2025届高三年级期初阳光调研试卷

数学

2024.9

注意事项

学生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求：

1.本卷共4页，包含单项选择题（第1题~第8题）、多项选择题（第9题~第11题）、填空题（第12题~第14题）、解答题（第15题~第19题）.本卷满分150分，答题时间为120分钟.答题结束后，请将答题卡交回.

2.答题前，请您务必将自己的姓名、调研序列号用0.5毫米黑色墨水的签字笔填写在答题卡的规定位置.

3.请在答题卡上按照顺序在对应的答题区域内作答，在其他位置作答一律无效.作答必须用0.5毫米黑色墨水的签字笔.请注意字体工整，笔迹清楚.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.若i是虚数单位，则$\dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=$

A.$1-2\mathrm{i}$　　B.$-1-2\mathrm{i}$　　C.$1+2\mathrm{i}$　　D.$-1+2\mathrm{i}$

2.已知集合$A=\left\{x\middle|2\le x<6\right\}$，$B=\left\{x\middle|x^2-4x<0\right\}$，则$A\cap B=$

A.$\left(0,6\right)$　　B.$\left(4,6\right)$　　C.$\left[2,4\right)$　　D.$\left(-\infty,0\right)\cup\left[2,+\infty\right)$

3.将函数$f\left(x\right)=\sin x$的图象先向左平移$\dfrac{\pi}{4}$个单位，再将所得图象上所有点的纵坐标保持不变，横坐标变为原来的$\dfrac{1}{2}$，得到函数$y=g\left(x\right)$的图象，则$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$

A.$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B.1　　C.$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D.-1

4.已知向量$\vec{a}=\left(1,-1\right)$，$\vec{b}=\left(x-2,x^2\right)$，则“$x=-2$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件　　C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

5.“绿水青山就是金山银山”的理念深入人心，人民群众的生态环境获得感、幸福感、安全感不断提升.某校高一年级举行环保知识竞赛，共500人参加，若参赛学生成绩的第60百分位数是80分，则关于竞赛成绩不小于80分的人数的说法正确的是

A.至少为300人　　B.至少为200人　　C.至多为300人　　D.至多为200人

6.已知正四棱锥的侧面积是底面积的2倍，则该正四棱锥侧棱和底面所成角的余弦值为

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　　D. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

7.已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}\left(x-a-1\right)$（e 为自然对数的底数），$g\left(x\right)=\ln\left(x\mathrm{e}^{x}\right)-a$ 的零点分别为 x_1，x_2，则 $\dfrac{x_1}{x_2}$ 的最大值为

A.e　　B. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　　C.1　　D. $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$

8.在平面直角坐标系 xOy 中，A，B 为双曲线 $C:x^2-y^2=1$ 右支上两点，若 $AB=6$，则 AB 中点横坐标的最小值为

A. $2\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. $\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$　　D. $\dfrac{16}{3}$

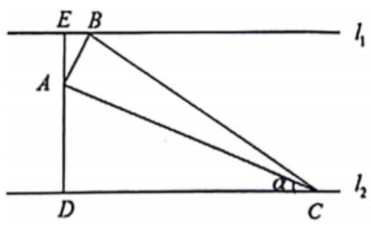
二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9.已知二项式 $\left(x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式，则

A.二项式系数最大的项为第 3 项　　B.常数项为第 5 项

C.展开式中含 x^3 的项为 $60x^3$　　D.展开式中所有项的系数和为 64

10.如图，已知直线 $l_1/\!/l_2$，A 是 l_1，l_2 之间的一定点，A 到 l_1 的距离 $AE=1$，A 到 l_2 的距离 $AD=2$ .B，C 分别在 l_1，l_2 上，设 $\angle ACD=\alpha$，则



A.若 $\alpha=30°$，$AB\perp AC$，则 AB=2　　B.若 $AB\perp AC$，则△ABC 面积的最小值为 2

C.若△ABC 为等边三角形，则 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D.若∠BAC=60°，则 $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{2}{AC}$ 的最大值为 1

