

目录

第一章 一元一次不等式和一元一次不等式组

- 1 不等关系
- 2 不等式的基本性质
- 3 不等式的解集
- 4 一元一次不等式
- 5 一元一次不等式与一次函数
- 6 一元一次不等式组

第二章 分解因式

- 1 分解因式
- 2 提公因式法
- 3 运用公式法

第三章 分式

- 1 分式
- 2 分式的乘除法
- 3 分式的加减法
- 4 分式方程

第四章 相似图形

- 1 线段的比
- 2 黄金分割
- 3 形状相同的图形
- 4 相似多边形
- 5 相似三角形
- 6 探索三角形相似的条件
- 7 测量旗杆的高度
- 8 相似多边形的性质
- 9 图形的放大与缩小

第五章 数据的收集与处理

- 1 每周干家务活的时间
- 2 数据的收集
- 3 频数与频率
- 4 数据的波动

第六章 证明（一）

- 1 你能肯定吗
- 2 定义与命题
- 3 为什么他们平行
- 4 如果两条直线平行

- 5 三角形内角和定理的证明
- 6 关注三角形的外角

第一章 一元一次不等式和一元一次不等式组

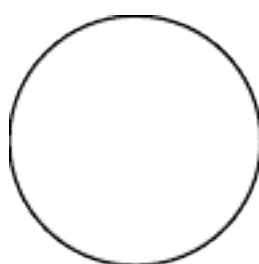
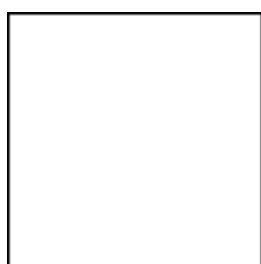
1.1 不等关系

一、教学目标：理解实数范围内代数式的不等关系，并会进行表示。

能够根据具体的事例列出不等关系式。

二、教学过程：

如图：用两根长度均为 L cm 的绳子，各位成正方形和圆。



- (1) 如果要使正方形的面积不大于 25 cm^2 ，那么绳长 L 应该满足怎样的关系式？
- (2) 如果要使圆的面积大于 100 cm^2 ，那么绳长 L 应满足怎样的关系式？
- (3) 当 $L=8$ 时，正方形和圆的面积哪个大？ $L=12$ 呢？
- (4) 由 (3) 你能发现什么？改变 L 的取值再试一试。

在上面的问题中，所谓成的正方形的面积可以表示为 $(L/4)^2$ ，圆的面积可以表示为 $\pi (L/2\pi)^2$ 。

- (1) 要是正方形的面积不大于 25 cm^2 ，就是

$$(L/4)^2 \leq 25,$$

$$\text{即 } L^2/16 \leq 25.$$

- (2) 要使圆的面积大于 100 cm^2 ，就是

$$\pi (L/2\pi)^2 > 100$$

$$\text{即 } L^2/4\pi > 100.$$

- (3) 当 $L=8$ 时，正方形的面积为 $8^2/16=6$ ，圆的面积为

$$8^2/4\pi \approx 5.1,$$

$$4 < 5.1$$

此时圆的面积大。

当 $L=12$ 时，正方形的面积为 $12^2/16=9$ ，圆的面积为

$$12^2/4\pi \approx 11.5,$$

$$9 < 11.5,$$

此时还是圆的面积大。

教师得出结论

- (4) 由 (3) 可以发现，无论绳长 L 取何值，圆的面积总大于正方形的面积，即

$$L^2/4\pi > L^2/16.$$

三、随堂练习

1、试举几个用不等式表示的例子。

2、用适当的符号表示下列关系

- (1) a 是非负数；

(2) 直角三角形斜边 c 比她的两直角边 a , b 都长;

(3) x 于 17 的和比它的 5 倍小。

1.2 不等式的基本性质

一、教学目标

(1) 探索并掌握不等式的基本性质;

(2) 理解不等式与等式性质的联系与区别.

二、教学内容

我们学习了等式, 并掌握了等式的基本性质, 大家还记得等式的基本性质吗?

等式的基本性质 1: 在等式的两边都加上(或减去)同一个数或整式, 所得的结果仍是等式.

基本性质 2: 在等式的两边都乘以或除以同一个数(除数不为 0), 所得的结果仍是等式.

1. 不等式基本性质的推导

例: $\because 3 < 5$

$$\therefore 3+2 < 5+2$$

$$3-2 < 5-2$$

$$3+a < 5+a$$

$$3-a < 5-a$$

所以, 在不等式的两边都加上(或减去)同一个整式, 不等号的方向不变.

例: $3 < 4$

$$3^3 < 4^3$$

$$3^3 \cdot \frac{1}{3} < 4^3 \cdot \frac{1}{3}$$

$$3^3 \cdot (-3) > 4^3 \cdot (-3)$$

$$3^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) > 4^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$3^3 \cdot (-5) > 4^3 \cdot (-5)$$

由此看来, 在不等式的两边同乘以一个正数时, 不等号的方向不变; 在不等式的两边同乘以一个负数时, 不等号的方向改变.

三、课堂练习

1. 将下列不等式化成“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”的形式.

$$(1) x-1 > 2 \quad (2) -x < \frac{5}{6}$$

解 (1) 根据不等式的基本性质 1, 两边都加上 1, 得 $x > 3$

(2) 根据不等式的基本性质 3, 两边都乘以 -1 , 得 $x > -\frac{5}{6}$

2. 已知 $x > y$, 下列不等式一定成立吗?

(1) $x-6 < y-6$;

(2) $3x < 3y$;

(3) $-2x < -2y$.

解 (1) $\because x > y, \therefore x-6 > y-6$.

$\therefore$ 不等式不成立;

(2) $\because x > y, \therefore 3x > 3y$

$\therefore$ 不等式不成立;

(3) $\because x > y, \therefore -2x < -2y$

$\therefore$ 不等式一定成立.

4.根据不等式的基本性质，把下列不等式化成“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”的形式：

(1) $x - 2 < 3$; (2) $6x < 5x - 1$;

(3) $\frac{1}{2}x > 5$; (4) $-4x > 3$.

5.设 $a > b$.用“ $<$ ”或“ $>$ ”号填空.

(1) $a - 3$ $b - 3$; (2) $\frac{a}{2}$ $\frac{b}{2}$;

(3) $-4a$ $-4b$; (4) $5a$ $5b$;

(5) 当 $a > 0, b$ 0 时, $ab > 0$;

(6) 当 $a > 0, b$ 0 时, $ab < 0$;

(7) 当 $a < 0, b$ 0 时, $ab > 0$;

(8) 当 $a < 0, b$ 0 时, $ab < 0$.

参考答案：

4. (1) $x < 5$; (2) $x < -1$; (3) $x > 10$; (4) $x < -\frac{3}{4}$.

5 (1) $>$ (2) $>$ (3) $<$ (4) $>$ (5) $>$ (6) $<$ (7) $<$ (8) $>$.

1.3 不等式的解集

一、教学目标

- 1.能够根据具体问题中的大小关系了解不等式的意义.
- 2.理解不等式的解、不等式的解集、解不等式这些概念的含义.
- 3.会在数轴上表示不等式的解集.

二、教学过程

1.现实生活中的不等式.

燃放某种礼花弹时，为了确保安全，人在点燃导火线后要在燃放前转移到10 m 以外的安全区域.已知导火线的燃烧速度为以 0.02 m/s，人离开的速度为 4 m/s，那么导火线的长度应为多少厘米？

分析：人转移到安全区域需要的时间最少为 $\frac{10}{4}$ 秒，导火线燃烧的时间为 $\frac{x}{0.02 \times 100}$ 秒，

要使人转移到安全地带，必须有： $\frac{x}{0.02 \times 100} > \frac{10}{4}$.

解：设导火线的长度应为 x cm，根据题意，得

$$\frac{x}{0.02 \times 100} > \frac{10}{4}$$

$$\therefore x > 5.$$

2.想一想

- (1) $x=5,6,8$ 能使不等式 $x > 5$ 成立吗？
 - (2) 你还能找出一些使不等式 $x > 5$ 成立的 x 的值吗？
- 答：(1) $x=5$ 不能使 $x > 5$ 成立， $x=6,8$ 能使不等式 $x > 5$ 成立.
(2) $x=9,10,11,$ 等比 5 大的数都能使不等式 $x > 5$ 成立.

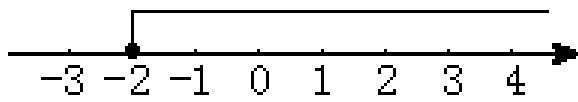
3.例题讲解

根据不等式的基本性质求不等式的解集，并把解集在数轴上表示出来.

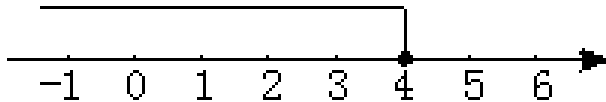
(1) $x - 2 \geq -4$; (2) $2x \leq 8$

(3) $-2x - 2 > -10$

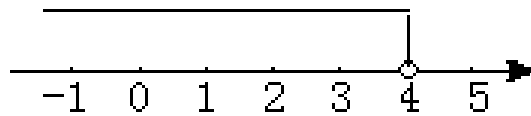
解 (1) 根据不等式的基本性质 1, 两边都加上 2, 得 $x \geq -2$
 在数轴上表示为:



(2) 根据不等式的基本性质 2, 两边都除以 2, 得 $x \leq 4$
 在数轴上表示为:



(3) 根据不等式的基本性质 1, 两边都加上 2, 得 $-2x > -8$
 根据不等式的基本性质 3, 两边都除以 -2 , 得 $x < 4$
 在数轴上表示为:



三、课堂练习

1. 判断正误:

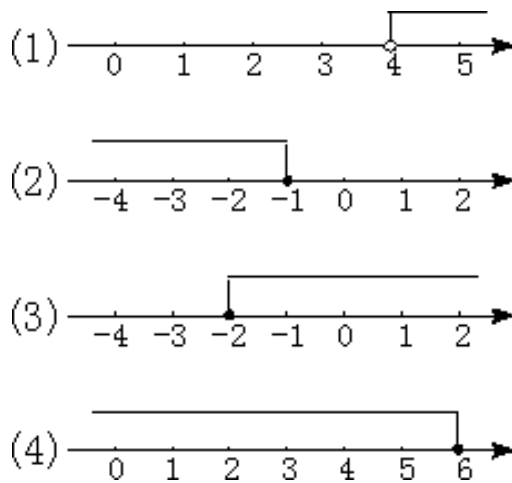
- (1) 不等式 $x - 1 > 0$ 有无数个解;
- (2) 不等式 $2x - 3 \leq 0$ 的解集为 $x \geq \frac{2}{3}$.

