宁夏银川市宁大附中 2024 届高考数学四模试卷

考生请注意：

1．答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。

2．第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。

3．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-1\le 0 \\ x-y+3\le 0 \\ x+2\ge 0 \end{cases}$，则 x^2+y^2 的最大值是（　　）

A．$\frac{9}{2}$　　B．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　C．13　　D．$\sqrt{13}$

2．若向量 $\vec{a}=(1,5),\vec{b}=(-2,1)$，则 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=$（　　）

A．30　　B．31　　C．32　　D．33

3．已知复数 $z=\frac{2i}{i-1}$，则 z 的虚部为（　　）

A．－1　　B．$-i$　　C．1　　D．i

4．已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle ABC=60°$，则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=$（）

A．4　　B．6　　C．$2\sqrt{3}$　　D．$4\sqrt{3}$

5．已知 $a\in R,b\in R$，则“直线 $ax+2y-1=0$ 与直线 $(a+1)x-2ay+1=0$ 垂直”是“$a=3$”的(　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．设 $(1+i)a=1+bi$，其中 a，b 是实数，则 $|a+2bi|=$（　　）

A．1　　B．2　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{5}$

7．在 ΔABC 中，$C=30°$，$\cos A=-\frac{2}{3}$，$AC=\sqrt{15}-2$，则 AC 边上的高为（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B．2　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\frac{\sqrt{15}}{2}$

8．已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，圆 $x^2+y^2=b^2$ 与双曲线在第一象限内的交点为 M，若 $|MF_1|=3|MF_2|$．则该双曲线的离心率为

A．2　　**B．3**　　**C．**$\sqrt{2}$　　**D．**$\sqrt{3}$

9．若 **2**^{m}**＞2**^{n}**＞1**，则（　　）

A．$\frac{1}{m}>\frac{1}{n}$　　**B．**$\pi^{m-n}>1$

C．$\ln(m-n)>0$　　**D．**$\log_{\frac{1}{2}}m>\log_{\frac{1}{2}}n$

10．记单调递增的等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_2+a_4=10$，$a_2a_3a_4=64$，则（　　）

A．$S_{n+1}-S_n=2^{n+1}$　　**B．**$a_n=2^n$　　**C．**$S_n=2^n-1$　　**D．**$S_n=2^{n-1}-1$

11．若将函数$f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1$的图象上各点横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变)得到函数$g(x)$的图象，则下列说法正确的是（　　）

A．函数$g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$上单调递增　　**B．**函数$g(x)$的周期是$\frac{\pi}{2}$

C．函数$g(x)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$对称　　**D．**函数$g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$上最大值是 **1**

12．已知$(x+a)^5$展开式的二项式系数和与展开式中常数项相等，则x^2项系数为（　　）

A．10　　**B．32**　　**C．40**　　**D．80**

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知数列$\{a_n\}$与$\left\{\frac{a_n^{\ 2}}{n}\right\}$均为等差数列（$n\in N^*$），且$a_1=2$，则$a_{10}=$______.

14．将函数$f(x)=\sin 2x$的图像向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位，得到函数$g(x)$的图像，则函数$y=f(x)-g(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的值域为__________.

15．设x,y满足约束条件$\begin{cases}x+2y-2\le 0\\ x-y-1\le 0\\ 2x+y+1\ge 0\end{cases}$，则$z=\frac{x+1}{y+2}$的取值范围是______.

16．函数$f(x)=e^x-e^{1-x}-b|2x-1|$在$(0,1)$内有两个零点，则实数b的取值范围是________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知矩阵$M=\begin{bmatrix}-1 & a\\ b & 4\end{bmatrix}(a,b\in \mathrm{R})$不存在逆矩阵，且非零特征值对应的一个特征向量$\overset{r}{a}==\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，求$a$，$b$的值.

18．（12 分）若$a>0,b>0$,且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$

（1）求a^3+b^3的最小值；

（2）是否存在a,b，使得$2a+3b=6$？并说明理由.

19.（12分）设函数$f(x)=|x+a|+|x-1|(a\in R)$.

（1）当$a=1$时，求不等式$f(x)\geq 4$的解集；

（2）若对任意$x\in \mathbf{R}$都有$f(x)\geq 2$，求实数a的取值范围.

20.（12分）已知函数$f(x)=2\ln(x+1)+\sin x+1$，函数$g(x)=ax-1-b\ln x$（$a,b\in \mathbf{R},ab\neq 0$）.