11.若数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足：$a_1=1$，对 $\forall m$，$n\in\mathbf{N}^*$ 有 $\dfrac{1}{a_{n+m}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_m}$ 成立.则

A. $a_{2024}=\dfrac{1}{2024}$

B. $\exists n\in \mathbf{N}^*$，使得 $a_2^2+a_3^2+\cdots a_{n+1}^2>\dfrac{2}{3}$

C.对 $\forall n\in \mathbf{N}^*$，都有 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n>\ln\left(n+1\right)$

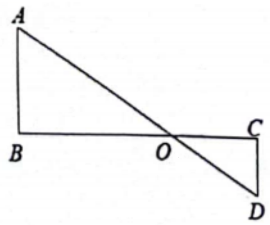
D.对 $\forall n\in \mathbf{N}^*$，都有 $a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{n+1}<\ln\left(n+1\right)$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12.△*ABC* 内角 *A*，*B*，*C* 的对边分别为 *a*，*b*，*c*，若 *B*=30°，$b=\sqrt{13}$，*c*=2，则 *a*=________.

13.已知直线 $l:\left(2k+1\right)x-ky-1=0$（其中 *k* 为常数），圆 $O:x^2+y^2=8$，直线 *l* 与圆 *O* 相交于 *A*，*B* 两点，则 *AB* 长度最小值为________.

14.如图，线段 *AD*，*BC* 相交于 *O*，且 *AB*，*AD*，*BC*，*CD* 长度构成集合 $\left\{1,5,9,x\right\}$，∠*ABO*=∠*DCO*=90°，则 *x* 的取值个数为________.



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）

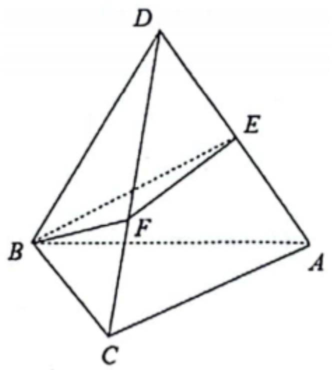
2024 年 7 月 26 日第 33 届夏季奥林匹克运动会在法国巴黎开幕，为了保证奥运赛事的顺利组织和运行，以及做好文化交流、信息咨询、观众引导等多方面的工作，每项比赛都需要若干名志愿者参加服务，每名志愿者可服务多个项目.8 月 7 日 100 米跨栏、200 米、400 米、800 米、1500 米、5000 米比赛在法兰西体育场举行.

（1）志愿者汤姆可以在以上 6 个项目中选择 3 个参加服务，求汤姆在选择 200 米服务的条件下，选择 1500 米服务的概率；

（2）为了调查志愿者参加服务的情况，从仅参加 1 个项目的志愿者中抽取了 10 名同学，其中 6 名参加 5000 米服务，4 名参加 800 米服务.现从这 10 名同学中再选 3 名同学做进一步调查.将其中参加 800 米服务的人数记作 *X*，求随机变量 *X* 的分布列和数学期望.

16.（15 分）

如图，在三棱锥 *D*－*ABC* 中，△*ABC* 是以 *AB* 为斜边的等腰直角三角形，△*ABD* 是边长为 2 的正三角形，*E* 为 *AD* 的中点，*F* 为 *DC* 上一点，且平面 *BEF*⊥平面 *ABD*.



（1）求证：$AD \perp$ 平面 BEF；

（2）若平面 $ABC \perp$ 平面 ABD，求平面 BEF 与平面 BCD 夹角的余弦值.

17.（15 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\sin x+\mathrm{e}^{x}-4x$，e 为自然对数的底数，函数 $g\left(x\right)=x^{3}-ax+3$.

（1）若 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 处的切线也是 $g\left(x\right)$ 的切线，求实数 a 的值；

（2）求 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\pi,+\infty\right)$ 上的零点个数.