2. 将下列不等式的解集分别表示在数轴上:

- (1) $x > 4$; (2) $x \leq -1$;
- (3) $x \geq -2$; (4) $x \leq 6$.

1. 解 (1) $\because x - 1 > 0, \therefore x > 1$
 $\therefore x - 1 > 0$ 有无数个解. $\therefore$ 正确.
 (2) $\because 2x - 3 \leq 0, \therefore 2x \leq 3,$
 $\therefore x \leq \frac{3}{2}, \therefore$ 结论错误.

2. 解:



1.4 一元一次不等式

一、教学目标

- 1. 知道什么是一元一次不等式?
- 2. 会解一元一次不等式.

二、一元一次不等式的定义.

下列不等式是一元一次不等式吗?

- (1) $2x - 2.5 \geq 15$; (2) $5 + 3x > 240$;

(3) $x < -4$; (4) $\frac{1}{x} > 1$.

答 (1)、(2)、(3) 中的不等式是一元一次不等式, (4) 不是.

(4) 为什么不是呢?

因为 x 在分母中, $\frac{1}{x}$ 不是整式.

不等式的两边都是整式, 只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是1, 这样的不等式, 叫做一元一次不等式 (linear inequality with one unknown).

2. 一元一次不等式的解法.

例 1 解不等式 $3 - x < 2x + 6$, 并把它解集表示在数轴上.

[分析] 要化成 “ $x > a$ ” 或 “ $x < a$ ” 的形式, 首先要把不等式两边的 x 或常数项转移到同一侧, 变成 “ $ax > b$ ” 或 “ $ax < b$ ” 的形式, 再根据不等式的基本性质求得.

解: 两边都加上 x , 得

$$3 - x + x < 2x + 6 + x$$

合并同类项, 得

$$3 < 3x + 6$$

两边都加上 -6 , 得

$$3 - 6 < 3x + 6 - 6$$

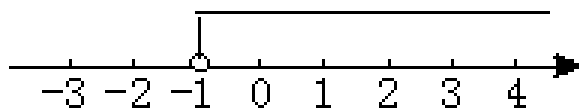
合并同类项, 得

$$-3 < 3x$$

两边都除以 3 , 得 $-1 < x$

即 $x > -1$.

这个不等式的解集在数轴上表示如下:



下面大家仿照上面的步骤练习一下解一元一次不等式.

[例 2] 解不等式 $\frac{x-2}{2} \geq \frac{7-x}{3}$, 并把它解集在数轴上表示出来.

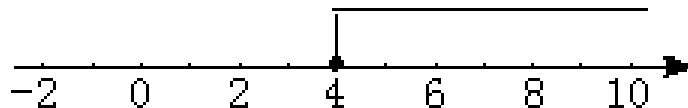
[生] 解: 去分母, 得 $3(x-2) \geq 2(7-x)$

去括号, 得 $3x - 6 \geq 14 - 2x$

移项, 合并同类项, 得 $5x \geq 20$

两边都除以 5 , 得 $x \geq 4$.

这个不等式的解集在数轴上表示如下:



三、课堂练习

解下列不等式, 并把它们的解集分别表示在数轴上:

(1) $5x > -10$; (2) $-3x + 12 \leq 0$;

(3) $\frac{x-1}{2} < \frac{4x-5}{3}$;

(4) $\frac{x+7}{2} - 1 < \frac{3x+2}{2}$.

解 (1) 两边同时除以 5, 得 $x > -2$.

这个不等式的解集在数轴上表示如下:



(2) 移项, 得 $-3x \leq -12$,

两边都除以 -3 , 得 $x \geq 4$,

这个不等式的解集在数轴上表示为:



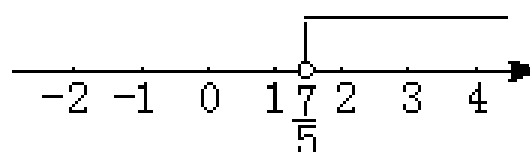
(3) 去分母, 得 $3(x-1) < 2(4x-5)$,

去括号, 得 $3x-3 < 8x-10$,

移项、合并同类项, 得 $5x > 7$,

两边都除以 5, 得 $x > \frac{7}{5}$,

不等式的解集在数轴上表示为:

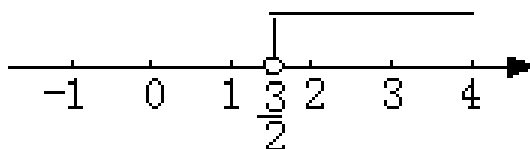


(4) 去分母, 得 $x+7-2 < 3x+2$,

移项、合并同类项, 得 $2x > 3$,

两边都除以 2, 得 $x > \frac{3}{2}$,

不等式的解集在数轴上表示如下:



1.5 一元一次不等式与一次函数

一、教学目标

1. 一元一次不等式与一次函数的关系.

2. 会根据题意列出函数关系式, 画出函数图象, 并利用不等关系进行比较.

二、教学过程

1. 一元一次不等式与一次函数之间的关系.

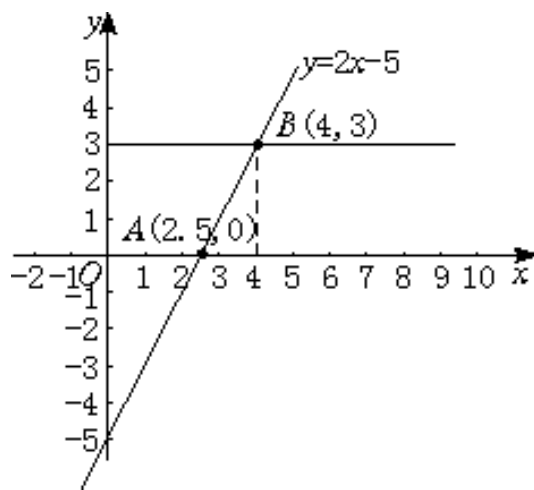
作出函数 $y=2x-5$ 的图象, 观察图象回答下列问题.

(1) x 取哪些值时, $2x-5=0$?

(2) x 取哪些值时, $2x-5>0$?

(3) x 取哪些值时, $2x-5<0$?

(4) x 取哪些值时, $2x-5>3$?



(1) 当 $y=0$ 时, $2x-5=0$,

$$\therefore x = \frac{5}{2},$$

$\therefore$ 当 $x = \frac{5}{2}$ 时, $2x-5=0$.

(2) 要找 $2x-5>0$ 的 x 的值, 也就是函数值 y 大于 0 时所对应的 x 的值, 从图象上可知, $y>0$ 时, 图象在 x 轴上方, 图象上任一点所对应的 x 值都满足条件, 当 $y=0$ 时, 则有 $2x-5=0$, 解得 $x = \frac{5}{2}$. 当 $x > \frac{5}{2}$ 时, 由 $y=2x-5$ 可知 $y>0$. 因此当 $x > \frac{5}{2}$ 时, $2x-5>0$;

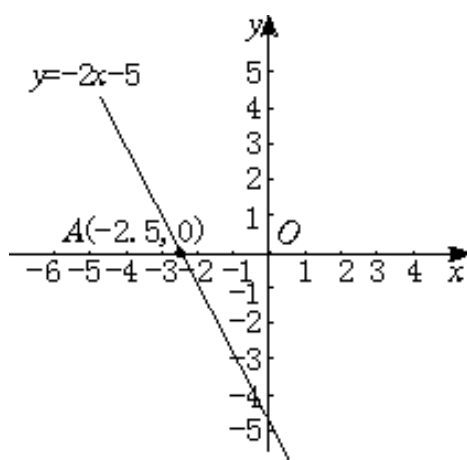
(3) 同理可知, 当 $x < \frac{5}{2}$ 时, 有 $2x-5<0$;

(4) 要使 $2x-5>3$, 也就是 $y=2x-5$ 中的 y 大于 3, 那么过纵坐标为 3 的点作一条直线平行于 x 轴, 这条直线与 $y=2x-5$ 相交于一点 $B(4, 3)$, 则当 $x>4$ 时, 有 $2x-5>3$.

3. 试一试

如果 $y=-2x-5$, 那么当 x 取何值时, $y>0$?

首先要画出函数 $y=-2x-5$ 的图象, 如图

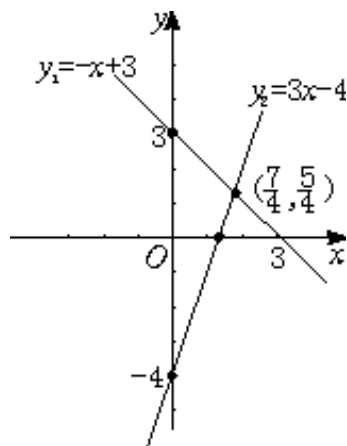


从图象上可知, 图象在 x 轴上方时, 图象上每一点所对应的 y 的值都大于 0, 而每一个 y 的值所对应的 x 的值都在 A 点的左侧, 即为小于 -2.5 的数, 由 $-2x-5=0$, 得 $x=-2.5$, 所以当 x 取小于 -2.5 的值时, $y>0$.

