

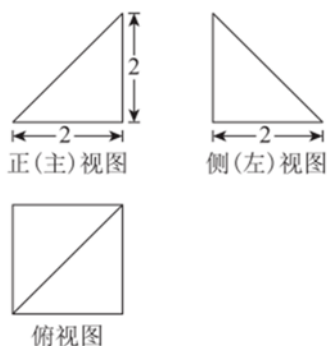
辽宁省四校联考 2023-2024 学年高考数学一模试卷

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z_1 = 1 + ai$ ($a \in \mathbb{R}$), $z_2 = 1 + 2i$ (i 为虚数单位), 若 $\frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数, 则 $a =$ ()
 A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
2. 已知各项都为正的等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_3 + a_4 = 15$, 若 $a_1 + 2$, $a_3 + 4$, $a_6 + 16$ 成等比数列, 则 $a_{10} =$ ()
 A. 19 B. 20 C. 21 D. 22
3. 在 $\triangle ABC$ 中, D 在边 AC 上满足 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, E 为 BD 的中点, 则 $\overrightarrow{CE} =$ ().
 A. $\frac{7}{8}\overrightarrow{BA} - \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$ B. $\frac{3}{8}\overrightarrow{BA} - \frac{7}{8}\overrightarrow{BC}$ C. $\frac{3}{8}\overrightarrow{BA} + \frac{7}{8}\overrightarrow{BC}$ D. $\frac{7}{8}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$
4. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(x)$, 当 $x \in [-3, -2]$ 时, $f(x) = -x - 2$, 则 ()
 A. $f\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) > f\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)$ B. $f(\sin 3) < f(\cos 3)$
 C. $f\left(\sin\frac{4\pi}{3}\right) < f\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)$ D. $f(2020) > f(2019)$
5. 某四棱锥的三视图如图所示, 记 S 为此棱锥所有棱的长度的集合, 则 ()



- A. $2\sqrt{2} \notin S$, 且 $2\sqrt{3} \notin S$
- B. $2\sqrt{2} \notin S$, 且 $2\sqrt{3} \in S$

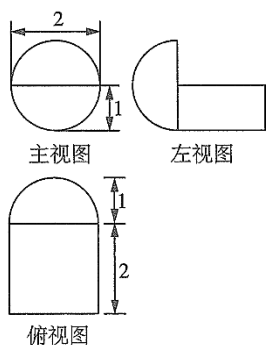
C. $2\sqrt{2} \in S$, 且 $2\sqrt{3} \notin S$

D. $2\sqrt{2} \in S$, 且 $2\sqrt{3} \in S$

6. 现有甲、乙、丙、丁 4 名学生平均分成两个志愿者小组到校外参加两项活动,则乙、丙两人恰好参加同一项活动的概率为

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{12}$

7. 某几何体的三视图如图所示,则该几何体的体积是 ()

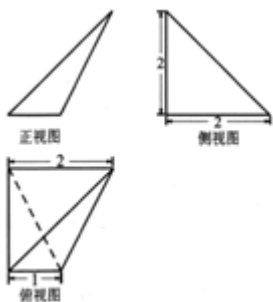


A. $\frac{5\pi}{3}$ B. $\frac{4\pi}{3}$ C. $2 + \frac{2\pi}{3}$ D. $4 + \frac{2\pi}{3}$

8. $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a=1$, $B=30^\circ$, $\cos C = \frac{-2\sqrt{7}}{7}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{7}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

9. 某三棱锥的三视图如图所示,则该三棱锥的体积为



A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 2 D. $\frac{8}{3}$

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2 + \log_{\frac{1}{2}} x, & \frac{1}{8} \leq x < 1 \\ 2^x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 若 $f(a) = f(b) (a < b)$, 则 ab 的最小值为 ()

参考数据: $\ln 2 \approx 0.69, \ln^2 2 \approx 0.48$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\log_2 \sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

11. 集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$, $B = \{x | x - 1 < 0\}$, 则 $A \cup B =$ ()

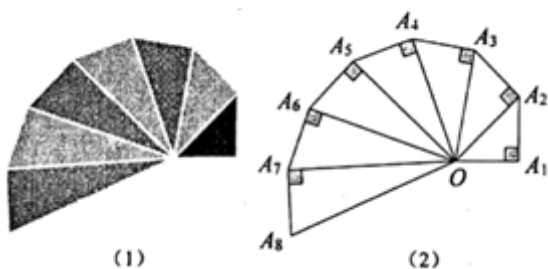
- A. $\{x | x < 1\}$ B. $\{x | -1 \leq x < 1\}$
C. $\{x | x \leq 2\}$ D. $\{x | -2 \leq x < 1\}$

12. 设数列 $\{a_n\} (n \in N^*)$ 的各项均为正数, 前 n 项和为 S_n , $\log_2 a_{n+1} = 1 + \log_2 a_n$, 且 $a_3 = 4$, 则 $S_6 =$ ()

- A. 128 B. 65 C. 64 D. 63

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 图 (1) 是第七届国际数学教育大会 (ICME-7) 的会徽图案, 它是由一串直角三角形演化而成的 (如图 (2)), 其中 $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_7A_8 = 1$, 则 $\overline{A_6A_7} \cdot \overline{A_7A_8}$ 的值是_____.