18.（17 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\dfrac{x^{2}}{a^{2}}+\dfrac{y^{2}}{b^{2}}=1\left(a>b>0\right)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，A 为椭圆左顶点，已知点 $P\left(1,2\right)$，且直线 PA 的斜率为 $\dfrac{2}{3}$.过点 $M\left(t,0\right)$ 作直线 l 交椭圆于 B，C 两点（B 在 x 轴上方，C 在 x 轴下方），设 PB，PC 两直线分别交椭圆于另一点 D，E（B，E 分别在线段 PD，PC 上）.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）当 $t=1$ 时，若 l 的斜率小于零，且△PBC 的面积为 $\dfrac{8}{5}$，求证：∠BMD=∠DPC；

（3）若存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{DC}$，求此时直线 DC 的斜率.

19.（17 分）

如果数列 $\left\{a_{n}\right\}$ 满足 $a_{n+1}^{2}\le a_{n}a_{n+2}\left(n\in\mathbf{N}^{*}\right)$，则称之为凸数列.

现给定函数 $f\left(x\right)$ 及凸数列 $\left\{a_{n}\right\}$，它们满足以下两个条件：

①$0<a_{n}<a_{n+1}$；

②对 $\forall n\ge 2$，有 $\left|f\left(a_{n}\right)-f\left(a_{n+1}\right)\right|\le\lambda^{n}\left|a_{n}-a_{n+1}\right|\le\left|f\left(a_{n-1}\right)-f\left(a_{n}\right)\right|$（$\lambda$ 为正常数）.

（1）若数列 $\left\{b_{n}\right\}$ 满足 $b_{n}>1$，$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(b_{n}+\dfrac{1}{b_{n}}\right)$，且数列 $\left\{c_{n}\right\}$ 满足 $c_{n}=\ln\dfrac{b_{n}+1}{b_{n}-1}$，请判断 $\left\{c_{n}\right\}$ 是否为凸

数列，并说明理由；

（2）若$\left|f\left(a_2\right)-f\left(a_3\right)\right|=2$，求证：$\sum_{i=2}^{10}\left|a_{i+1}-a_i\right|>18$；

（3）对任何大于等于 2 的正整数 i，j 且 $i\le j$，求证：$\left|f\left(a_i\right)-f\left(a_j\right)\right|\le\left|a_i-a_j\right|$.

2025 届高三年级期初阳光调研试卷

数学　　　　2024.9

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．若 i 是虚数单位，则 $\dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=$

A．$1-2\mathrm{i}$　　B．$-1-2\mathrm{i}$　　C．$1+2\mathrm{i}$　　D．$-1+2\mathrm{i}$

【答案】B

【解析】 $\dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=-1-2\mathrm{i}$，选 B.

2．已知集合 $A=\{x\,|\,2\le x<6\}$，$B=\{x\,|\,x^2-4x<0\}$，则 $A\cap B=$

A．$(0,6)$　　B．$(4,6)$　　C．$[2,4)$　　D．$(-\infty,0)\cup[2,+\infty)$

【答案】C

【解析】 $B=\{x\,|\,0<x<4\}$，$A\cap B=\{x\,|\,2\le x<4\}$，选 C.

3．将函数 $f(x)=\sin x$ 的图象先向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位，再将所得图象上所有点的纵坐标保持不变，横坐标变为原来的 $\dfrac{1}{2}$，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，则 $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$

A．$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．1　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D．-1

【答案】A

【解析】 $f(x)=\sin x$ 向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位变为 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，横坐标变为原来的 $\dfrac{1}{2}$ 变为 $g(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，选 A.

4．已知向量 $\vec{a}=(1,-1)$，$\vec{b}=(x-2,x^2)$，则“$x=-2$”是“$\vec{a}\,//\,\vec{b}$”的

A．充分不必要条件B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　　　　　　　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow x^2 = -(x-2)$ 即 $x=1$ 或 -2，$\therefore$ “$x=-2$” 是 “$\vec{a} // \vec{b}$” 的充分不必要条件，选 A.