三、课堂练习

1. 已知 $y_1 = -x+3$, $y_2 = 3x-4$, 当 x 取何值时, $y_1 > y_2$? 你是怎样做的? 与同伴交流.

解: 如图 1-24 所示:

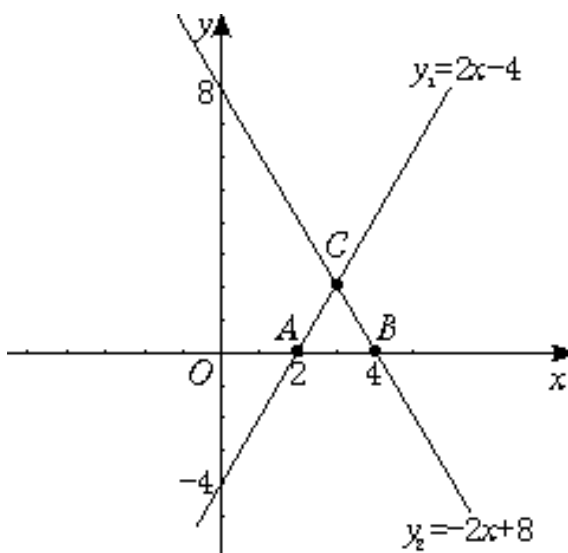


当 x 取小于 $\frac{7}{4}$ 的值时, 有 $y_1 > y_2$.

1. 作出函数 $y_1 = 2x - 4$ 与 $y_2 = -2x + 8$ 的图象, 并观察图象回答下列问题:

- (1) x 取何值时, $2x - 4 > 0$?
- (2) x 取何值时, $-2x + 8 > 0$?
- (3) x 取何值时, $2x - 4 > 0$ 与 $-2x + 8 > 0$ 同时成立?
- (4) 你能求出函数 $y_1 = 2x - 4$, $y_2 = -2x + 8$ 的图象与 x 轴所围成的三角形的面积吗? 并写出过程.

解: 图象如下:



分析: 要使 $2x - 4 > 0$ 成立, 就是 $y_1 = 2x - 4$ 的图象在 x 轴上方的所有点的横坐标的集合, 同理使 $-2x + 8 > 0$ 成立的 x , 即为函数 $y_2 = -2x + 8$ 的图象在 x 轴上方的所有点的横坐标的集合, 要使它们同时成立, 即求这两个集合中公共的 x , 根据函数图象与 x 轴交点的坐标可求出三角形的底边长, 由两函数的交点坐标可求出底边上的高, 从而求出三角形的面积.

- [解] (1) 当 $x > 2$ 时, $2x - 4 > 0$;
- (2) 当 $x < 4$ 时, $-2x + 8 > 0$;
- (3) 当 $2 < x < 4$ 时, $2x - 4 > 0$ 与 $-2x + 8 > 0$ 同时成立.
- (4) 由 $2x - 4 = 0$, 得 $x = 2$;

由 $-2x + 8 = 0$, 得 $x = 4$

所以 $AB = 4 - 2 = 2$

$$\text{由 } \begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = -2x + 8 \end{cases}$$

得交点 $C(3, 2)$

所以三角形 ABC 中 AB 边上的高为 2.

$$\text{所以 } S = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2.$$

2.分别解不等式

$$5x-1>3(x+1),$$

$$\frac{1}{2}x-1<7-\frac{3}{2}x$$

所得的两个解集的公共部分是什么?

解:解不等式 $5x-1>3(x+1)$,得 $x>2$

解不等式 $\frac{1}{2}x-1<7-\frac{3}{2}x$,得 $x<4$,

所以两个解集的公共部分是 $2<x<4$.

3.某商场计划投入一笔资金采购一批紧俏商品,经过市场调查发现:如果月初出售,可获利 15%,并可用本和利再投资其他商品,到月末又可获利 10%;如果月末出售可获利 30%,但要付出仓储费用 700 元.请问根据商场的资金状况,如何购销获利较多?

解:设商场计划投入资金为 x 元,在月初出售,到月末共获利 y_1 元;在月末一次性出售获利 y_2 元,

根据题意,得

$$y_1=15\%x+(x+15\%x)\cdot 10\%=0.265x,$$

$$y_2=30\%x-700=0.3x-700.$$

(1) 当 $y_1>y_2$,即 $0.265x>0.3x-700$ 时, $x<20000$;

(2) 当 $y_1=y_2$,即 $0.265x=0.3x-700$ 时, $x=20000$;

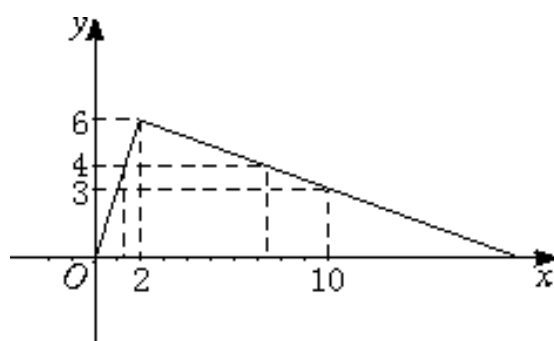
(3) 当 $y_1<y_2$,即 $0.265x<0.3x-700$ 时, $x>20000$.

所以,当投入资金不超过 20000 元时,第一种销售方式获利较多;当投入资金超过 20000 元时,第二种销售方式获利较多.

4.某医院研究发现了一种新药,在试验药效时发现,如果成人按规定剂量服用,那么服药后 2 小时时血液中含药量最高,达每毫升 6 微克 (1 微克= 10^{-3} 毫克),接着逐步衰减,10 小时时血液中含药量为每毫升 3 毫克,每毫升血液中含药量 y (微克),随着时间 x (小时) 的变化如图所示 (成人按规定服药后).

(1) 分别求出 $x\leq 2$ 和 $x\geq 2$ 时, y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 根据图象观察,如果每毫升血液中含药量为 4 微克或 4 微克以上,在治疗疾病时是有效的,那么这个有效时间是多少?



解 (1) 当 $x\leq 2$ 时, 图象过 $(0, 0)$, $(2, 6)$ 点, 设 $y_1=k_1x$,
把 $(2, 6)$ 代入得, $k_1=3$

$$\therefore y_1=3x.$$

当 $x\geq 2$ 时, 图象过 $(2, 6)$, $(10, 3)$ 点.

设 $y_2=k_2x+b$, 则有

$$\begin{cases} 2k_2+b=6 \\ 10k_2+b=3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{得 } k_2 &= -\frac{3}{8}, b = \frac{27}{4} \\ \therefore y_2 &= -\frac{3}{8}x + \frac{27}{4} \end{aligned}$$

(2) 过 y 轴上的 4 点作平行于 x 轴的一条直线, 于 y_1, y_2 的图象交于两点, 过这两点向 x 轴作垂线, 对应 x 轴上的 $\frac{4}{3}$ 和 $\frac{22}{3}$, 即在 $\frac{22}{3} - \frac{4}{3} = 6$ 小时是有效的.

1.6 一元一次不等式组

一、教学目标

总结解一元一次不等式组的步骤及情形.

二、教学过程

某校今年冬季烧煤取暖时间为 4 个月。如果每月比计划多烧 5 吨煤, 那么取暖用煤总量将超过 100 吨; 如果每月比计划少烧 5 吨煤, 那么取暖用煤总量不足 68 吨。该校计划每月烧煤多少吨?

解:

设该校计划每月烧煤 x 吨, 根据题意, 得

$$4(x+5) > 100, \quad (1)$$

$$\text{且 } 4(x-5) < 68. \quad (2)$$

未知数 x 同时满足 (1) (2) 两个条件, 把 (1) (2) 两个不等式合在一起, 就组成一个一元一次不等式组, 记作

$$\begin{cases} 4(x+5) > 100, \\ 4(x-5) < 68. \end{cases}$$

一般地, 关于同一未知数的几个一元一次不等式合在一起, 就组成了一个一元一次不等式组。

解下列不等式组

$$(1) \begin{cases} \frac{x+1}{2} > 1 \\ 7x-8 < 9x \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x-2 < x+1 \\ x+5 > 4x+1 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 5x-2 > 3(x+1) \\ \frac{1}{2}x-1 \leq 7-\frac{3}{2}x \end{cases}$$

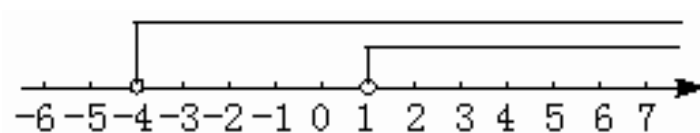
$$(4) \begin{cases} 3x-1 > 11 \\ 2x < 6 \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} \frac{x+1}{2} > 1 & (1) \\ 7x-8 < 9x & (2) \end{cases}$$

解: 解不等式 (1), 得 $x > 1$

解不等式 (2), 得 $x > -4$.