14. 已知函数 $f(x) = \ln x + x^2$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为_____.

15. 已知函数 $f(x) = 4 \sin x + \frac{1}{3}x^3$ 在 $x = 0$ 处的切线与直线 $nx - y - 6 = 0$ 平行, 则 n 为_____.

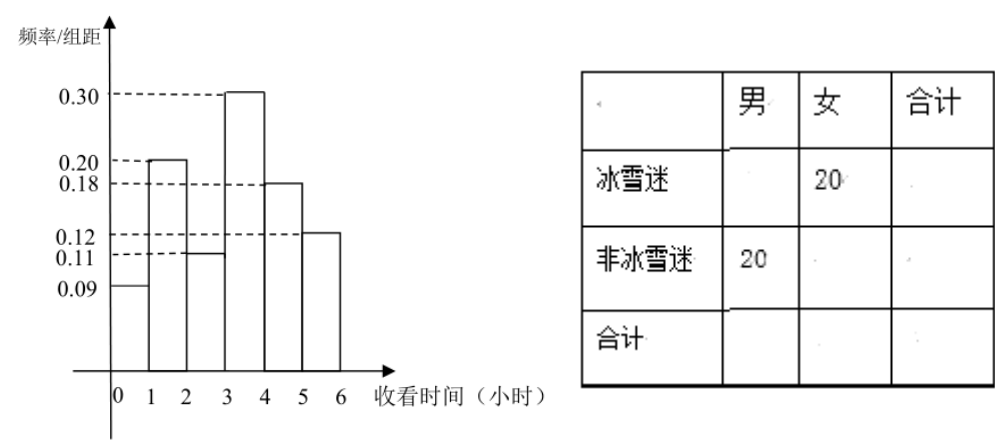
16. 设 x_1, x_2, x_3, x_4 为互不相等的正实数, 随机变量 X 和 Y 的分布列如下表, 若记 DX, DY 分别为 X, Y 的方差, 则 DX _____ DY . (填 $>, <, =$)

X	x_1	x_2	x_3	x_4
Y	$\frac{x_1 + x_2}{2}$	$\frac{x_2 + x_3}{2}$	$\frac{x_3 + x_4}{2}$	$\frac{x_4 + x_1}{2}$
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分)

万众瞩目的第 14 届全国冬季运动运会（简称“十四冬”）于 2020 年 2 月 16 日在呼伦贝尔市盛大开幕，期间正值我市学校放寒假，寒假结束后，某校工会对全校 100 名教职工在“十四冬”期间每天收看比赛转播的时间作了一次调查，得到如图频数分布直方图：



- （1）若将每天收看比赛转播时间不低于 3 小时的教职工定义为“冰雪迷”，否则定义为“非冰雪迷”，请根据频率分布直方图补全 2×2 列联表；并判断能否有 90% 的把握认为该校教职工是否为“冰雪迷”与“性别”有关；
- （2）在全校“冰雪迷”中按性别分层抽样抽取 6 名，再从这 6 名“冰雪迷”中选取 2 名作冰雪运动知识讲座.记其中女职工的人数为 ξ ，求的 ξ 分布列与数学期望.

附表及公式：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \quad n = a+b+c+d$$

18.（12 分）在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $c(\sin 2A - \cos B \sin C) = \frac{1}{2}b \sin 2C$.

- （1）求角 A 的大小；
- （2）若 $C = \frac{\pi}{4}, c = 2$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.

19.（12 分）已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} = \frac{2\sqrt{3}\sin C}{3\sin A}$.

- （1）求 $\angle C$ 的值；
- （2）若 $\cos A + \sqrt{3}\sin A = 2$ ，求 $\angle A + \angle B$ 的取值范围.

20.（12 分）已知两数 $f(x) = \ln x + kx$.

(1) 当 $k = -1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极值点;

(2) 当 $k=0$ 时, 若 $f(x) + \frac{b}{x} - a \geq 0 (a, b \in R)$ 恒成立, 求 $e^{a-1} - b + 1$ 的最大值.