（1）讨论$g(x)$的单调性；

（2）证明：当$x\geq 0$时，$f(x)\leq 3x+1$.

（3）证明：当$x>-1$时，$f(x)<(x^2+2x+2)e^{\sin x}$.

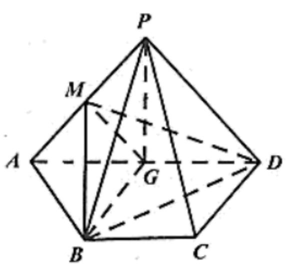
21.（12分）已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$a_{n+1}^2=2S_n+n+4$，a_2-1，a_3，a_7，恰为等比数列$\{b_n\}$的前3项.

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\left\{\frac{nb_n}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$T_n$；若对$\forall n\in N^*$均满足$T_n>\frac{m}{2020}$，求整数$m$的最大值；

（3）是否存在数列$\{c_n\}$满足等式$\sum_{i=1}^{n}(a_i-1)c_{n+1-i}=2^{n+1}-n-2$成立，若存在，求出数列$\{c_n\}$的通项公式；若不存在，请说明理由.

22.（10分）如图，已知四边形$ABCD$的直角梯形，$AD\parallel BC$，$AD\perp DC$，$AD=4$，$DC=BC=2$，G为线段AD的中点，$PG\perp$平面$ABCD$，$PG=2$，M为线段AP上一点（M不与端点重合）.



（1）若$AM=MP$，

（ⅰ）求证：$PC\parallel$平面BMG；

（ⅱ）求平面PAD与平面BMD所成的锐二面角的余弦值；

（2）否存在实数λ满足$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AP}$，使得直线$PB$与平面$BMG$所成的角的正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$，若存在，确定的$\lambda$

值，若不存在，请说明理由．

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**C**

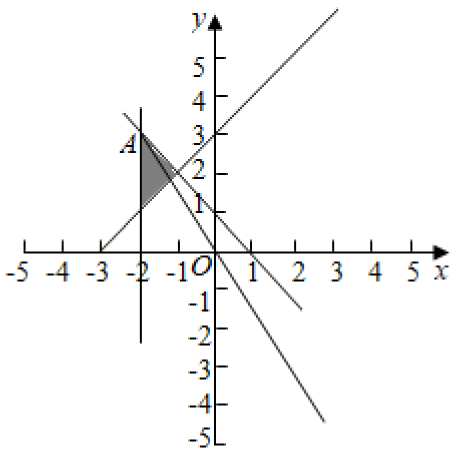
【解析】

由已知画出可行域，利用目标函数的几何意义求最大值．

【详解】

解：x^2+y^2表示可行域内的点(x,y)到坐标原点的距离的平方，画出不等式组表示的可行域，如图，由$\begin{cases}x+y-1=0\\x+2=0\end{cases}$

解得$\begin{cases}y=3\\x=-2\end{cases}$即$A(-2,3)$



点$A(-2,3)$到坐标原点$(0,0)$的距离最大，即$(x^2+y^2)_{max}=(-2)^2+3^2=13$．

故选：C．

【点睛】

本题考查线性规划问题，考查数形结合的数学思想以及运算求解能力，属于基础题．

2、**C**

【解析】

先求出$\vec{a}+2\vec{b}$,再与$\vec{a}$相乘即可求出答案.

【详解】

因为$\vec{a}+2\vec{b}=(1,5)+(-4,2)=(-3,7)$,所以$\vec{a}\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=-3+5\times7=32$.

故选:C.

【点睛】

本题考查了平面向量的坐标运算,考查了学生的计算能力,属于基础题.

3、A

【解析】

分子分母同乘分母的共轭复数即可.

【详解】

$z=\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}=\frac{2\mathrm{i}(\mathrm{i}+1)}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}+1)}=\frac{-2+2\mathrm{i}}{-2}=1-\mathrm{i}$，故$z$的虚部为$-1$.

故选：A.

【点睛】

本题考查复数的除法运算，考查学生运算能力，是一道容易题.

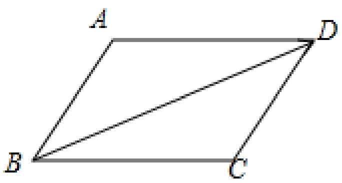
4、B

【解析】

根据菱形中的边角关系，利用余弦定理和数量积公式，即可求出结果.