在同一条数轴上表示不等式 (1), (2) 的解集如下图



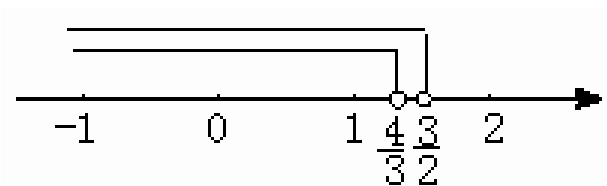
所以, 原不等式组的解集是 $x > 1$

$$(2) \begin{cases} 3x - 2 < x + 1 & (1) \\ x + 5 > 4x + 1 & (2) \end{cases}$$

解: 解不等式 (1), 得 $x < \frac{3}{2}$

解不等式 (2), 得 $x < \frac{4}{3}$

在同一条数轴上表示不等式 (1), (2) 的解集. 如下图



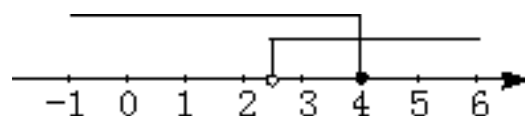
所以, 原不等式组的解集是 $x < \frac{4}{3}$

$$(3) \begin{cases} 5x - 2 > 3(x + 1) & (1) \\ \frac{1}{2}x - 1 \leq 7 - \frac{3}{2}x & (2) \end{cases}$$

解: 解不等式 (1), 得 $x > \frac{5}{2}$

解不等式 (2), 得 $x \leq 4$.

在同一条数轴上表示不等式 (1), (2) 的解集, 如下图



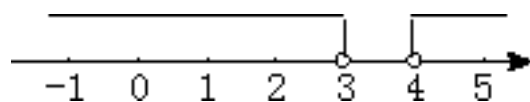
所以, 原不等式组的解集为 $\frac{5}{2} < x \leq 4$.

$$(4) \begin{cases} 3x - 1 > 11 & (1) \\ 2x < 6 & (2) \end{cases}$$

解: 解不等式 (1), 得 $x > 4$.

解不等式 (2), 得 $x < 3$.

在同一条数轴上表示不等式 (1), (2) 的解集如下图



所以, 原不等式组的解集为无解.

我们从每个不等式的解集, 到这个不等式组的解集, 认真观察, 互相交流, 找出规律.

$$(1) \text{ 由 } \begin{cases} x > 1 \\ x > -4 \end{cases} \text{ 得 } x > 1;$$

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x < \frac{4}{3} \end{cases} \text{ 得 } x < \frac{4}{3};$$

$$(3) \text{ 由 } \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x \leq 4 \end{cases} \text{ 得 } \frac{5}{2} < x \leq 4;$$

$$(4) \text{ 由 } \begin{cases} x > 4 \\ x < 3 \end{cases} \text{ 得, 无解.}$$

两个一元一次不等式所组成的不等式组的解集有以下四种情形.
 设 $a < b$, 那么

- (1) 不等式组 $\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases}$ 的解集是 $x > b$;
- (2) 不等式组 $\begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases}$ 的解集是 $x < a$;
- (3) 不等式组 $\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$ 的解集是 $a < x < b$;
- (4) 不等式组 $\begin{cases} x < a \\ x > b \end{cases}$ 的解集是无解.

用语言简单表述为:

同大取大; 同小取小;
 大于小数小于大数取中间;
 大于大数小于小数无解.

三、课堂练习

解下列不等式组

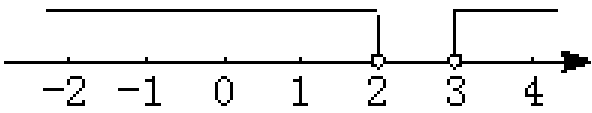
$$(1) \begin{cases} x + 3 < 5 \\ 3x - 1 > 8 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 < 2(x - 1) \\ \frac{2}{x} > \frac{x + 2}{5} \end{cases}$$

$$[\text{解}] (1) \begin{cases} x + 3 < 5 & (1) \\ 3x - 1 > 8 & (2) \end{cases}$$

解不等式 (1), 得 $x < 2$

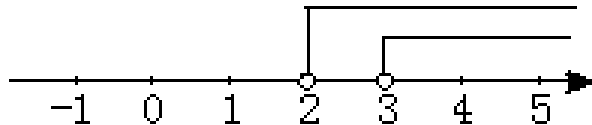
解不等式 (2)，得 $x > 3$
 在同一数轴上表示不等式 (1)、(2) 的解集，



所以，原不等式组无解.

$$(2) \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 < 2(x - 1) & (1) \\ \frac{x}{3} > \frac{x + 2}{5} & (2) \end{cases}$$

解：解不等式 (1)，得 $x > 2$
 解不等式 (2)，得 $x > 3$
 在同一数轴上表示不等式 (1)，(2) 的解集，如下图



所以，原不等式组的解集为 $x > 3$.

第二章 分解因式

2.1 分解因式

一、教学目标

让学生了解多项式公因式的意义，初步会用提公因式法分解因式.

二、教学过程

一块场地由三个矩形组成，这些矩形的长分别为 $\frac{3}{4}$ ， $\frac{3}{2}$ ， $\frac{7}{4}$ ，宽都是 $\frac{1}{2}$ ，求这块场地的面积.

$$\text{解法一：} S = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{4} = \frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} = 2$$

$$\text{解法二：} S = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} \right) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

1. 公因式与提公因式法分解因式的概念.

把多项式 $ma+mb+mc$ 写成 m 与 $(a+b+c)$ 的乘积的形式，相当于把公因式 m 从各项中提出来，作为多项式 $ma+mb+mc$ 的一个因式，把 m 从多项式 $ma+mb+mc$ 各项中提出后形成的多项式 $(a+b+c)$ ，作为多项式 $ma+mb+mc$ 的另一个因式，这种分解因式的方法叫做提公因式法.

2. 例题讲解

[例 1] 将下列各式分解因式：

- (1) $3x+6$;
- (2) $7x^2-21x$;
- (3) $8a^3b^2-12ab^3c+abc$
- (4) $-24x^3-12x^2+28x$.

分析：首先要找出各项的公因式，然后再提取出来.

解 (1) $3x+6=3x+3 \times 2=3(x+2)$;

$$(2) 7x^2 - 21x = 7x^2 \cdot x - 7x^2 \cdot 3 = 7x(x-3);$$

$$(3) 8a^3b^2 - 12ab^3c + abc \\ = 8a^2b^2 \cdot ab - 12b^2c^2 \cdot ab + ab^2 \cdot c \\ = ab(8a^2b - 12b^2c + c)$$

$$(4) -24x^3 - 12x^2 + 28x \\ = -4x(6x^2 + 3x - 7)$$

三、课堂练习

1. 写出下列多项式各项的公因式.

$$(1) ma + mb \quad (m)$$

$$(2) 4kx - 8ky \quad (4k)$$

$$(3) 5y^3 + 20y^2 \quad (5y^2)$$

$$(4) a^2b - 2ab^2 + ab \quad (ab)$$

2. 把下列各式分解因式

$$(1) 8x - 72 = 8(x - 9)$$

$$(2) a^2b - 5ab = ab(a - 5)$$

$$(3) 4m^3 - 6m^2 = 2m^2(2m - 3)$$

$$(4) a^2b - 5ab + 9b = b(a^2 - 5a + 9)$$

$$(5) -a^2 + ab - ac = -(a^2 - ab + ac) = -a(a - b + c)$$

$$(6) -2x^3 + 4x^2 - 2x = -(2x^3 - 4x^2 + 2x) = -2x(x^2 - 2x + 1)$$

四、课后作业

1. 解: (1) $2x^2 - 4x = 2x(x - 2);$

$$(2) 8m^2n + 2mn = 2mn(4m + 1);$$

$$(3) a^2x^2y - axy^2 = axy(ax - y);$$

$$(4) 3x^3 - 3x^2 - 9x = 3x(x^2 - x - 3);$$

$$(5) -24x^2y - 12xy^2 + 28y^3 \\ = -(24x^2y + 12xy^2 - 28y^3) \\ = -4y(6x^2 + 3xy - 7y^2);$$

$$(6) -4a^3b^3 + 6a^2b - 2ab \\ = -(4a^3b^3 - 6a^2b + 2ab) \\ = -2ab(2a^2b^2 - 3a + 1);$$

$$(7) -2x^2 - 12xy^2 + 8xy^3 \\ = -(2x^2 + 12xy^2 - 8xy^3) \\ = -2x(x + 6y^2 - 4y^3);$$

$$(8) -3ma^3 + 6ma^2 - 12ma \\ = -(3ma^3 - 6ma^2 + 12ma) \\ = -3ma(a^2 - 2a + 4);$$

2. 利用因式分解进行计算

$$(1) 121^3 \cdot 0.13 + 12.1^3 \cdot 0.9 - 12^3 \cdot 1.21 \\ = 12.1^3 \cdot 1.3 + 12.1^3 \cdot 0.9 - 1.2^3 \cdot 12.1 \\ = 12.1^3(1.3 + 0.9 - 1.2) \\ = 12.1^3 \cdot 1 = 12.1$$

$$(2) 2.34^3 \cdot 13.2 + 0.66^3 \cdot 13.2 - 26.4 \\ = 13.2^3(2.34 + 0.66 - 2) \\ = 13.2^3 \cdot 1 = 13.2$$

$$\begin{aligned}
 & (3) \text{ 当 } R_1=20, R_2=16, R_3=12, \pi=3.14 \text{ 时} \\
 & \pi R_1^2 + \pi R_2^2 + \pi R_3^2 \\
 & = \pi (R_1^2 + R_2^2 + R_3^2) \\
 & = 3.14^3 (20^2 + 16^2 + 12^2) \\
 & = 2512
 \end{aligned}$$

2.1 提公因式法

一、教学目标

让学生了解多项式公因式的意义，初步会用提公因式法分解因式

例 1 把 $a(x-3) + 2b(x-3)$ 分解因式.

分析：这个多项式整体而言可分为两大项，即 $a(x-3)$ 与 $2b(x-3)$ ，每项中都含有 $(x-3)$ ，因此可以把 $(x-3)$ 作为公因式提出来.

解： $a(x-3) + 2b(x-3) = (x-3)(a+2b)$

[例 2] 把下列各式分解因式:

(1) $a(x-y) + b(y-x)$;

(2) $6(m-n)^3 - 12(n-m)^2$.