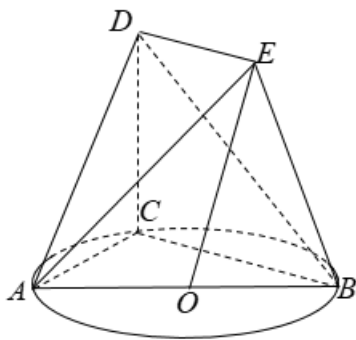
21. (12 分) 已知椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 上、下顶点分别是 A 、 B , 上、下焦点分别是 F_1 、 F_2 , 焦距为 2,

点 $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ 在椭圆上.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 若 Q 为椭圆上异于 A 、 B 的动点，过 A 作与 x 轴平行的直线 l ，直线 QB 与 l 交于点 S ，直线 F_2S 与直线 AQ 交于点 P ，判断 $\angle SPQ$ 是否为定值，说明理由.

22. (10 分) 如图, 点 C 是以 AB 为直径的圆 O 上异于 A 、 B 的一点, 直角梯形 $BCDE$ 所在平面与圆 O 所在平面垂直, 且 $DE \parallel BC, DC \perp BC, DE = \frac{1}{2}BC = 2, AC = CD = 3$.



(1) 证明: $EO \parallel$ 平面 ACD ;

(2) 求点 E 到平面 ABD 的距离.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

把 $z_1 = 1 + ai$ ($a \in R$), $z_2 = 1 + 2i$ 代入 $\frac{z_1}{z_2}$, 利用复数代数形式的除法运算化简, 由实部为 0 且虚部不为 0 求解即可.

【详解】

$$\because z_1 = 1 + ai \ (a \in R), \ z_2 = 1 + 2i,$$

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + ai}{1 + 2i} = \frac{(1 + ai)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{1 + 2a}{5} + \frac{a - 2}{5}i,$$

$$\because \frac{z_1}{z_2} \text{ 为纯虚数,}$$

$$\therefore \begin{cases} 1 + 2a = 0 \\ a - 2 \neq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } a = -\frac{1}{2}.$$

故选 C.

【点睛】

本题考查复数代数形式的除法运算, 考查复数的基本概念, 是基础题.

2、A

【解析】

试题分析: 设公差为 d , $a_2 + a_3 + a_4 = 3a_3 = 15 \Rightarrow a_3 = a_1 + 2d = 5 \Rightarrow a_1 = 5 - 2d \Rightarrow (a_1 + 2)(a_1 + 5d + 16) = (7 - 2d)(3d + 21) = 81 \Rightarrow 2d^2 + 7d - 22 = 0 \Rightarrow d = 2$ 或 $d = -\frac{11}{2}$ (舍) $\Rightarrow a_1 = 1 \Rightarrow a_{10} = 1 + 9 \times 2 = 19$, 故选 A.

考点: 等差数列及其性质.

3、B

【解析】

由 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, 可得 $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CA})$, 再将 $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$ 代入即可.

【详解】

因为 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, 所以 $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$, 故 $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} - \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}) = \frac{3}{8}\overrightarrow{BA} - \frac{7}{8}\overrightarrow{BC}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查平面向量的线性运算性质以及平面向量基本定理的应用, 是一道基础题.

4、 B

【解析】

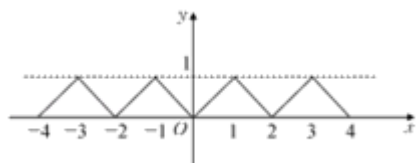
根据函数的周期性以及 $x \in [-3, -2]$ 的解析式，可作出函数 $f(x)$ 在定义域上的图象，由此结合选项判断即可.

【详解】

由 $f(x+2) = f(x)$ ，得 $f(x)$ 是周期函数且周期为 2，

先作出 $f(x)$ 在 $x \in [-3, -2]$ 时的图象，然后根据周期为 2 依次平移，

并结合 $f(x)$ 是偶函数作出 $f(x)$ 在 R 上的图象如下，



选项 A, $0 < \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} < 1$,

所以 $f\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) < f\left(\cos \frac{\pi}{6}\right)$ ，选项 A 错误；

选项 B, 因为 $\frac{3\pi}{4} < 3 < \pi$ ，所以 $0 < \sin 3 < \frac{\sqrt{2}}{2} < -\cos 3 < 1$ ，

所以 $f(\sin 3) < f(-\cos 3)$ ，即 $f(\sin 3) < f(\cos 3)$ ，选项 B 正确；

选项 C, $\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $1 > -\sin \frac{4\pi}{3} > -\cos \frac{4\pi}{3} > 0$ ，

所以 $f\left(-\sin \frac{4\pi}{3}\right) > f\left(-\cos \frac{4\pi}{3}\right)$ ，即 $f\left(\sin \frac{4\pi}{3}\right) > f\left(\cos \frac{4\pi}{3}\right)$ ，

选项 C 错误；

选项 D, $f(2020) = f(0) < f(1) = f(2019)$ ，选项 D 错误.