【详解】

如图所示，



菱形形$ABCD$的边长为2，$\angle ABC=60°$，

$\therefore\angle C=120°$，$\therefore BD^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos120°=12$，

$\therefore BD=2\sqrt{3}$，且$\angle BDC=30°$，

$\therefore \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{BD}|\times|\overrightarrow{CD}|\times cos30°=2\sqrt{3}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$，

故选 B.

【点睛】

本题主要考查了平面向量的数量积和余弦定理的应用问题，属于基础题..

5、**B**

【解析】

由两直线垂直求得则$a=0$或$a=3$，再根据充要条件的判定方法，即可求解.

【详解】

由题意，“直线$ax+2y-1=0$与直线$(a+1)x-2ay+1=0$垂直”

则$a(a+1)+2\times(-2a)=0$，解得$a=0$或$a=3$，

所以“直线$ax+2y-1=0$与直线$(a+1)x-2ay+1=0$垂直”是“$a=3$”的必要不充分条件，故选**B.**

【点睛】

本题主要考查了两直线的位置关系，及必要不充分条件的判定，其中解答中利用两直线的位置关系求得a的值，同时熟记充要条件的判定方法是解答的关键，着重考查了推理与论证能力，属于基础题.

6、**D**

【解析】

根据复数相等，可得a,b，然后根据复数模的计算，可得结果.

【详解】

由题可知：$\left(1+i\right)a=1+bi$，

即$a+ai=1+bi$，所以$a=1,b=1$

则$\left|a+2bi\right|=\left|1+2i\right|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

故选：**D**

【点睛】

本题考查复数模的计算，考验计算，属基础题.

7、**C**

【解析】

结合正弦定理、三角形的内角和定理、两角和的正弦公式，求得BC边长，由此求得AC边上的高.

【详解】

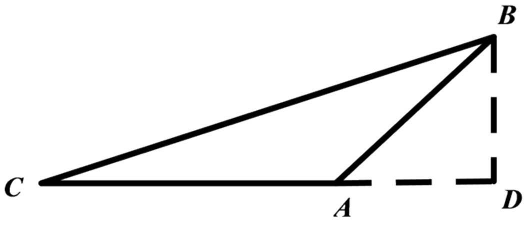
过B作$BD\perp CA$，交CA的延长线于D.由于$\cos A=-\dfrac{2}{3}$，所以A为钝角，且$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，所以

$\sin\angle CBA=\sin\left(\pi-\angle CBA\right)=\sin\left(A+C\right)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{15}-2}{6}$.在三角形

ABC 中，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即 $\frac{BC}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{\sqrt{15}-2}{\frac{\sqrt{15}-2}{6}}$，所以 $BC=2\sqrt{5}$.在 $Rt\Delta BCD$ 中有

$BD=BC\sin C=2\sqrt{5}\times\frac{1}{2}=\sqrt{5}$，即 AC 边上的高为 $\sqrt{5}$.

故选：C



【点睛】

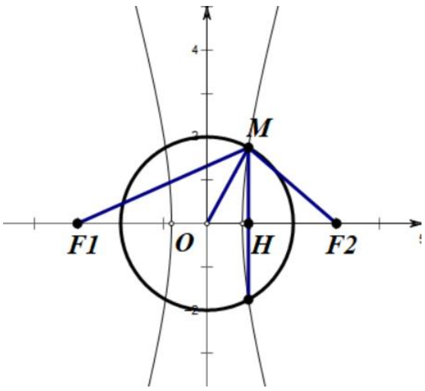
本小题主要考查正弦定理解三角形，考查三角形的内角和定理、两角和的正弦公式，属于中档题.

8、D

【解析】

本题首先可以通过题意画出图像并过 M 点作 F_1F_2 垂线交 F_1F_2 于点 H，然后通过圆与双曲线的相关性质判断出三角形 OMF_2 的形状并求出高 MH 的长度，MH 的长度即 M 点纵坐标，然后将 M 点纵坐标带入圆的方程即可得出 M 点坐标，最后将 M 点坐标带入双曲线方程即可得出结果。

【详解】



根据题意可画出以上图像，过 M 点作 F_1F_2 垂线并交 F_1F_2 于点 H，

因为 $|MF_1|=3|MF_2|$，M 在双曲线上，

所以根据双曲线性质可知，$|MF_1|-|MF_2|=2a$，即 $3|MF_2|-|MF_2|=2a$，$|MF_2|=a$，

因为圆 $x^2+y^2=b^2$ 的半径为 b，OM 是圆 $x^2+y^2=b^2$ 的半径，所以 $OM=b$，

因为$OM=b$，$\left|MF_2\right|=a$，$OF_2=c$，$a^2+b^2=c^2$，

所以$\angle OMF_2=90^\circ$，三角形OMF_2是直角三角形，

因为$MH\perp OF_2$，所以$OF_2\times MH=OM\times MF_2$，$MH=\frac{ab}{c}$，即$M$点纵坐标为$\frac{ab}{c}$，