分析：虽然 $a(x-y)$ 与 $b(y-x)$ 看上去没有公因式，但仔细观察可以看出 $(x-y)$ 与 $(y-x)$ 是互为相反数，如果把其中一个提取一个“-”号，则可以出现公因式，如 $y-x = -(x-y)$. $(m-n)^3$ 与 $(n-m)^2$ 也是如此.

解 (1) $a(x-y) + b(y-x)$

$$= a(x-y) - b(x-y)$$

$$= (x-y)(a-b)$$

(2) $6(m-n)^3 - 12(n-m)^2$

$$= 6(m-n)^3 - 12[-(m-n)]^2$$

$$= 6(m-n)^3 - 12(m-n)^2$$

$$= 6(m-n)^2(m-n-2).$$

二、做一做

请在下列各式等号右边的括号前填入“+”或“-”号，使等式成立:

(1) $2-a = \underline{\hspace{2cm}} (a-2)$;

(2) $y-x = \underline{\hspace{2cm}} (x-y)$;

(3) $b+a = \underline{\hspace{2cm}} (a+b)$;

(4) $(b-a)^2 = \underline{\hspace{2cm}} (a-b)^2$;

(5) $-m-n = \underline{\hspace{2cm}} -(m+n)$;

(6) $-s^2+t^2 = \underline{\hspace{2cm}} (s^2-t^2)$.

解 (1) $2-a = -(a-2)$;

(2) $y-x = -(x-y)$;

(3) $b+a = + (a+b)$;

(4) $(b-a)^2 = + (a-b)^2$;

(5) $-m-n = -(m+n)$;

(6) $-s^2+t^2 = -(s^2-t^2)$.

三、课堂练习

把下列各式分解因式:

解 (1) $x(a+b) + y(a+b)$

$$= (a+b)(x+y);$$

(2) $3a(x-y) - (x-y)$

$$\begin{aligned}
&= (x-y)(3a-1); \\
(3) & 6(p+q)^2 - 12(q+p) \\
&= 6(p+q)^2 - 12(p+q) \\
&= 6(p+q)(p+q-2); \\
(4) & a(m-2) + b(2-m) \\
&= a(m-2) - b(m-2) \\
&= (m-2)(a-b); \\
(5) & 2(y-x)^2 + 3(x-y) \\
&= 2[-(x-y)]^2 + 3(x-y) \\
&= 2(x-y)^2 + 3(x-y) \\
&= (x-y)(2x-2y+3); \\
(6) & mn(m-n) - m(n-m)^2 \\
&= mn(m-n) - m(m-n)^2 \\
&= m(m-n)[n - (m-n)] \\
&= m(m-n)(2n-m).
\end{aligned}$$

补充练习

把下列各式分解因式

解: $1.5(x-y)^3 + 10(y-x)^2$

$$= 5(x-y)^3 + 10(x-y)^2$$

$$= 5(x-y)^2[(x-y) + 2]$$

$$= 5(x-y)^2(x-y+2); 2.$$

$$m(a-b) - n(b-a)$$

$$= m(a-b) + n(a-b)$$

$$= (a-b)(m+n);$$

$$3. m(m-n) + n(n-m)$$

$$= m(m-n) - n(m-n)$$

$$= (m-n)(m-n) = (m-n)^2;$$

$$4. m(m-n)(p-q) - n(n-m)(p-q)$$

$$= m(m-n)(p-q) + n(m-n)(p-q)$$

$$= (m-n)(p-q)(m+n); 5. (b-$$

$$a)^2 + a(a-b) + b(b-a)$$

$$= (b-a)^2 - a(b-a) + b(b-a)$$

$$= (b-a)[(b-a) - a + b]$$

$$= (b-a)(b-a-a+b)$$

$$= (b-a)(2b-2a)$$

$$= 2(b-a)(b-a)$$

$$= 2(b-a)^2$$

2.2 运用公式法（一）

一、教学目标

1.使学生了解运用公式法分解因式的意义;

2.使学生掌握用平方差公式分解因式.

3.使学生了解,提公因式法是分解因式的首先考虑的方法,再考虑用平方差公式分解因式.

二、教学过程

1. 请看乘法公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \quad (1)$$

左边是整式乘法，右边是一个多项式，把这个等式反过来就是

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \quad (2)$$

左边是一个多项式，右边是整式的乘积.

利用平方差公式进行的因式分解.第(1)个等式可以看作是整式乘法中的平方差公式，第(2)个等式可以看作是因式分解中的平方差公式.

2. 公式讲解

观察式子 a^2-b^2 ,找出它的特点.

答：是一个二项式，每项都可以化成整式的平方，整体来看是两个整式的平方差.

如果一个二项式，它能够化成两个整式的平方差，就可以用平方差公式分解因式，分解成两个整式的和与差的积.

$$\text{如 } x^2-16=(x)^2-4^2=(x+4)(x-4).$$

$$9m^2-4n^2=(3m)^2-(2n)^2$$

$$=(3m+2n)(3m-2n)$$

3. 例题讲解

[例 1] 把下列各式分解因式:

$$(1) 25-16x^2;$$

$$(2) 9a^2-\frac{1}{4}b^2.$$

$$\text{解 } (1) 25-16x^2=5^2-(4x)^2$$

$$=(5+4x)(5-4x);$$

$$(2) 9a^2-\frac{1}{4}b^2=(3a)^2-\left(\frac{1}{2}b\right)^2$$

$$=(3a+\frac{1}{2}b)(3a-\frac{1}{2}b).$$

[例 2] 把下列各式分解因式:

$$(1) 9(m+n)^2-(m-n)^2;$$

$$(2) 2x^3-8x.$$

$$\text{解 } (1) 9(m+n)^2-(m-n)^2$$

$$=[3(m+n)]^2-(m-n)^2$$

$$=[3(m+n)+(m-n)][3(m+n)-(m-n)]$$

$$=(3m+3n+m-n)(3m+3n-m+n)$$

$$=(4m+2n)(2m+4n)$$

$$=4(2m+n)(m+2n)$$

$$(2) 2x^3-8x=2x(x^2-4)$$

$$=2x(x+2)(x-2)$$

说明：例 1 是把一个多项式的两项都化成两个单项式的平方，利用平方差公式分解因式；例 2 的(1)是把一个二项式化成两个多项式的平方差，然后用平方差公式分解因式，例 2 的(2)是先提公因式，然后再用平方差公式分解因式，由此可知，当一个题中既要用提公因式法，又要用公式法分解因式时，首先要考虑提公因式法，再考虑公式法.

三、课堂练习

1. 判断正误

$$\begin{aligned} \text{解: (1) } x^2+y^2 &= (x+y)(x-y); & (3) \\ (2) x^2-y^2 &= (x+y)(x-y); & (\checkmark) \\ (3) -x^2+y^2 &= (-x+y)(-x-y); & (3) \\ (4) -x^2-y^2 &= -(x+y)(x-y). & (3) \end{aligned}$$

1. 把下列各式分解因式

$$\begin{aligned} \text{解: (1) } a^2b^2-m^2 &= (ab)^2-m^2 \\ &= (ab+m)(ab-m); \\ (2) (m-a)^2-(n+b)^2 &= [(m-a)+(n+b)][(m-a)-(n+b)] \\ &= (m-a+n+b)(m-a-n-b); \\ (3) x^2-(a+b-c)^2 &= [x+(a+b-c)][x-(a+b-c)] \\ &= (x+a+b-c)(x-a-b+c); \\ (4) -16x^4+81y^4 &= (9y^2)^2-(4x^2)^2 \\ &= (9y^2+4x^2)(9y^2-4x^2) \\ &= (9y^2+4x^2)(3y+2x)(3y-2x) \end{aligned}$$

$$3. \text{解: } S_{\text{剩余}} = a^2 - 4b^2.$$

当 $a=3.6, b=0.8$ 时,

$$S_{\text{剩余}} = 3.6^2 - 4 \times 0.8^2 = 3.6^2 - 1.6^2 = 5.2^2 = 10.4 \text{ (cm}^2\text{)}$$

答: 剩余部分的面积为 10.4 cm^2 .

四、课后作业

$$\begin{aligned} 1. \text{解: (1) } a^2-81 &= (a+9)(a-9); \\ (2) 36-x^2 &= (6+x)(6-x); \\ (3) 1-16b^2 &= 1-(4b)^2 = (1+4b)(1-4b); \\ (4) m^2-9n^2 &= (m+3n)(m-3n); \\ (5) 0.25q^2-121p^2 &= (0.5q+11p)(0.5q-11p); \\ (6) 169x^2-4y^2 &= (13x+2y)(13x-2y); \\ (7) 9a^2p^2-b^2q^2 &= (3ap+bq)(3ap-bq); \\ (8) \frac{49}{4}a^2-x^2y^2 &= \left(\frac{7}{2}a+xy\right)\left(\frac{7}{2}a-xy\right); \end{aligned}$$

$$2. \text{解: (1) } (m+n)^2-n^2 = (m+n+n)(m+n-n) = m(m+2n);$$

$$\begin{aligned} (2) 49(a-b)^2-16(a+b)^2 &= [7(a-b)]^2 - [4(a+b)]^2 \\ &= [7(a-b)+4(a+b)][7(a-b)-4(a+b)] \\ &= (7a-7b+4a+4b)(7a-7b-4a-4b) \\ &= (11a-3b)(3a-11b); \\ (3) (2x+y)^2-(x+2y)^2 &= [(2x+y)+(x+2y)][(2x+y)-(x+2y)] \\ &= (3x+3y)(x-y) \\ &= 3(x+y)(x-y); \end{aligned}$$

$$(4) (x^2+y^2) - x^2y^2 \\ = (x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy);$$

$$(5) 3ax^2-3ay^4=3a(x^2-y^4) \\ =3a(x+y^2)(x-y^2)$$

$$(6) p^4-1=(p^2+1)(p^2-1) \\ = (p^2+1)(p+1)(p-1).$$

$$3.解: S_{\text{环形}} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2) \\ = \pi (R+r)(R-r)$$

当 $R=8.45, r=3.45, \pi=3.14$ 时,

$$S_{\text{环形}} = 3.14^3 (8.45+3.45)(8.45-3.45) = 3.14^3 \cdot 11.9^3 \cdot 5 = 186.83 \text{ (cm}^2\text{)}$$

答: 两圆所围成的环形的面积为 186.83 cm^2 .