故选：B.

【点睛】

本题考查函数性质的综合运用，考查函数值的大小比较，考查数形结合思想，属于中档题.

5、D

【解析】

如图所示：在边长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，四棱锥 $C_1 - ABCD$ 满足条件，故 $S = \{2, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}\}$ ，得到答案.

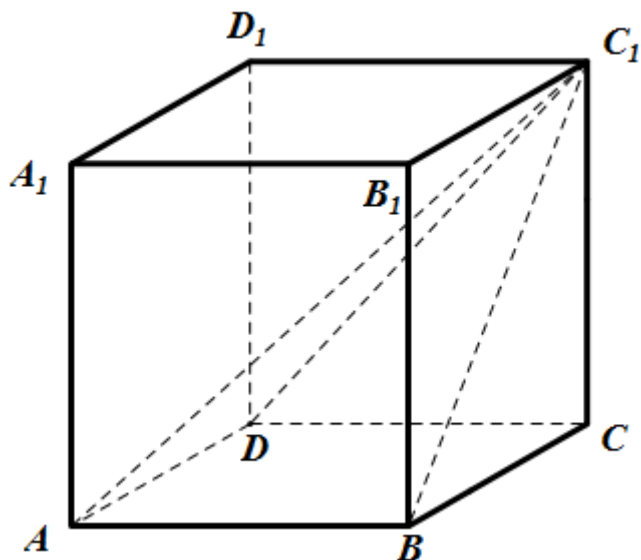
【详解】

如图所示：在边长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，四棱锥 C_1-ABCD 满足条件.

故 $AB=BC=CD=AD=CC_1=2$, $BC_1=DC_1=2\sqrt{2}$, $AC_1=2\sqrt{3}$.

故 $S=\{2, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}\}$, 故 $2\sqrt{2} \in S$, $2\sqrt{3} \in S$.

故选: D.



【点睛】

本题考查了三视图, 元素和集合的关系, 意在考查学生的空间想象能力和计算能力.

6、B

【解析】

求得基本事件的总数为 $n = \frac{C_4^2 C_2^2}{A_2^2} \times A_2^2 = 6$, 其中乙丙两人恰好参加同一项活动的基本事件个数为 $m = C_2^2 C_2^2 A_2^2 = 2$, 利

用古典概型及其概率的计算公式, 即可求解.

【详解】

由题意, 现有甲乙丙丁 4 名学生平均分成两个志愿者小组到校外参加两项活动,

基本事件的总数为 $n = \frac{C_4^2 C_2^2}{A_2^2} \times A_2^2 = 6$,

其中乙丙两人恰好参加同一项活动的基本事件个数为 $m = C_2^2 C_2^2 A_2^2 = 2$,

所以乙丙两人恰好参加同一项活动的概率为 $p = \frac{m}{n} = \frac{1}{3}$, 故选 B.

【点睛】

本题主要考查了排列组合的应用, 以及古典概型及其概率的计算问题, 其中解答中合理应用排列、组合的知识求得基本事件的总数和所求事件所包含的基本事件的个数, 利用古典概型及其概率的计算公式求解是解答的关键, 着重考查了运算与求解能力, 属于基础题.

7、A

【解析】

观察可知，这个几何体由两部分构成：一个半圆柱体，底面圆的半径为 1，高为 2；一个半球体，半径为 1，按公式计算可得体积。

【详解】

设半圆柱体体积为 V_1 ，半球体体积为 V_2 ，由题得几何体体积为

$$V = V_1 + V_2 = \pi \times 1^2 \times 2 \times \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \times \pi \times 1^3 \times \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{3}, \text{ 故选 A.}$$

【点睛】

本题通过三视图考察空间识图的能力，属于基础题。

8、A

【解析】

先求出 $\sin A$ ，由正弦定理求得 c ，然后由面积公式计算。

【详解】

$$\text{由题意 } \sin C = \sqrt{1 - \left(-\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

$$\sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2\sqrt{7}}{7}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{\sqrt{7}}{14}.$$

$$\text{由 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ 得 } b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{1 \times \sin 30^\circ}{\frac{\sqrt{7}}{14}} = \sqrt{7},$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{7} \times \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查求三角形面积，考查正弦定理，同角间的三角函数关系，两角和的正弦公式与诱导公式，解题时要根据已知求值要求确定解题思路，确定选用公式顺序，以便正确快速求解。

9、A

【解析】

由给定的三视图可知，该几何体表示一个底面为一个直角三角形，

且两直角边分别为 1 和 2，所以底面面积为 $S = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/838120123005006076>