5．“绿水青山就是金山银山”的理念深入人心，人民群众的生态环境获得感、幸福感、安全感不断提升，某校高一年级举行环保知识竞赛，共 500 人参加，若参赛学生成绩的第 60 百分位数是 80 分，则关于竞赛成绩不小于 80 分的人数的说法正确的是

A．至少为 300 人　B．至少为 200 人　C．至多为 300 人　D．至多为 200 人

【答案】B

【解析】$60\% \times 500 = 300$，$500-300=200$，选 B.

6．已知正四棱锥的侧面积是底面积的 2 倍，则该正四棱锥侧棱和底面所成角的余弦值为

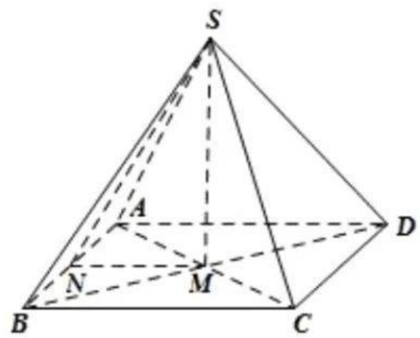
A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　B．$\dfrac{1}{2}$　　　C．$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　　　D．$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

【答案】D

【解析】$S_{侧} = 4S_{\triangle SAB} = 4 \cdot \dfrac{1}{2} SN \cdot AB = 2SN \cdot AB$，$S_{底} = AB^2$，

$\therefore 2SN \cdot AB = 2AB^2$，$\therefore SN = AB = 2MN$，侧棱与底面所成角为 $\angle SBM$

$\cos\angle SBM = \dfrac{BM}{SB} = \dfrac{\sqrt{2}MN}{\sqrt{SN^2+BN^2}} = \dfrac{\sqrt{2}MN}{\sqrt{4MN^2+MN^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$，选 D.



7．已知函数 $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}(x-a-1)$（e 为自然对数的底数），$g(x) = \ln(x\mathrm{e}^x) - a$ 的零点分

别为 x_1，x_2，则 $\frac{x_1}{x_2}$ 的最大值为

A．e　　B．$\frac{1}{e}$　　C．1　　D．$\frac{2}{e}$

【答案】C

【解析】 $f(x)=0$，则 $e^x+e(x-a-1)=0$，$\therefore e^{x-1}+x-1-a=0$，即 $e^{x_1-1}+x_1-1-a=0$

$g(x)=0$，则 $x+\ln x-a=0$，即 $x_2+\ln x_2-a=0$，$\therefore e^{x_1-1}=x_2$，$\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_1}{e^{x_1-1}}$

$h(x)=\frac{x}{e^{x-1}}$，$h'(x)=\frac{1-x}{e^{x-1}}=0$，$x=1$，$h(x)$ 在 $(0,1)\nearrow$，$(1,+\infty)\swarrow$

$h(x)_{\max}=h(1)=\frac{1}{e^0}=1$，选 C.

8．在平面直角坐标系 xOy 中，A，B 为双曲线 $C:x^2-y^2=1$ 右支上两点，若 $AB=6$，则 AB 中点横坐标的最小值为

A．$2\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{10}$　　C．$\frac{4\sqrt{5}}{3}$　　D．$\frac{16}{3}$

【答案】A

【解析】 AB 的斜率不存在时，$AB:x=\sqrt{10}$，此时 AB 中点的横坐标 $\sqrt{10}$

AB 的斜率存在时，资料分享 Q 群：618304895 设 $AB:y=kx+m$

$\begin{cases}kx-y+m=0\\x^2-y^2=1\end{cases}$ 消 y 可得 $(1-k^2)x^2-2kmx-m^2-1=0$，$\because x_1x_2>0$，$\therefore k^2>1$

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\frac{4k^2m^2}{(1-k^2)^2}-4\frac{-m^2-1}{1-k^2}}$

$=\frac{\sqrt{1+k^2}\sqrt{4m^2+4-4k^2}}{|1-k^2|}=\frac{2\sqrt{k^2+1}\sqrt{m^2+1-k^2}}{k^2-1}=6$，