VI.活动与探究

把 $(a+b+c)(bc+ca+ab) - abc$ 分解因式

$$\begin{aligned} \text{解: } & (a+b+c)(bc+ca+ab) - abc \\ & = [a+(b+c)][bc+a(b+c)] - abc \\ & = abc + a^2(b+c) + bc(b+c) + a(b+c)^2 - abc \\ & = a^2(b+c) + bc(b+c) + a(b+c)^2 \\ & = (b+c)[a^2+bc+a(b+c)] \\ & = (b+c)[a^2+bc+ab+ac] \\ & = (b+c)[a(a+b)+c(a+b)] \\ & = (b+c)(a+b)(a+c) \end{aligned}$$

运用公式法(二)

一、教学目标

- 1.使学生会用完全平方公式分解因式.
- 2.使学生学习多步骤,多方法的分解因式.

二、教学过程

在前面我们不仅学习了平方差公式

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

而且还学习了完全平方公式

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

三、新课

判断一个多项式是否为完全平方式,要考虑三个条件,项数是三项;其中有两项同号且能写成两个数或式的平方;另一项是这两数或式乘积的2倍.

1.例题讲解

[例 1] 把下列完全平方式分解因式:

$$(1) x^2+14x+49;$$

$$(2) (m+n)^2-6(m+n)+9.$$

[师] 分析: 大家先把多项式化成符合完全平方公式特点的形式,然后再根据公式分解因式.公式中的 a, b 可以是单项式,也可以是多项式.

$$\text{解: } (1) x^2+14x+49=x^2+2^3 \cdot 7x+7^2=(x+7)^2$$

$$(2) (m+n)^2-6(m+n)+9=(m+n)^2-2^2(m+n)+3+3^2=[(m+n)-3]^2=(m+n-3)^2.$$

[例 2] 把下列各式分解因式:

$$(1) 3ax^2+6axy+3ay^2;$$

$$(2) -x^2-4y^2+4xy.$$

[师] 分析：对一个三项式，如果发现它不能直接用完全平方公式分解时，要仔细观察它是否有公因式，若有公因式应先提取公因式，再考虑用完全平方公式分解因式.

如果三项中有两项能写成两数或式的平方，但符号不是“+”号时，可以先提取“-”号，然后再用完全平方公式分解因式.

$$\text{解： (1) } 3ax^2+6axy+3ay^2$$

$$=3a(x^2+2xy+y^2)$$

$$=3a(x+y)^2$$

$$(2) -x^2-4y^2+4xy$$

$$=-(x^2-4xy+4y^2)$$

$$=-[x^2-2 \cdot x \cdot 2y+(2y)^2]$$

$$=-(x-2y)^2$$

四、课堂练习

1. (1) 是完全平方

$$x^2-x+\frac{1}{4}=x^2-2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2=(x-\frac{1}{2})^2$$

(2) 不是完全平方，因为 $3ab$ 不符合要求.

(3) 是完全平方

$$\frac{1}{4}m^2+3mn+9n^2$$

$$=(\frac{1}{2}m)^2+2 \cdot \frac{1}{2}m \cdot 3n+(3n)^2$$

$$=(\frac{1}{2}m+3n)^2$$

(4) 不是完全平方

$$2. (1) x^2-12xy+36y^2$$

$$=x^2-2 \cdot x \cdot 6y+(6y)^2$$

$$=(x-6y)^2;$$

$$(2) 16a^4+24a^2b^2+9b^4$$

$$=(4a^2)^2+2 \cdot 4a^2 \cdot 3b^2+(3b^2)^2$$

$$=(4a^2+3b^2)^2$$

$$(3) -2xy-x^2-y^2$$

$$=-(x^2+2xy+y^2)$$

$$=-(x+y)^2;$$

$$(4) 4-12(x-y)+9(x-y)^2$$

$$=2^2-2 \cdot 2 \cdot 3(x-y)+[3(x-y)]^2$$

$$=[2-3(x-y)]^2$$

$$=(2-3x+3y)^2$$

五、课后作业

$$1. (1) x^2y^2-2xy+1=(xy-1)^2;$$

$$(2) 9-12t+4t^2=(3-2t)^2;$$

$$(3) y^2+y+\frac{1}{4}=(y+\frac{1}{2})^2;$$

$$(4) 25m^2-80m+64=(5m-8)^2;$$

$$(5) \frac{x^2}{4} + xy + y^2 = \left(\frac{x}{2} + y\right)^2;$$

$$(6) a^2b^2 - 4ab + 4 = (ab - 2)^2$$

$$2. (1) (x+y)^2 + 6(x+y) + 9$$

$$= [(x+y) + 3]^2$$

$$= (x+y+3)^2;$$

$$(2) a^2 - 2a(b+c) + (b+c)^2$$

$$= [a - (b+c)]^2$$

$$= (a-b-c)^2;$$

$$(3) 4xy^2 - 4x^2y - y^3$$

$$= y(4xy - 4x^2 - y^2)$$

$$= -y(4x^2 - 4xy + y^2)$$

$$= -y(2x-y)^2;$$

$$(4) -a + 2a^2 - a^3$$

$$= -(a - 2a^2 + a^3)$$

$$= -a(1 - 2a + a^2)$$

$$= -a(1-a)^2.$$

3. 设两个奇数分别为 x 、 $x-2$, 得

$$x^2 - (x-2)^2$$

$$= [x + (x-2)][x - (x-2)]$$

$$= (x+x-2)(x-x+2)$$

$$= 2(2x-2)$$

$$= 4(x-1)$$

第三章 分式

3.1 分式

一、教学目标

1. 在现实情境中进一步理解用字母表示数的意义，发展符号感.
2. 了解分式产生的背景和分式的概念，了解分式与整式概念的区别与联系.
3. 掌握分式有意义的条件，认识事物间的联系与制约关系.

二、教学过程

I. 创设问题情境，引入新课

面对日益严重的土地沙化问题，某县决定分期分批固沙造林，一期工程计划在一定期限内固沙造林 2400 公顷，实际每月固沙造林的面积比原计划多 30 公顷，结果提前 4 个月完成任务. 原计划每月固沙造林多少公顷？

这一问题中有哪些等量关系？

如果原计划每月固沙造林 x 公顷，那么原计划完成一期工程需要_____个月，实际完成一期工程用了_____个月.

根据题意，可得方程_____.

根据题意，我认为这个问题的等量关系是：实际固沙造林所用的时间+4=原计划固沙造林所用的时间. (1)

这个问题的等量关系也可以是：原计划每月固沙造林的公顷数+30=实际每月固沙造林的公顷数. (2)

在这个问题中，涉及到了三个基本量：工作量、工作效率、工作时间.工作量=工作效率³ 工作时间.

如果用第（1）个等量关系列方程，应如何设出未知数呢？

因为第（1）个等量关系是工作时间的关系，因此需用已知条件和未知数表示出工作时间.题中的工作量是已知的.因此需设出工作效率即原计划每月固沙造林 x 公顷.

原计划完成一期工程需 $\frac{2400}{x}$ 个月，

实际完成一期工程需 $\frac{2400}{x-30}$ 个月，

根据等量关系（1）可列出方程：

$$\frac{2400}{x-30} + 4 = \frac{2400}{x}.$$

用等量关系（2）设未知数，列方程呢？

因为等量关系（2）是工作效率之间的关系，根据题意，应设出工作时间.不妨设原计划 x 个月完成一期工程，实际上完成一期工程用了 $(x-4)$ 个月，那么原计划每月固沙造林的公顷数为 $\frac{2400}{x}$ 公顷，实际每月固沙造林 $\frac{2400}{x-4}$ 公顷，根据题意可得方程 $\frac{2400}{x} + 30 = \frac{2400}{x-4}$.

同学们观察我们列出的两个方程，有什么新的发现？

我们设出未知数后，用字母表示数的方法，列出几个代数式，表示出我们需要的基本量.如 $\frac{2400}{x}$, $\frac{2400}{x-4}$, $\frac{2400}{x+30}$. 这些代数式和整式不同.我们虽然列出了方程，但分母中含有字母，

要求出它的解，好像很不容易.

像 $\frac{2400}{x}$, $\frac{2400}{x-4}$, $\frac{2400}{x-30}$ 这样的代数式同整式有很大的不同，而且它是以分数的形式出

现的，它们是不同于整式的一个很大的家族，我们把它们叫做分式.

2.例题讲解

（1）下列各式中，哪些是整式？哪些是分式？

$$5x-7, 3x^2-1, \frac{b-3}{2a+1}, \frac{m(n+p)}{7}, -5, \frac{x^2-xy+y^2}{2x-1}, 2, \frac{4}{7}, \frac{b^4}{5b+c}.$$

（2）①当 $a=1, 2$ 时，分别求分式 $\frac{a+1}{2a}$ 的值.

