分析】设出公差，利用等差数列求和公式得到 $a_{12} > 0$ ， $a_{13} < 0$ ， $|a_{13}| > |a_{12}|$ ， $d = a_{13} - a_{12} < 0$ ，从而对选项一一判断，得到答案.

【详解】ABD 选项，设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，

$$S_{23} = \frac{23(a_1 + a_{23})}{2} = \frac{23 \times 2a_{12}}{2} = 23a_{12} > 0, \text{ 故 } a_{12} > 0,$$

$$S_{24} = \frac{24(a_1 + a_{24})}{2} = \frac{24(a_{12} + a_{13})}{2} = 12(a_{12} + a_{13}) < 0, \text{ 故 } a_{12} + a_{13} < 0,$$

所以 $a_{13} < 0$ ，且 $|a_{13}| > |a_{12}|$ ， $d = a_{13} - a_{12} < 0$ ，即 $\{a_n\}$ 是递减数列，AB 错误，D 正确.

C 选项，由于 $\{a_n\}$ 是递减数列， $a_{12} > 0$ ， $a_{13} < 0$ ，故当 S_n 取得最大值时， $n = 12$ ，C 正确.

故选：CD

12. 将数列 $\{a_n\}$ 中的所有项排成如下数阵：

a_1

$a_2 a_3 a_4$

$a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$

...

已知从第 2 行开始每一行比上一行多两项，第 1 列数 a_1 ， a_2 ， a_5 ，... 成等差数列，且 $a_2 = 2$ ， $a_{10} = 8$ ，

从第 2 行起，每一行中的数按从左到右的顺序均构成以 2 为公比的等比数列，则（ ）

A. $a_1 = -1$

B. a_{26} 位于第 5 行第 9 列

C. $a_{n^2} = (3n-4) \cdot 4^{n-1}$

D. 若 $a_n = 80$ ，则 a_n 位于第 3 行第 5 列或第 8 行第 3 列

【答案】AC

【解析】

【分析】结合题干信息，利用等差数列的通项公式计算公差 d 及 a_1 ，可判断选项 A；结合已知条件可得出第 n 行共有 $2n-1$ 项，利用等差数列的前 n 项和公式可得出前 n 行共有 n^2 项，进而可判断选项 B；根据第 n 行的数构成以 $3n-4$ 为首项，公比为 2 的等比数列即可求出 a_{n^2} ，判断选项 C；先求出第 m 行第 n 列数，建立方程组可判断选项 D.

【详解】由已知第 1 列数 $a_1, a_2, a_5, a_{10} \dots$ 成等差数列，且 $a_2 = 2, a_{10} = 8$.

设第 1 列数所组成的等差数列公差为 d ,

$$\text{则 } d = \frac{a_{10} - a_2}{2} = \frac{8 - 2}{2} = 3,$$

所以 $a_1 = a_2 - d = -1$ ，故选项 A 正确；

由题意可得：第 1 行共有 1 项，第 2 行共有 3 项，第 3 行共有 5 项，...，第 n 行共有 $2n-1$ 项.

所以前 1 行共有 1^2 项，前 2 行共有 2^2 项，前 3 行共有 3^2 项，...，前 5 行共有 25 项，前 n 行共有 n^2 项.

所以 a_{26} 位于第 6 行第 1 列，故选项 B 错误；

因为第 1 列数组成了以 $a_1 = -1$ 为首项， $d = 3$ 为公差的等差数列，

所以第 n 行的第 1 项为： $(-1) + (n-1)d = 3n-4$,

又因为每一行中的数按从左到右的顺序均构成以 2 为公比的等比数列，

所以第 n 行的数构成以 $3n-4$ 为首项，公比为 2 的等比数列，

则 $a_{n^2} = (3n-4) \cdot 2^{(2n-1)-1} = (3n-4) \cdot 4^{n-1}$ ，故选项 C 正确；

因为第 m 行的数构成以 $3m-4$ 为首项，公比为 2 的等比数列，

则第 m 行第 n 列数为： $a_{m-n} = (3m-4) \cdot 2^{n-1}$

$$\text{令 } a_{m-n} = (3m-4) \cdot 2^{n-1} = 80, \text{ 则得: } 3m-4 = \frac{160}{2^n} \quad (m, n \in \mathbb{N}^*).$$

$\therefore m = 28, n = 1; m = 8, n = 3; m = 3, n = 5$ ，故选项 D 错误.

故选：AC.

【点睛】关键点点睛：本题主要考查等差数列与等比数列的综合.解题关键在于对等差数列通项公式及求和公式、等比数列的通项公式的熟练灵活运用.

第 II 卷 非选择题 (共 90 分)

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 方程 $x^2 + y^2 + kx + 4y + 2k = 0$ 表示一个圆，则实数 k 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$

【解析】

【分析】根据一个二元二次方程表示圆的充要条件，写出关于 k 的不等式，解不等式即可.

【详解】把方程配方得： $\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = \frac{k^2}{4} - 2k + 4$ ，因为方程表示一个圆，

则 $\frac{k^2}{4} - 2k + 4 > 0$ ，解得 $k \neq 4$ ，则实数 k 的取值范围是 $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$.

故答案为： $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$.

14. 若椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的弦 AB 中点坐标为 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ，则直线 AB 的斜率为_____.

【答案】 $-\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】利用点差法求得正确答案.

【详解】由于 $\frac{1^2}{4} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{3} = \frac{1}{3} < 1$ ，所以点 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 在椭圆内部，

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，由已知 $x_1 + x_2 = 2$ ， $y_1 + y_2 = 1$ ，

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1 \\ \frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 两式相减得 } \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{4} + \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{3} = 0,$$

$$\therefore k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{3(x_1 + x_2)}{4(y_1 + y_2)} = -\frac{3 \times 2}{4 \times 1} = -\frac{3}{2}.$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/838016073020007022>