将M点纵坐标带入圆的方程中可得$x^2+\frac{a^2b^2}{c^2}=b^2$，解得$x=\frac{b^2}{c}$，$M\left(\frac{b^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$，

将M点坐标带入双曲线中可得$\frac{b^4}{a^2c^2}-\frac{a^2}{c^2}=1$，

化简得$b^4-a^4=a^2c^2$，$\left(c^2-a^2\right)^2-a^4=a^2c^2$，$c^2=3a^2$，$e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$，故选**D**。

【点睛】

本题考查了圆锥曲线的相关性质，主要考察了圆与双曲线的相关性质，考查了圆与双曲线的综合应用，考查了数形结合思想，体现了综合性，提高了学生的逻辑思维能力，是难题。

9、**B**

【解析】

根据指数函数的单调性，结合特殊值进行辨析.

【详解】

若$2^m>2^n>1=2^0$，$\therefore m>n>0$，$\therefore \pi^{m-n}>\pi^0=1$，故$B$正确；

而当$m=\dfrac{1}{2}$，$n=\dfrac{1}{4}$时，检验可得，A、C、D都不正确，

故选：**B**.

【点睛】

此题考查根据指数幂的大小关系判断参数的大小，根据参数的大小判定指数幂或对数的大小关系，需要熟练掌握指数函数和对数函数的性质，结合特值法得出选项.

10、**C**

【解析】

先利用等比数列的性质得到a_3的值，再根据a_2,a_4的方程组可得a_2,a_4的值，从而得到数列的公比，进而得到数列的通项和前n项和，根据后两个公式可得正确的选项.

【详解】

因为$\left\{a_n\right\}$为等比数列，所以$a_3^2=a_2a_4$，故$a_3^3=64$即$a_3=4$，

由$\begin{cases}a_2+a_4=10\\a_2a_4=16\end{cases}$可得$\begin{cases}a_2=2\\a_4=8\end{cases}$或$\begin{cases}a_2=8\\a_4=2\end{cases}$，因为$\left\{a_n\right\}$为递增数列，故$\begin{cases}a_2=2\\a_4=8\end{cases}$符合.

此时$q^2=4$，所以$q=2$或$q=-2$（舍，因为$\left\{a_n\right\}$为递增数列）.

故 $a_n=a_3q^{n-3}=4\times2^{n-3}=2^{n-1}$，$S_n=\dfrac{1\times\left(1-2^n\right)}{1-2}=2^n-1$.

故选 **C.**

【点睛】

一般地，如果 $\{a_n\}$ 为等比数列，S_n 为其前 n 项和，则有性质：

（1）若 $m,n,p,q\in N^*,m+n=p+q$，则 $a_ma_n=a_pa_q$；

（2）公比 $q\neq1$ 时，则有 $S_n=A+Bq^n$，其中 A,B 为常数且 $A+B=0$；

（3）$S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n},\cdots$ 为等比数列（$S_n\neq0$）且公比为 q^n.

11、**A**

【解析】

根据三角函数伸缩变换特点可得到 $g(x)$ 解析式；利用整体对应的方式可判断出 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，A 正确；关于点 $\left(-\dfrac{\pi}{12},-1\right)$ 对称，C 错误；根据正弦型函数最小正周期的求解可知 B 错误；根据正弦型函数在区间内值域的求解可判断出最大值无法取得，D 错误.

【详解】

将 $f(x)$ 横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 得：$g(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1$

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 时，$2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\because \sin x$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增　　$\therefore g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，A 正确；

$g(x)$ 的最小正周期为：$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$　　$\therefore \dfrac{\pi}{2}$ 不是 $g(x)$ 的周期，B 错误；

当 $x=-\dfrac{\pi}{12}$ 时，$2x+\dfrac{\pi}{6}=0$，$g\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=-1$

$\therefore g(x)$ 关于点 $\left(-\dfrac{\pi}{12},-1\right)$ 对称，C 错误；

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 时，$2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$　　$\therefore g(x)\in(0,1)$