②当 a 为何值时，分式 $\frac{a+1}{2a}$ 有意义？

③当 a 为何值时，分式 $\frac{a+1}{2a}$ 的值为零？

（1）中 $5x-7, 3x^2-1, \frac{m(n+p)}{7}, -5, \frac{2}{7}$ 是整式； $\frac{b-3}{2a+1}, \frac{x^2-xy+y^2}{2x-1}, \frac{4}{5b+c}$ 是分式.

（2）解：①当 $a=1$ 时， $\frac{a+1}{2a} = \frac{1+1}{2 \times 1} = 1$;

当 $a=2$ 时， $\frac{a+1}{2a} = \frac{2+1}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$.

②当分母的值等于零时，分式没有意义，除此以外，分式都有意义.

由分母 $2a=0$, 得 $a=0$.

所以, 当 a 取零以外的任何实数时, 分式 $\frac{a+1}{2a}$ 有意义.

③分式的值为零, 包含两层意思: 首先分式有意义, 其次, 它的值为零. 因此 a 的取值

有两个要求:
$$\begin{cases} 2a \neq 0 \\ a+1=0 \end{cases}$$

所以, 当 $a=-1$ 时, 分母不为零, 分子为零, 分式 $\frac{a+1}{2a}$ 为零.

三、随堂练习

1. 当 x 取什么值时, 下列分式有意义?

(1) $\frac{8}{x-1}$; (2) $\frac{1}{x^2-9}$; (3) $\frac{2}{x^2+1}$

分析: 当分母的值为零时, 分式没有意义, 除此以外, 分式都有意义.

解: (1) 由分母 $x-1=0$, 得 $x=1$.

所以, 当 x 取除 1 以外的任何实数时, 分式 $\frac{8}{x-1}$ 都有意义.

(2) 由分母 $x^2-9=0$, 得 $x=\pm 3$.

所以, 当 x 取除 3 和 -3 以外的任何实数时, 分式 $\frac{1}{x^2-9}$ 都有意义.

(3) 由分母 x^2+1 可知, x 取任何实数时, x^2 是一个非负数, 所以 x^2+1 不管 x 取何实数时, x^2+1 都不会为零. 即 x 取任何实数, $\frac{2}{x^2+1}$ 都有意义.

2. 把甲、乙两种饮料按质量比 $x:y$ 混合在一起, 可以调制成一种混合饮料, 调制 1 kg 这种混合饮料需多少甲种饮料?

解: 根据题意, 调制 1 kg 这种混合饮料需 $\frac{x}{x+y}$ kg 甲种饮料.

3.2 分式的乘除法

一、教学目标

1. 分式乘除法的运算法则,
2. 会进行分式的乘除法的运算.

二、教学过程

探索、交流——观察下列算式:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5}, \frac{5}{7} \times \frac{2}{9} = \frac{5 \times 2}{7 \times 9},$$

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 4}, \frac{5}{7} \div \frac{2}{9} = \frac{5}{7} \times \frac{9}{2} = \frac{5 \times 9}{7 \times 2}.$$

猜一猜 $\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = ?$ $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = ?$

观察上面运算, 可知:

两个分数相乘, 把分子相乘的积作为积的分子, 把分母相乘的积作为积的分母;

两个分数相除, 把除数的分子和分母颠倒位置后, 再与被除数相乘.

$$\text{即 } \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{bd}{ac};$$

$$\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d} = \frac{bc}{ad}.$$

这里字母 a, b, c, d 都是整数，但 a, c, d 不为零.

1. 分式的乘除法法则

两个分式相乘，把分子相乘的积作为积的分子，把分母相乘的积作为积的分母；

两个分式相除，把除式的分子和分母颠倒位置后再与被除式相乘.

2. 例题讲解

[例 1] 计算：

$$(1) \frac{4x}{3y} \cdot \frac{y}{2x^3}; \quad (2) \frac{a+2}{a-2} \cdot \frac{1}{a^2+2a}.$$

分析：(1) 将算式对照乘除法运算法则，进行运算；(2) 强调运算结果如不是最简分式时，一定要进行约分，使运算结果化为最简分式.

$$\text{解：(1) } \frac{4x}{3y} \cdot \frac{y}{2x^3} = \frac{4x \cdot y}{3y \cdot 2x^3}$$

$$= \frac{2xy \cdot 2}{2xy \cdot 3x^2} = \frac{2}{3x^2};$$

$$(2) \frac{a+2}{a-2} \cdot \frac{1}{a^2+2a}$$

$$= \frac{a+2}{(a-2) \cdot a \cdot (a+2)} = \frac{1}{a^2-2a}.$$

[例 2] 计算：

$$(1) 3xy^2 \div \frac{6y^2}{x}; \quad (2) \frac{a-1}{a^2-4a+4} \div \frac{a^2-1}{a^2-4}.$$

分析：(1) 将算式对照分式的除法运算法则，进行运算；(2) 当分子、分母是多项式时，一般应先分解因式，并在运算过程中约分，可以使运算简化，避免走弯路.

$$\text{解：(1) } 3xy^2 \div \frac{6y^2}{x} = 3xy^2 \cdot \frac{x}{6y^2}$$

$$= \frac{3xy^2 \cdot x}{6y^2} = \frac{1}{2}x^2;$$

$$(2) \frac{a-1}{a^2-4a+4} \div \frac{a^2-1}{a^2-4}$$

$$= \frac{a-1}{a^2-4a+4} \cdot \frac{a^2-4}{a^2-1}$$

$$= \frac{(a-1)(a^2-4)}{(a^2-4a+4)(a^2-1)}$$

$$= \frac{(a-1)(a+2)(a-2)}{(a-2)^2(a-1)(a+1)}$$

$$= \frac{a+2}{(a-2)(a+1)}$$

3. 做一做

通常购买同一品种的西瓜时，西瓜的质量越大，花费的钱越多.因此人们希望西瓜瓤占整个西瓜的比例越大越好.假如我们把西瓜都看成球形，并把西瓜瓤的密度看成是均匀的，

西瓜的皮厚都是 d ，已知球的体积公式为 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ （其中 R 为球的半径），那么

- (1) 西瓜瓤与整个西瓜的体积各是多少？
- (2) 西瓜瓤与整个西瓜的体积比是多少？
- (3) 买大西瓜合算还是买小西瓜合算？

我们不妨设西瓜的半径为 R ，根据题意，可得：

- (1) 整个西瓜的体积为 $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$;

西瓜瓤的体积为 $V_2 = \frac{4}{3}\pi (R-d)^3$.

- (2) 西瓜瓤与整个西瓜的体积比为：

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi (R-d)^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{(R-d)^3}{R^3}$$

$$= \left(\frac{R-d}{R}\right)^3 = \left(1 - \frac{d}{R}\right)^3.$$

- (3) 我认为买大西瓜合算.

由 $\frac{V_2}{V_1} = \left(1 - \frac{d}{R}\right)^3$ 可知， R 越大，即西瓜越大， $\frac{d}{R}$ 的值越小， $\left(1 - \frac{d}{R}\right)$ 的值越大， $\left(1 - \frac{d}{R}\right)^3$ 也越大，则 $\frac{V_2}{V_1}$ 的值也越大，即西瓜瓤占整个西瓜的体积比也越大，因此，买大西瓜更合算.

瓜更合算.

三、随堂练习

1. 计算：(1) $\frac{a^2-1}{b} \cdot \frac{1}{a^2}$; (2) $\frac{x+1}{a^2-a} \div \frac{1}{a-1}$; (3) $\frac{1}{y} \div \frac{1}{y^2}$

2. 化简：

(1) $\frac{x^2+x-6}{x-3} \div \frac{x+3}{x^2-6-x}$;

$$(2) (ab-b^2) \div \frac{a^2-b^2}{a+b}$$

$$\text{解: } 1. (1) \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a^2} = \frac{ab}{ba^2} = \frac{ab}{ab \cdot a} = \frac{1}{a};$$

$$(2) (a^2-a) \div \frac{a}{a-1} = (a^2-a) \cdot \frac{a-1}{a} \\ = \frac{a(a-1)(a-1)}{a} = (a-1)^2 \\ = a^2 - 2a + 1$$

$$(3) \frac{x^2-1}{y} \div \frac{x+1}{y^2} = \frac{x^2-1}{y} \cdot \frac{y^2}{x+1}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)y^2}{y(x+1)} = (x-1)y = xy - y.$$

$$2. (1) \frac{x^2+x-6}{x-3} \div \frac{x+3}{x^2-6-x}$$

$$= \frac{(x+3)(x-2)}{x-3} \cdot \frac{x^2-x-6}{x+3}$$

$$= \frac{(x+3)(x-2)(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)}$$

$$= (x-2)(x+2) = x^2 - 4.$$

$$(2) (ab-b^2) \div \frac{a^2-b^2}{a+b}$$

$$= (ab-b^2) \cdot \frac{a+b}{a^2-b^2} = \frac{b(a-b)(a+b)}{(a-b)(a+b)}$$

$$= b.$$

3.1 分式的加减法

一、教学目标

1. 同分母的分式的加减法的运算法则及其应用.
2. 简单的异分母的分式相加减的运算.