$m^2=\frac{9(k^2-1)^2}{k^2+1}+k^2-1$，$x_1+x_2=\frac{2km}{1-k^2}$，$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{km}{1-k^2}$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=\frac{k^2m^2}{(1-k^2)^2}=\frac{k^2}{(1-k^2)^2}\left(\frac{9(k^2-1)^2}{k^2+1}+k^2-1\right)=\frac{9k^2}{k^2+1}+\frac{k^2}{k^2-1}$$

$f(x)=\frac{9x}{x+1}+\frac{x}{x-1}(x>1)$，$f'(x)=\frac{9}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}=0$，$x=2$

$f(x)_{\min}=f(2)=8$，$\therefore$中点横坐标最小值$2\sqrt{2}$，选 A.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9．已知二项式$\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$的展开式，则

A．二项式系数最大的项为第3项　　B．常数项为第5项

C．展开式中含x^3的项为$60x^3$　　D．展开式中所有项的系数和为64

【答案】BC

【解析】$\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$展开式第$r+1$项$T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^r=C_6^r 2^r x^{6-r}x^{-\frac{1}{2}r}=C_6^r 2^r x^{6-\frac{3}{2}r}$

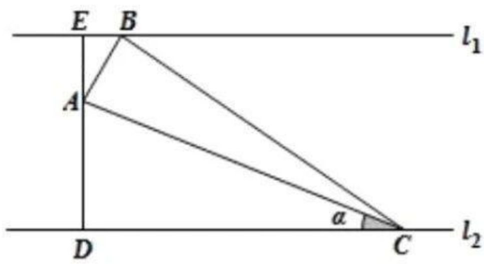
二项式系数最大的项为第4项，A 错.

$6-\frac{3}{2}r=0$，则$r=4$，$\therefore$常数项第5项，B 对.

$6-\frac{3}{2}r=3$，则$r=2$，$T_3=C_6^2 2^2 x^3=60x^3$，C 对.

$x=1$时，$(1+2)^6=3^6\neq 64$，D 错，选 BC.

10．如图，已知直线$l_1 // l_2$，A是l_1，l_2之间的一定点，A到l_1的距离$AE=1$，A到l_2的距离$AD=2$，B,C分别在l_1，l_2上，设$\angle ACD=\alpha$，则



A．若$\alpha = 30°$，$AB \perp AC$，则$AB = 2$

B．若$AB \perp AC$，则$\triangle ABC$面积的最小值为2

C．若$\triangle ABC$为等边三角形，则$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

D．若$\angle BAC = 60°$，则$\frac{1}{AB} + \frac{2}{AC}$的最大值为$1$

【答案】BCD

【解析】$\alpha = 30°$，$AB \perp AC$，则$\angle DAC = 60°$，$\angle EAB = 30°$，

$AB = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \neq 2$，A错.

$AB \perp AC$，则$\angle EAB = \alpha$，$AC = \frac{2}{\sin\alpha}$，$AB = \frac{1}{\cos\alpha}$，

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\frac{2}{\sin\alpha}\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha} \geq 2$，B对.

$\mathrm{Rt}\triangle ACD$中，$AC = \frac{2}{\sin\alpha}$，$\angle OAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$，$\angle BAC = \frac{\pi}{3}$，$\therefore \angle EAB = \frac{\pi}{6} + \alpha$

$AB = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)}$，即$\frac{2}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)}$，$\therefore \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$，C对.

$\angle BAC = 60°$，则$AB = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)}$，$AC = \frac{2}{\sin\alpha}$，

$\frac{1}{AB} + \frac{2}{AC} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \sin\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$，D对，选BCD.

11．若数列$\{a_n\}$满足：$a_1 = 1$，对$\forall m,n \in \mathbf{N}^*$有$\frac{1}{a_{n+m}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_m}$成立，则

A．$a_{2024} = \frac{1}{2024}$