二、教学过程

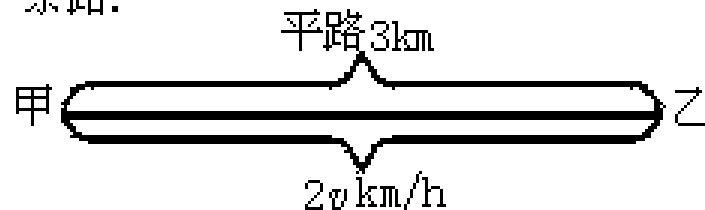
问题一：从甲地到乙地有两条路，每条路都是 3 km，其中第一条是平路，第二条有 1 km 的上坡路、2 km 的下坡路. 小丽在上坡路上的骑车速度为 v km/h，在平路上的骑车速度为 $2v$ km/h，在下坡路上的骑车速度为 $3v$ km/h，那么

- (1) 当走第二条路时，她从甲地到乙地需多长时间？
- (2) 她走哪条路花费的时间少？少用多长时间？

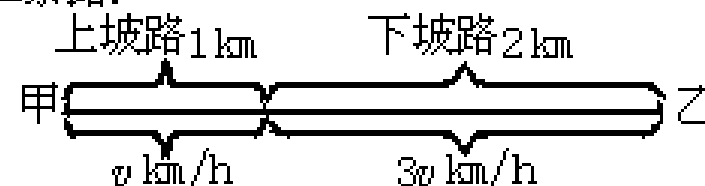
问题二：某人用电脑录入汉字文稿的效率相当于手抄3倍，设他手抄的速度为a 字/时，那么他录入 3000 字文稿比手抄少用多少时间？

答案：问题一，根据题意可得下列线段图：

第一条路：



第二条路：



(1) 当走第二条路时，她从甲地到乙地需要的时间为 $(\frac{1}{v} + \frac{2}{3v})h$.

(2) 走第一条路，小丽从甲地到乙地需要的时间为 $\frac{3}{2v}h$.但要求出小丽走哪条路花费的时间少.就需要比较 $(\frac{1}{v} + \frac{2}{3v})$ 与 $\frac{3}{2v}$ 的大小，少用多少时间，就需要用它们中的较大者减去较小者，便可求出.

如果要比较 $(\frac{1}{v} + \frac{2}{3v})$ 与 $\frac{3}{2v}$ 的大小，就比较难了，因为它们的分母中都含有字母.

比较两个数的大小，我们可以用作差法.例如有两个数 a, b .

如果 $a - b > 0$ ，则 $a > b$;

如果 $a - b = 0$ ，则 $a = b$;

如果 $a - b < 0$ ，则 $a < b$.

显然 $(\frac{1}{v} + \frac{2}{3v})$ 和 $\frac{3}{2v}$ 中含有字母，但它们也是用来表示数的，所以我认为可以用实数比较大小的方法来做.

如果用作差的方法，例如 $(\frac{1}{v} + \frac{2}{3v}) - \frac{3}{2v}$ ，如何判断它大于零，等于零，小于零呢？

做一做

$$(1) \frac{1}{a} + \frac{2}{a} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2) \frac{x^2}{x-2} - \frac{4}{x-2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(3) \frac{x+2}{x+1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x-3}{x+1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

同分母的分数的加减是分母不变，把分子相加减，例如 $\frac{4}{13} + \frac{3}{13} - \frac{17}{13} = \frac{4+3-17}{13} = \underline{\hspace{2cm}}$

10

13

我认为分母相同的分式相加减与同分母的分数相加减一样，应该是分母不变，把分子相加减.

$$\text{解: (1) } \frac{1}{a} + \frac{2}{a} = \frac{1+2}{a} = \frac{3}{a};$$

$$\text{解 (2) } \frac{x^2}{x-2} - \frac{4}{x-2} = \frac{x^2-4}{x-2};$$

$$\begin{aligned} \text{解 (3) } & \frac{x+2}{x+1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x-3}{x+1} \\ &= \frac{(x+2) - (x-1) + (x-3)}{x+1} \\ &= \frac{x+2-x+1+x-3}{x+1} \\ &= \frac{x}{x+1} \end{aligned}$$

异分母的分数加减时，可利用分数的基本性质通分，把异分母的分数加减法化成同分母的分数加减法

[例 1] 计算：

$$(1) \frac{3}{a} + \frac{a-15}{5a}; \quad (2) \frac{2}{x-1} + \frac{x-1}{1-x}$$

[例 1] 中的第 (1) 题，一个分母是 a ，另一个分母是 $5a$ ，利用分式的基本性质，只需将第一个分式 $\frac{3}{a}$ 化成 $\frac{3 \times 5}{5a} = \frac{15}{5a}$ 即可。

$$\begin{aligned} \text{解: (1) } & \frac{3}{a} + \frac{a-15}{5a} = \frac{15}{5a} + \frac{a-15}{5a} \\ &= \frac{15+(a-15)}{5a} = \frac{a}{5a} = \frac{1}{5}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & \frac{2}{x-1} + \frac{x-1}{1-x} = \frac{2}{x-1} + \frac{1-x}{x-1} \\ &= \frac{2+(1-x)}{x-1} = \frac{3-x}{x-1} \end{aligned}$$

三、计算：

$$(1) \frac{3b}{x} - \frac{b}{x};$$

$$(2) \frac{1}{a} + \frac{1}{2a};$$

$$(3) \frac{a}{a-b} - \frac{a}{b-a}$$

$$\text{解: (1) } \frac{3b}{x} - \frac{b}{x} = \frac{3b-b}{x} = \frac{2b}{x};$$

$$(2) \frac{1}{a} + \frac{1}{2a} = \frac{2}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{2+1}{2a} = \frac{3}{2a};$$

$$\begin{aligned} (3) & \frac{a}{a-b} - \frac{a}{b-a} = \frac{a}{a-b} - \frac{-a}{a-b} \\ &= \frac{a-(-a)}{a-b} = \frac{2a}{a-b}. \end{aligned}$$

3.3 分式方程

一、教学目标

- 1.了解分式方程的一般步骤.
- 2.了解解分式方程验根的必要性.

二、教学过程

解方程 $\frac{3x-1}{2} + \frac{5x+2}{3} = 2 - \frac{4x-2}{6}$.

(1) 去分母, 方程两边同乘以分母的最小公倍数6, 得

$$3(3x-1) + 2(5x+2) = 6 \cdot 2 - (4x-2).$$

(2) 去括号, 得 $9x-3+10x+4=12-4x+2$,

(3) 移项, 得 $9x+10x+4x=12+2+3-4$,

(4) 合并同类项, 得 $23x=13$,

(5) 使 x 的系数化为 1, 两边同除以 23, $x = \frac{13}{23}$.

例 1 解方程: $\frac{300}{x} - \frac{480}{2x} = 4$

解: 方程两边同乘以 $2x$, 得

$$600 - 480 = 8x$$

解这个方程, 得 $x=15$

检验: 将 $x=15$ 代入原方程, 得

左边=4, 右边=4, 左边=右边, 所以 $x=15$ 是原方程的根.

例 2 解方程:

$$(1) \frac{3}{x-1} - \frac{4}{x} = \frac{10}{2x-1} + \frac{5}{1-2x} = 2.$$

[分析] 先总结解分式方程的几个步骤, 然后解题.

解 (1) $\frac{3}{x-1} - \frac{4}{x} = \frac{10}{2x-1} + \frac{5}{1-2x} = 2.$

去分母, 方程两边同乘以 $x(x-1)$, 得

$$3x=4(x-1)$$

解这个方程, 得 $x=4$

检验: 把 $x=4$ 代入 $x(x-1) = 4 \cdot 3 = 12 \neq 0$,

所以原方程的根为 $x=4$.

$$(2) \frac{10}{2x-1} + \frac{5}{1-2x} = 2$$

去分母, 方程两边同乘以 $(2x-1)$, 得

$$10-5=2(2x-1)$$

解这个方程, 得 $x = \frac{7}{4}$

检验: 把 $x = \frac{7}{4}$ 代入原方程分母 $2x-1 = 2 \cdot \frac{7}{4} - 1 = \frac{7}{2} \neq 0$.

所以原方程的根为 $x = \frac{7}{4}$.

第四章 相似图形

4.1 线段的比

一、教学目标

- 1.知道线段比的概念.
- 2.会计算两条线段的比.
- 3.熟记比例的基本性质，并能进行证明和运用.

二、教学过程

1.两条线段的比的概念

两条线段的比就是两条线段长度的比.

比如：线段 a 的长度为 3 厘米，线段 b 的长度为 6 米，所以两线段 a, b 的比为 $3 : 6 = 1 :$

2.对吗？

不对，因为 a 、 b 的长度单位不一致，所以不对.

注意：在量线段时要选用同一个长度单位.

2..例题

在某市城区地图（比例尺 $1 : 9000$ ）上，新安大街的图上长度与光华大街的图上长度分别是 16 cm、10 cm.

（1）新安大街与光华大街的实际长度各是多少米？

（2）新安大街与光华大街的图上长度之比是多少？它们的实际长度之比呢？

解 （1）根据题意，得

$$\frac{\text{新安大街的图上长度}}{\text{新安大街的实际长度}} = \frac{1}{9000}$$

$$\frac{\text{光华大街的图上长度}}{\text{光华大街的实际长度}} = \frac{1}{9000}$$

因此，新安大街的实际长度是

$$16 \times 9000 = 144000 \text{ (cm)},$$

$$144000 \text{ cm} = 1440 \text{ m};$$

光华大街的实际长度是

$$10 \times 9000 = 90000 \text{ (cm)}$$

$$90000 \text{ cm} = 900 \text{ m}.$$

（2）新安大街与光华大街的图上长度之比是 $16 : 10 = 8 : 5$

新安大街的实际长度与光华大街的实

际长度之比是 $144000 : 90000 = 8 : 5$

由例 2 的结果可以发现：

新安大街的图上长度

光华大街的图上长度

$$= \frac{\text{新安大街的实际长度}}{\text{光华大街的实际长度}}$$

三、随堂练习

1.在比例尺为 $1 : 8000$ 的某学校地图上，矩形运动场的图上尺寸是 1 cm³ 2 cm，矩形运动场的实际尺寸是多少？

解：根据题意，得

矩形运动场的图上长度：矩形运动场的实际长度 = $1 : 8000$

因此，矩形运动场的长是 $2 \times 8000 = 16000 \text{ (cm)} = 160 \text{ (m)}$

)

矩形运动场的宽是

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/838123136127006101>